

高知工科大学
基礎数学ワークブック

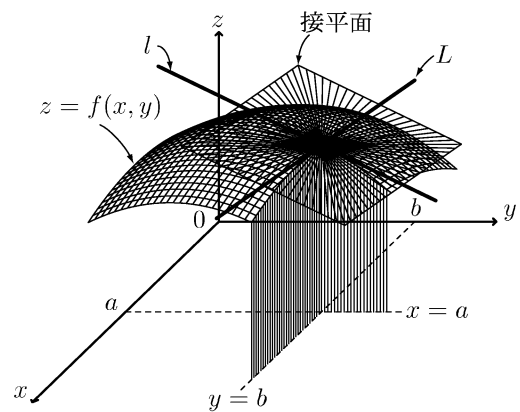
(2000年度版)

秋期入学者用

IV

内容

- ◎ 高階導関数
- ◎ テーラー展開
- ◎ 偏微分
- ◎ 接平面
- ◎ ラプラシアン



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

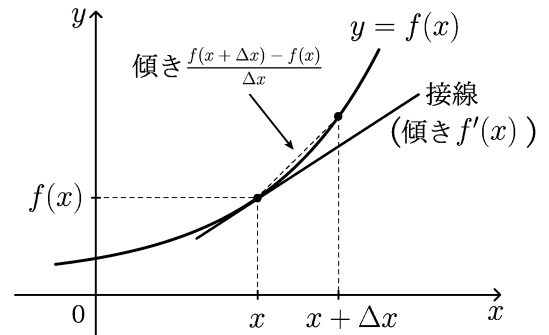
< 微分の復習 1 >

x の関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。これを

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$



などという記号で表す。全て同じ意味である。

例 $(x^4 + 3x^2 - 5x)' = 4x^3 + 6x - 5$ を $\frac{d}{dx}(x^4 + 3x^2 - 5x) = 4x^3 + 6x - 5$ と書く。

問 1 以下の導関数を求めよ。(ただし $k, r, a (> 0)$ は定数)

(1) $\frac{d}{dx}(k) =$

(2) $\frac{d}{dx}(x^r) =$

(3) $\frac{d}{dx}(\sin x) =$

(4) $\frac{d}{dx}(\cos x) =$

(5) $\frac{d}{dx}(\tan x) =$

(6) $\frac{d}{dx}(\log x) =$

(7) $\frac{d}{dx}(a^x) =$

(8) $\frac{d}{dx}(e^x) =$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ と定数 k に対して

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}g(x)\right) \quad \dots \text{和の微分}$$

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k \times \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \quad \dots \text{定数倍の微分}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) \times g(x) + f(x) \times \left(\frac{d}{dx}g(x)\right) \quad \dots \text{積の微分}$$

が成り立つ。

問 2 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dx}(2e^x + 3x^5)$

(2) $\frac{d}{dx}(3 \log x - 4 \sin x)$

(3) $\frac{d}{dx}(e^x \cos x)$

(4) $\frac{d}{dx}(x^4 \log x)$

< 微分の復習 2 >

x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \times g(x) - f(x) \times \left(\frac{d}{dx} g(x) \right)}{\{g(x)\}^2} \quad (\text{商の微分})$$

が成り立つ。

問 1 定数 k と関数 $g(x)$ に対し、次の導関数を求めよ。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{k}{g(x)} \right) =$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{x^2} \right) =$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\frac{5}{e^x} \right) =$$

$$(3) \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x^2} \right) =$$

$$(4) \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{2 + \sin x} \right) =$$

$f(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$u = g(x)$ とおくと $y = f(u)$ より

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du} f(u) \right) \times \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \quad (\text{合成関数の微分})$$

例 1 $y = \sin(4 + x^3)$ の導関数は、

$u = 4 + x^3$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sin(4 + x^3)) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du} (\sin u) \right) \times \left(\frac{d}{dx} (4 + x^3) \right) \\ &= \cos(u) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(4 + x^3) \end{aligned}$$

問 3 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx} (\cos(x^5 - x^2)) =$$

$$(2) \frac{d}{dx} (e^{-x^2+1}) =$$

$$(3) \frac{d}{dx} (1 + \sin x)^3 =$$

$$(4) \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + 4}) =$$

$$(5) \frac{d}{dx} \log(3 + \cos x) =$$

$$(6) \frac{d}{dx} (\sin(\sqrt{x})) =$$

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ について、導関数 $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ の導関数を $f(x)$ の 2階導関数といい、 $f''(x)$ または $f^{(2)}(x)$ 等で表す。

例 1 $f(x) = x^3$ に対し、 $f'(x) = 3x^2$ より

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' = 6x$$

$y = f(x)$ の 2階導関数を $y'' = f''(x)$ の他に次のように書く。

$$y'' = f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) \quad (2 \text{階導関数})$$

すべて同じ意味である。

問 1 次の関数 $f(x)$ の 1階導関数 $f'(x)$ および 2階導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x$ (2) $f(x) = \cos(2x)$ (3) $f(x) = \log(3x)$

$$f'(x) =$$

$$f'(x) =$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f''(x) =$$

関数 $f(x)$ について 2階導関数 $f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の 3階導関数といい、

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 f(x) \quad (3 \text{階導関数})$$

という記号で表す。全て同じ意味である。

例 2 $f(x) = x^3$ のとき $f''(x) = 6x$ より

$$f'''(x) = (f''(x))' = (6x)' = 6$$

問 2 次の関数の 1階から 3階までの導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

(2) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

(3) $f(x) = e^{3x}$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

(4) $f(x) = x^2 \log x$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

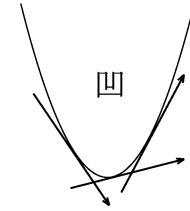
$$f'''(x) =$$

< グラフの凹凸1 >

- [1] 関数 $f(x)$ の2階導関数が、ある x 範囲内で常に $f''(x) > 0$ のとき、 $f'(x)$ の値は、この範囲内で増加する。

したがって、グラフは、右の図のように接線の傾きが増加していく。

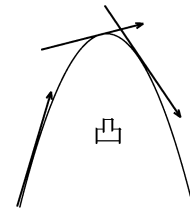
このようなとき、グラフは凹であるという。



- [2] これに対し、 $f''(x) < 0$ である範囲内では、 $f'(x)$ の値は減少し、グラフでは、

右の図のように接線の傾きが減少していく。

このようなとき、グラフは凸であるという。



例 関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だから、グラフの凹凸は右の表のようになる。

| | | | |
|-------|-----|---|-----|
| x | ... | 1 | ... |
| y'' | + | 0 | - |
| y | 凹 | 2 | 凸 |

(凹凸表)

問 次の関数の2階導関数 y'' を求め、凹凸を表にせよ。

(1) $y = x^3 + 3x + 2$

$$y'' =$$

| | |
|-------|--|
| x | |
| y'' | |
| y | |

(2) $y = x^4 + 4x^3 + 10$

$$y'' =$$

| | |
|-------|--|
| x | |
| y'' | |
| y | |

< グラフの凹凸 2 >

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

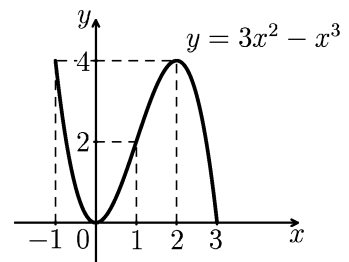
より、増減表と凹凸表は右のようになる。

これを組み合わせると、下の表

| | | | | | | |
|-------------|------|-----|---|-----|---|-----|
| 増 減 表 | x | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| | y' | - | 0 | + | 0 | - |
| | y | | ↘ | 0 | ↗ | 4 |

| | | | | |
|-------------|-------|-----|---|-----|
| 凹 凸 表 | x | ... | 1 | ... |
| | y'' | + | 0 | - |
| | y | 凹 | 2 | 凸 |

| | | | | | | | | |
|-------|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| x | ... | 0 | ... | 1 | ... | 2 | ... | |
| y' | - | 0 | + | + | + | 0 | - | |
| y'' | + | + | + | 0 | - | - | - | |
| y | | ↘ | 0 | ↗ | 2 | ↗ | 4 | ↘ |



のようになる。実際のグラフは右のようになる。

以上の考察から、 y' と y'' の +, - によって y のグラフは

次のようになる。

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | - | ↘ | + | ↗ | + | ↗ | - | ↘ |
| y'' | + | 凹 | + | 凹 | - | 凸 | - | 凸 |
| y | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |

問 関数 $y = x^4 + 4x^3 + 10$ を 2 回微分し、

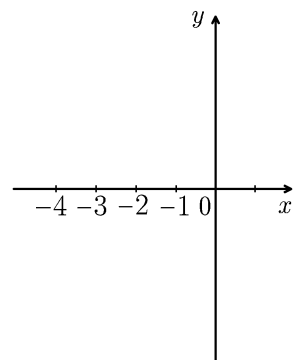
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$$y' =$$

$$y'' =$$

| | | | | | | | |
|-------|-----|--|-----|--|-----|--|-----|
| x | ... | | ... | | ... | | ... |
| y' | | | | | | | |
| y'' | | | | | | | |
| y | | | | | | | |

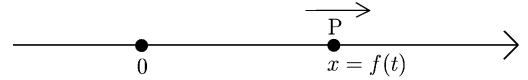


< 加速度 >

直線上を運動する点 P を考える。P の座標

x は時刻 t の関数であり、一般に $x = f(t)$

とおく。



時刻 t から $t + h$ までの間の平均速度は $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ であり、 $h \rightarrow 0$

のときの極限值 $v(t)$ は、時刻 t での瞬間の速度である。

その極限值

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) = \frac{dx}{dt} \quad (\text{速度})$$

を点 P の (時刻 t での) 速度という。

さらに、時刻 t から $t + h$ までの速度の変化の割合 $\frac{v(t+h) - v(t)}{h}$ の、

$h \rightarrow 0$ のときの極限值 $a(t)$ は、時刻 t での瞬間の速度の変化の割合であり、

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{加速度})$$

を点 P の (時刻 t での) 加速度という。

例 時刻 t における座標が $x = t^3 - 2t$ で表される直線上の点の運動の、

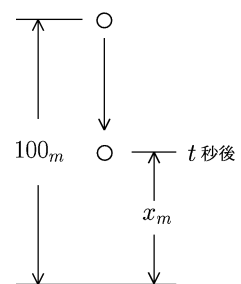
時刻 t における速度 v と加速度 a は

$$v = \frac{dx}{dt} = (t^3 - 2t)' = 3t^2 - 2, \quad a = \frac{dv}{dt} = (3t^2 - 2)' = 6t$$

問 1 (自由落下) 地上 100_m の地点から物体を落とす。

t 秒後の高さを x_m とするとき、 $x = 100 - 4.9t^2$ の式がなりたつ。 t 秒後の速度 v と加速度 a を求めよ。

(解)



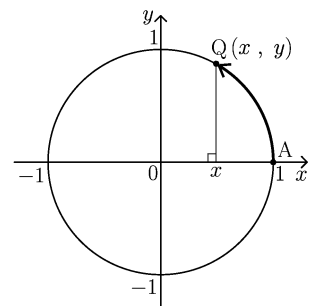
問 2 (単振動) 原点中心、半径 1 の円周上を点 Q が動く。

点 A から出発し、1 秒間に 1 回転するとき、 t 秒後の

Q の x 座標は $x = \cos(2\pi t)$ である。 t 秒後の x の

速度 v と加速度 a を求め、 a を x で表せ。

(解)



< 関数の一次近似 >

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である。

$x = a + h$ とおけば、 $h \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow a$ より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って、 x が a に十分近いとき ($x \doteq a$ のとき)

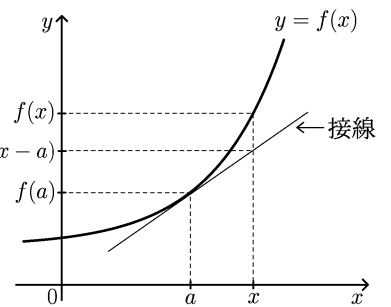
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \doteq f'(a)$$

とみなせる。よって

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$$

が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、これを一次近似式という。右辺の式は直線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{接線})$$



を表すが、これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式である。すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例 $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

より一次近似式は

$$x \doteq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \doteq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a)$$

となる。ここで $a = 1$, $x = 1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1} \doteq \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0.1 = 1 + \frac{1}{30}$$

問 例にならって、 $\sqrt{1.1}$ を近似せよ。

< ロピタルの定理 1 >

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x = a$ における微分定数は

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

と書ける。ここで $f(a) = g(a) = 0$ のときは

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

であるから、

| | |
|---|-----------|
| $f(a) = g(a) = 0 \text{ のとき}$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ | (ロピタルの定理) |
|---|-----------|

が成り立つ。

(注) 極限が $\frac{0}{0}$ の形になるときに、分母と分子を微分すればよい。

(実は極限が $\frac{\infty}{\infty}$ の形になるときも同様な定理がなりたつ)

例 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1} = 12$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

問 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} =$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log x - \log 2}{x - 2} =$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - 3(x - 1)}{(x - 1)^2} =$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16 - 32(x - 2) - 24(x - 2)^2}{(x - 2)^3} =$

< ロピタルの定理 2 >

例 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$ を考える。

$x = a$ を代入すると $\frac{0}{0}$ の形になるからロピタルの定理が使える。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\right)'}{\left((x-a)^2\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(f'(x) - f'(a)\right)'}{\left(2(x-a)\right)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2}f''(a)\end{aligned}$$

(注) 2行目の式で $x = a$ を代入すると再び $\frac{0}{0}$ の形になるのでロピタルの定理をもう一度使っている。なお $f(a)$ や $f'(a)$ などの x のつかない項は全て定数と考える。すなわち $f(a) = C$, $f'(a) = K$ (C と K は定数) と考えて
 $(f(a))' = (C)' = 0$
 $(f'(a)(x-a))' = (K(x-a))' = K \times (x-a)' = K \times 1 = K = f'(a)$

問 例のように、ロピタルの定理を何回か使って、次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

< 関数の高次近似 >

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \doteq \frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。よって

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから、これを 2 次近似式という。

例 2 前ページの問題 (1) の結果より

$$x \doteq a \text{ のとき } \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3} \doteq \frac{1}{6}f'''(a)$$

より

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

が成り立つ。これを 3 次近似式という。

問 前ページの問題 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq$$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x), f''(x) = f^{(2)}(x), f'''(x) = f^{(3)}(x), f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、 n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における n 階微分係数という。

例 (1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4, f^{(2)}(x) = 20x^3, f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、 $x = 2$ における 4 階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80, f^{(2)}(2) = 160, f^{(3)}(2) = 240, f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \sin x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(1)}(x), f^{(6)}(x) = f^{(2)}(x), f^{(7)}(x) = f^{(3)}(x), f^{(8)}(x) = f^{(4)}(x)$$

より $x = 0$ における 8 階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 1, f^{(2)}(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = 0, f^{(7)}(0) = -1, f^{(8)}(0) = 0$$

問 (1) $f(x) = e^x$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、 $x = 0$ における 4 階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、 $x = 0$ における n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \cos x$ の 8 階までの導関数 ($f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)$) を求め、 $x = 0$ における 8 階までの微分係数 ($f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)$) を求めよ。

< 関数の n 次近似 >

10 ページの結果から、関数 $f(x)$ の 4 次近似式は

$$f(x) \doteq f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は、順に

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots$$

となるが、この分母の数は、9 ページの計算から、ロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり

$$\left((x-a)^4\right)'''' = \left(4(x-a)^3\right)'''' = \left(12(x-a)^2\right)'''' = \left(24(x-a)\right)' = 24$$

である。つまり $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ であり、上の列を

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2 \times 1}, \frac{1}{3 \times 2 \times 1}, \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}, \dots$$

と考え、階乗の記号 $(n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1)$

を使うと、

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \dots$$

となる。これより、 n 次近似式は

$x \doteq a$ のとき

$$f(x) \doteq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

となる。

例 $f(x) = e^x$ のとき、 $f^{(n)}(x) = e^x$ より、 $f^{(n)}(2) = e^2$ であるから、 $x \doteq 2$ における n 次近似式は

$x \doteq 2$ のとき

$$e^x \doteq e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \dots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

問 $f(x) = e^x$ に対し、 $x \doteq a$ における n 次近似式を求めよ。

< テーラー展開 >

関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f(x) \approx f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。 x が a に十分近くなくても、 n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots$$

を関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開という。

例 $f(x) = e^x$ に対し、 $f^{(n)}(x) = e^x$ 、 $f^{(n)}(2) = e^2$

であるから、 $x = 2$ におけるテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

問 a が以下の場合に $f(x) = e^x$ の $x = a$ におけるテーラー展開を求めよ。

(1) $a = 3$

$$e^x =$$

(2) $a = 0$

$$e^x =$$

< マクローリン展開 >

関数 $f(x)$ の $x = 0$ におけるテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots$$

をマクローリン展開という。

例 $f(x) = \sin x$ のとき、11 ページの例より

$$\begin{aligned} f^{(1)}(0) &= 1, & f^{(2)}(0) &= 0, & f^{(3)}(0) &= -1, & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(0) &= 1, & f^{(6)}(0) &= 0, & f^{(7)}(0) &= -1, & f^{(8)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

で、数列 $\{f^{(n)}(0)\}$ は、 $1, 0, -1, 0$ を 4 項おきに繰り返す。

又、 $f(0) = \sin 0 = 0$ だから、 $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

となる。

問 11 ページの結果を使って、 $f(x) = \cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

< 近似の練習 1 >

問 1 $f(x)$ が以下の場合に、 $x = a$ における一次近似式

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$$

を求め、さらに x と a が以下の場合の $f(x)$ の近似値を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

一次近似式 $x \doteq a$ のとき $\sqrt{x} \doteq$

$x = 4.1, a = 4$ のときの近似値 $\sqrt{4.1} \doteq$

(2) $f(x) = \log x$

一次近似式 $x \doteq a$ のとき $\log x \doteq$

$x = 1.1, a = 1$ のときの近似値 $\log 1.1 \doteq$

問 2 $f(x)$ が以下の場合に、 $x = a$ における二次近似式

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

二次近似式 $x \doteq a$ のとき $\sqrt{x} \doteq$

(2) $f(x) = \log x$

二次近似式 $x \doteq a$ のとき $\log x \doteq$

(3) $f(x) = \cos x$

二次近似式 $x \doteq a$ のとき $\cos x \doteq$

< 近似の練習 2 >

例 1 e^x のマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

より、ネピアの数 e の値を近似したい。 $x = 1$ とおいて 3 次の項までで近似すると

$$e = e^1 \doteq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \doteq 2.66$$

問 1 e をマクローリン展開の 4 次の項までで近似せよ。

例 2 $\cos x$ のマクローリン展開

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \dots$$

より、 $\cos 1$ (1 は角度 1 ラジアン $= \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57.3^\circ$) を近似したい。

$x = 1$ とおいて、4 次の項までで近似すると

$$\cos 1 \doteq 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \doteq 0.54$$

問 2 $\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots$$

より $\sin 1$ を近似したい。 $x = 1$ とおいて 5 次の項までで近似せよ。

< 2 変数関数 >

例 1. たて x_{cm} , よこ y_{cm} の長方形の面積を z_{cm^2} とすると、

$$z = x \times y$$

である。

2. 底面が半径 x_{cm} の円で、高さが y_{cm} の円柱の体積を z_{cm^3} とすると、

$$z = \pi x^2 y$$

である。

一般に 2 つの変数 x と y の値が与えられると、それに応じ、もう一つの変数 z の値が定まるとき、 z を x, y の関数と呼び、1 変数の関数 $y = f(x)$ の場合にならって、

$$z = f(x, y)$$

のように書き表す。 x と y を独立変数、 z を従属変数という。

例 $f(x, y) = \pi x^2 y$ の場合、

$$x = 1, y = 3 \text{ のときの関数の値は } f(1, 3) = \pi \times 1^2 \times 3 = 3\pi$$

$$x = 2, y = 5 \text{ のときの関数の値は } f(2, 5) = \pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$$

問 $f(x, y)$ が以下の場合に、それぞれの関数の値を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$, $f(2, 1) =$

(2) $f(x, y) = \frac{x-3}{y+1}$, $f(5, 7) =$

(3) $f(x, y) = \cos x \log y$, $f(\pi, e) =$

(4) $f(x, y) = x^y$, $f(3, 2) =$

< 偏導関数 1 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ と定数 b に対し、 $y = b$ のとき、 $F(x) = f(x, b)$ とおくと、 $F(x)$ は x の関数である。この導関数 $F'(x)$ を $f_x(x, b)$ と書く、すなわち

$$f_x(x, b) = F'(x) = \frac{d}{dx} f(x, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, b) - f(x, b)}{h}$$

である。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合

$$y = 0 \text{ のとき } f(x, 0) = x^3 \text{ より } f_x(x, 0) = (x^3)' = 3x^2$$

$$y = 1 \text{ のとき } f(x, 1) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4 \text{ より} \\ f_x(x, 1) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y = 2 \text{ のとき } f(x, 2) = x^3 - 6x^2 + 8x - 32 \text{ より} \\ f_x(x, 2) = (x^3 - 6x^2 + 8x - 32)' = 3x^2 - 12x + 8$$

$$\text{一般に } y = b \text{ のとき } f(x, b) = x^3 - 3bx^2 + 2b^2x - 4b^3 \text{ より} \\ f_x(x, b) = (x^3 - 3bx^2 + 2b^2x - 4b^3)' = 3x^2 - 6bx + 2b^2$$

問 2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に $f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2), f(x, b)$ および $f_x(x, 0), f_x(x, 1), f_x(x, 2), f_x(x, b)$ を求めよ。

(1) $f(x, y) = 7 - 2x + xy - 4y$

$$f(x, 0) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 0) =$$

$$f(x, 1) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 1) =$$

$$f(x, 2) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 2) =$$

$$f(x, b) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, b) =$$

(2) $f(x, y) = x^5 - 4x^3y + 5x^2y^2 - 7xy^3$

$$f(x, 0) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 0) =$$

$$f(x, 1) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 1) =$$

$$f(x, 2) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, 2) =$$

$$f(x, b) = \qquad \qquad \qquad f_x(x, b) =$$

< 偏導関数 2 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対して、 $y = b$ のとき、 x の関数 $f(x, b)$ の導関数は

$$f_x(x, b) = \frac{d}{dx}f(x, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, b) - f(x, b)}{h}$$

であった。この関数 $f_x(x, b)$ は定数 b によって変わる。すなわち、これを b の関数とみて、 b を変数 y に変えたもの、すなわち

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

を $f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数という。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合、
 $f(x, b) = x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3$ であるから、
 $f_x(x, b) = (x^3 - 3x^2b + 2xb^2 - 4b^3)' = 3x^2 - 6xb + 2b^2$ より
 $f_x(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^2$ となる。

問 2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に $f(x, b)$, $f_x(x, b)$, $f_x(x, y)$ を求めよ。

(1) $f(x, y) = 3x^2 - 4x + 2xy + 5y^2 - 7y + 6$

$$f(x, b) =$$

$$f_x(x, b) =$$

$$f_x(x, y) =$$

(2) $f(x, y) = x^6 - 7x^5y^3 + 8x^3y^4 - 5xy^5 + y^7$

$$f(x, b) =$$

$$f_x(x, b) =$$

$$f_x(x, y) =$$

< 偏導関数 3 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ と定数 a に対し, $x = a$ のとき, $G(y) = f(a, y)$ とおくと, $G(y)$ は y の関数である。この導関数 $G'(y)$ を $f_y(a, y)$ と書く。すなわち,

$$f_y(a, y) = G'(y) = \frac{d}{dy} f(a, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, y+h) - f(a, y)}{h}$$

である。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合

$$x = 0 \text{ のとき } f(0, y) = -4y^3 \text{ より}$$

$$f_y(0, y) = (-4y^3)' = -12y^2$$

$$x = 1 \text{ のとき } f(1, y) = 1 - 3y + 2y^2 - 4y^3 \text{ より}$$

$$f_y(1, y) = (1 - 3y + 2y^2 - 4y^3)' = -3 + 4y - 12y^2$$

$$x = 2 \text{ のとき } f(2, y) = 8 - 12y + 4y^2 - 4y^3 \text{ より}$$

$$f_y(2, y) = (8 - 12y + 4y^2 - 4y^3)' = -12 + 8y - 12y^2$$

$$x = a \text{ のとき } f(a, y) = a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3 \text{ より}$$

$$f_y(a, y) = (a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3)' = -3a^2 + 4ay - 12y^2$$

問 2変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に, $f(0, y), f(1, y), f(2, y), f(a, y)$ および $f_y(0, y), f_y(1, y), f_y(2, y), f_y(a, y)$ を求めよ。

(1) $f(x, y) = 7 - 2x + xy - 4y$

$$f(0, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(0, y) =$$

$$f(1, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(1, y) =$$

$$f(2, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(2, y) =$$

$$f(a, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(a, y) =$$

(2) $f(x, y) = x^5 - 4x^3y + 5x^2y^2 - 7xy^3$

$$f(0, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(0, y) =$$

$$f(1, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(1, y) =$$

$$f(2, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(2, y) =$$

$$f(a, y) = \qquad \qquad \qquad f_y(a, y) =$$

< 偏導関数 4 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対して, $x = a$ のとき, y の関数 $f(a, y)$ の導関数は

$$f_y(a, y) = \frac{d}{dy}f(a, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, y+h) - f(a, y)}{h}$$

であった。この関数 $f_y(a, y)$ は定数 a によって変わる。すなわち, これを a の関数とみて, a を変数 x に変えたもの, すなわち

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

を $f(x, y)$ の変数 y に関する偏導関数という。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ の場合

$$f(a, y) = a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3 \quad \text{であるから,}$$

$$f_y(a, y) = (a^3 - 3a^2y + 2ay^2 - 4y^3)' = -3a^2 + 4ay - 12y^2 \quad \text{より}$$

$$f_y(x, y) = -3x^2 + 4xy - 12y^2 \quad \text{となる。}$$

問 2変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合に, $f(a, y)$, $f_y(a, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ。

$$(1) \quad f(x, y) = 2x^3 - 5x + 3xy - 3y^2 + 6y - 13$$

$$f(a, y) =$$

$$f_y(a, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^7 - 6x^4y^3 + 5x^2y^5 - 4x^2y + y^6$$

$$f(a, y) =$$

$$f_y(a, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

< 偏微分 1 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めることを、 x について偏微分するという。

偏導関数の定義

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

から、

$$\boxed{x \text{ について偏微分}} = \boxed{y \text{ を定数と考え、} x \text{ だけについて微分する}}$$

といえる。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ のとき

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x^3)' - 3 \times (x^2)' \times y + 2 \times (x)' \times y^2 - 4y^3 \times (1)' \\ &= 3x^2 - 3 \times 2x \times y + 2 \times 1 \times y^2 - 4y^3 \times 0 \\ &= 3x^2 - 6xy + 2y^2 \end{aligned}$$

(注) x について偏微分するとき、 x のつかない項 (y だけの項) は、偏微分すると 0 になる。

問 次の関数を x について偏微分せよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2 - 3x + 4y - 6$

$$f_x(x, y) =$$

(2) $f(x, y) = x^6 - 3x^4y + 6x^3y^2 - 7x^2y^3 + 10xy^4 - 4y^5$

$$f_x(x, y) =$$

(3) $f(x, y) = 3e^x - \cos x \sin y + x \log y + \frac{x}{y}$

$$f_x(x, y) =$$

< 偏微分 2 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、変数 y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ を求めることを、 y について偏微分するという。

偏導関数の定義

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

から、

$$\boxed{y \text{ について偏微分}} = \boxed{x \text{ を定数と考え、} y \text{ だけについて微分する}}$$

といえる。

例 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$ のとき

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^3 \times (1)' - 3x^2 \times (y)' + 2x \times (y^2)' - 4 \times (y^3)' \\ &= x^3 \times 0 - 3x^2 \times 1 + 2x \times 2y - 4 \times 3y^2 \\ &= -3x^2 + 4xy - 12y^2 \end{aligned}$$

(注) y について偏微分するとき、 y のつかない項 (x だけの項) は、偏微分すると 0 になる。

問 次の関数を y について偏微分せよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2 - 3x + 4y - 6$

$$f_y(x, y) =$$

(2) $f(x, y) = x^6 - 3x^4y + 6x^3y^2 - 7x^2y^3 + 10xy^4 - 4y^5$

$$f_y(x, y) =$$

(3) $f(x, y) = 3e^x - \cos x \sin y + x \log y + \frac{x}{y}$

$$f_y(x, y) =$$

< 偏微分 3 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、 x に関する偏導関数を

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

等の記号で表わす (すべて同じ意味である)。ここで記号 ∂ はデルとかラウンドディーなどと呼ばれる。

同様に、 $z = f(x, y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

などの記号で表わす。

(注) 1 変数関数 $y = f(x)$ の微分の場合は $\frac{dy}{dx}$ の記号を使うが、2 変数以上の関数の偏微分の場合は、 $\frac{\partial z}{\partial x}$ のように、 d のかわりに ∂ を用いる。

例

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^n) = 0$$
$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x}(y^n) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y^n) = ny^{n-1}$$
$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos x\right) \times \sin y = -\sin x \sin y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin y) = \cos x \times \left(\frac{\partial}{\partial y} \sin y\right) = \cos x \cos y$$
$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \sqrt{y} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}$$

問 次の偏導関数を求めよ。

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^4 - 5x^3y + 7xy^3), \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^4 - 5x^3y + 7xy^3)$$
$$= \quad =$$
$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \quad, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right) =$$
$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(y^x) = \quad, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y^x) =$$

< 偏微分 4 >

2変数関数 f と 1変数関数 g との合成関数

$$z = g(f(x, y))$$

を偏微分する場合、

$$u = f(x, y) \text{ とおくと、 } z = g(u)$$

より、1変数関数の合成関数の微分と同じように、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ。

例 $z = \sin(x^2 + 3xy)$ の場合、

$$u = x^2 + 3xy \text{ とおくと } z = \sin u$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} = (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (2x + 3y) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times (2x + 3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} = (\sin u)' \times \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy) \\ &= \cos u \times (3x) \\ &= \cos(x^2 + 3xy) \times 3x \end{aligned}$$

問 次の関数を偏微分せよ。

$$(1) z = (3x + 4y)^6, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \quad, \quad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$(2) z = \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \quad, \quad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$(3) z = e^{-x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \quad, \quad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$(4) z = \log(2 - \sin y \cos x), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \quad, \quad \frac{\partial z}{\partial y} =$$

< 偏微分 5 >

偏導関数の記号に慣れる練習をする。

例 (1) $f(x, y) = x^3 - 5xy^2 + y^4$ のとき、

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 5y^2, \quad f_y(x, y) = -10xy + 4y^3$$

(2) $z = e^{x+3y}$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+3y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{x+3y}$$

(3) $z = \log(1 + x^2 + y^4)$ のとき、

$$z_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^4}, \quad z_y = \frac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}$$

問 以下の偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^3 - 5x^2y + 6xy^4 - 5y^6$ のとき、

$$f_x(x, y) = \quad , f_y(x, y) =$$

(2) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ のとき、

$$f_x(x, y) = \quad , f_y(x, y) =$$

(3) $z = \frac{1}{x^2 - 2xy}$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \quad , \frac{\partial z}{\partial y} =$$

(4) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$ のとき、

$$z_x = \quad , z_y =$$

(5) $z = e^{-x^2+xy}$ のとき、

$$z_x = \quad , z_y =$$

< 2階偏導関数 1 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ を x に関して 2回偏微分したもの、すなわち $f_x(x, y)$ の x に関する偏導関数を

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} z \right) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (f_x(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x, y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f(x, y)$$

等の記号で表し、 x に関する 2階偏導関数という。全て同じ意味である

同様に、 $z = f(x, y)$ を y に関して 2回偏微分したもの、すなわち $f_y(x, y)$ の y に関する偏導関数を

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} z \right) = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (f_y(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (f(x, y)) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y)$$

等の記号で表し、 y に関する 2階偏導関数という。全て同じ意味である

例 (1) $f(x, y) = x^5 - 4x^3y^2 + 2xy^3 - y^6$ のとき

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 5x^4 - 12x^2y^2 + 2y^3 & , & \quad f_y(x, y) = -8x^3y + 6xy^2 - 6y^5 \\ \text{より} & & & \\ f_{xx}(x, y) &= 20x^3 - 24xy^2 & , & \quad f_{yy}(x, y) = -8x^3 + 12xy - 30y^4 \end{aligned}$$

(2) $z = \sin(2x + 3y)$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2 \cos(2x + 3y) & , & \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y) \\ \text{より} & & & \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -4 \sin(2x + 3y) & , & \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9 \sin(2x + 3y) \end{aligned}$$

問 2変数関数が以下の場合に、次の 2階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3$

$$f_{xx}(x, y) = \quad , \quad f_{yy}(x, y) =$$

(2) $z = \sin(2x) \cos(3y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

< 2階偏導関数 2 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、 x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ をさらに y に関して偏微分したものを

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (f_x(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

等の記号で表す。同様に、 $z = f(x, y)$ の y に関する偏導関数

$f_y(x, y)$ をさらに x に関して偏微分したものを

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (f_y(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (f(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

等の記号で表す。

(注) $z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ の x のように、 z (又は f) に近い方の変数が先に偏微分する変数である。

例 (1) $f(x, y) = x^6 - 5x^4y + 3x^2y^3 - 5y^4$ のとき

$$f_x(x, y) = 6x^5 - 20x^3y + 6xy^3$$

$$\text{よ} \text{り} \quad f_{xy}(x, y) = -20x^3 + 18xy^2$$

$$f_y(x, y) = -5x^4 + 9x^2y^2 - 20y^3$$

$$\text{よ} \text{り} \quad f_{yx}(x, y) = -20x^3 + 18xy^2$$

(2) $z = \log(x^2 + 3y^2)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 3y^2} \quad \text{よ} \text{り} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y}{x^2 + 3y^2} \quad \text{よ} \text{り} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

(注) $f_{xy}(x, y)$ と $f_{yx}(x, y)$ が連続の場合には、両者は等しい。

問 2変数関数が以下の場合に、次の2階偏導関数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^5 - 6x^3y + 8xy^3 + 4y^5$

$$f_{xy}(x, y) = \quad , \quad f_{yx}(x, y) =$$

(2) $z = \sin(3x + 2y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

< 偏微分係数 >

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_x(a, b)$ を、点 (a, b) における x に関する偏微分係数という。偏導関数の定義より

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

である。同様に y に関する偏導関数 $f_y(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ のときの値 $f_y(a, b)$ を、点 (a, b) における y に関する偏微分係数という。偏導関数の定義より

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

となる。

例 $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3$ のとき

$$f_x(x, y) = 2x - 4y, \quad f_y(x, y) = -4x + 3y^2$$

より $(x, y) = (1, 3)$ における偏微分係数は、

$$f_x(1, 3) = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10, \quad f_y(1, 3) = -4 \times 1 + 3 \times 3^2 = 23$$

である。

問 2 変数関数が以下の場合に偏導関数および偏微分係数を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 - 4y^3$

$$f_x(x, y) = \quad, \quad f_y(x, y) =$$

$$f_x(2, 1) = \quad, \quad f_y(2, 1) =$$

(2) $f(x, y) = \cos x \sin y$

$$f_x(x, y) = \quad, \quad f_y(x, y) =$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \quad, \quad f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) =$$

(3) $f(x, y) = x^2 \log y$

$$f_x(x, y) = \quad, \quad f_y(x, y) =$$

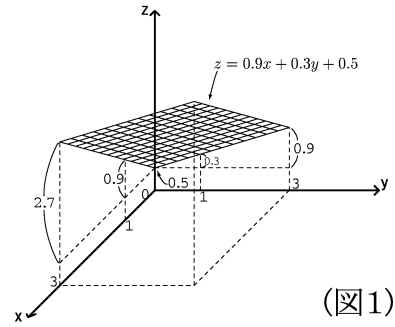
$$f_x(1, e) = \quad, \quad f_y(1, e) =$$

< 2変数関数のグラフ >

2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。
とくに $f(x, y)$ が x と y の一次式の場合は
平面を表す。

例1 $f(x, y) = 0.9x + 0.3y + 0.5$
の場合、 $z = f(x, y)$ のグラフは図1のように

x 軸方向の傾きが 0.9
 y 軸方向の傾きが 0.3
 z 切片が 0.5



(図1)

の平面を表す。

問1 $f(x, y)$ が以下の場合に、 $z = f(x, y)$ の表す平面について、
 x 軸方向の傾き、 y 軸方向の傾き、 z 切片を答えよ。

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ | (2) $f(x, y) = mx + ny + k$ |
| x 軸方向の傾き = | x 軸方向の傾き = |
| y 軸方向の傾き = | y 軸方向の傾き = |
| z 切片 = | z 切片 = |

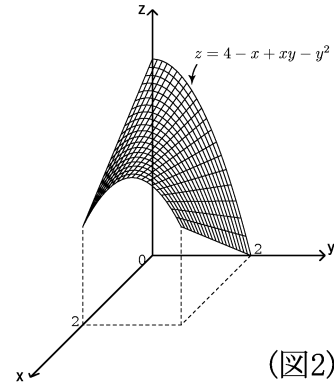
例 2 変数関数 $z = f(x, y)$ が

$$f(x, y) = 4 - x + xy - y^2$$

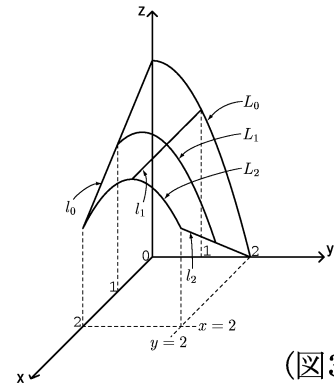
の場合、 $z = f(x, y)$ のグラフは図2の
ような場合である。

この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲
線 L_a とし、又平面 $y = b$ との共通部分
を曲線 l_b とする。(図3)

- (1) $x = 0$ のとき、 $f(0, y) = 4 - y^2$ より
曲線 L_0 の方程式は
 $x = 0, z = 4 - y^2$ である。
- (2) $x = 1$ のとき、 $f(1, y) = 3 + y - y^2$ より
曲線 L_1 の方程式は
 $x = 1, z = 3 + y - y^2$ である。
- (3) $y = 0$ のとき、 $f(x, 0) = 4 - x$ より
曲線 l_0 の方程式は
 $y = 0, z = 4 - x$ となり、
直線であることがわかる。



(図2)



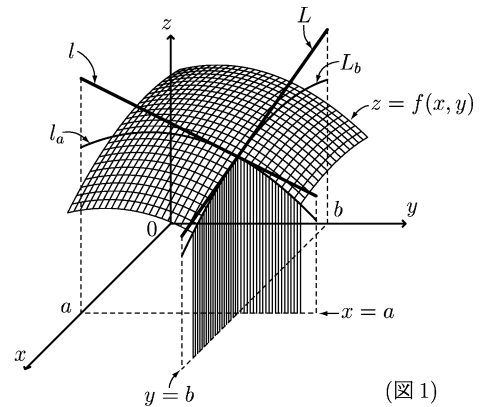
(図3)

問2 例2の場合に曲線 l_1, l_2, L_2 の方程式を求めよ。

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| (1) l_1 の方程式 | (2) l_2 の方程式 | (3) L_2 の方程式 |
| $y =$ | $y =$ | $x =$ |
| $z =$ | $z =$ | $z =$ |

＜ 偏微分係数の幾何学的意味 ＞

2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面と平面 $y = b$ との共通部分を曲線 L_b とする (図1)。曲線 L_b を xz 平面の方から見ると、図2のような曲面になる。このとき、この曲線 $z = f(x, b)$ の $x = a$ における接線 L の傾きが $f_x(a, b)$ である。

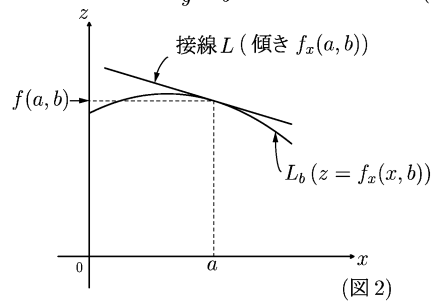


$f_x(a, b) = \text{接線 } L \text{ の傾き}$

接線 L の方程式

$y = b, \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$

つまり $f_x(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における x 軸方向の傾きを意味する。



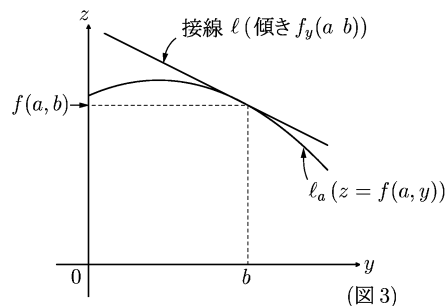
同様にして、この曲面と平面 $x = a$ との共通部分を曲線 l_a とする (図1)。 l_a のグラフは図3のような曲線である。この曲線 $z = f(a, y)$ の $y = b$ における接線 l の傾きが $f_y(a, b)$ である。

$f_y(a, b) = \text{接線 } l \text{ の傾き}$

接線 l の方程式

$x = a, \quad z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$

つまり $f_y(a, b)$ は曲面 $z = f(x, y)$ の点 (a, b) における y 軸方向の傾きを意味する。



問 $f(x, y) = x^2 - 2x + 4xy - y^2 + 6$, $(a, b) = (3, 2)$ のとき、 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f(a, b)$, $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ を求め、接線 L と l の方程式を求めよ。

$f_x(x, y) =$

$f_y(x, y) =$

$f(3, 2) =$

$f_x(3, 2) =$

$f_y(3, 2) =$

接線 L の方程式

$y = 2$

$z =$

接線 l の方程式

$x = 3$

$z =$

< 接平面 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面に接する平面を接平面という。

接点が $(a, b, f(a, b))$ であるとき、この接平面は x 軸方向の接線 L と y 軸方向の接線 l を含む。それぞれの方程式は

$$L: y = b, \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f(a, b)$$

$$l: x = a, \quad z = f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

である。今接平面の方程式を

$$z = mx + ny + k$$

とおくと、

(1) x 軸方向の傾き $= m = f_x(a, b)$

(2) y 軸方向の傾き $= n = f_y(a, b)$

であり、 $(x, y) = (a, b)$ のとき $z = f(a, b)$ より

$$f(a, b) = ma + nb + k$$

であるから

(3) z 切片 $= k = f(a, b) - ma - nb$

となる。(1), (2), (3) より接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \quad (\text{接平面の方程式})$$

となる。

例題 $f(x, y) = x^2 - xy$ のとき $(x, y) = (3, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

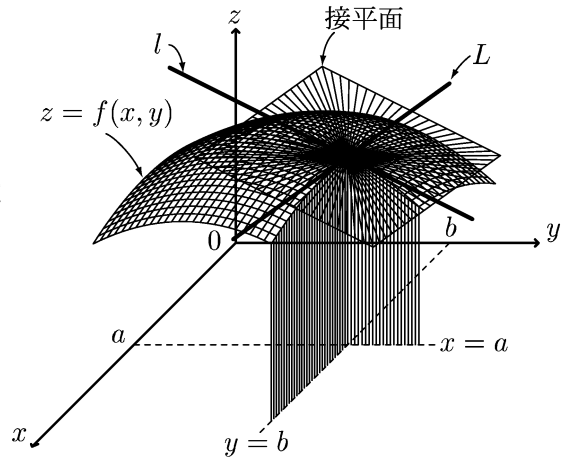
(解) $f_x(x, y) = 2x - y, \quad f_y(x, y) = -x$ より

$$f_x(3, 1) = 5, \quad f_y(3, 1) = -3, \quad f(3, 1) = 6$$

だから接平面の方程式は

$$z = 5(x - 3) - 3(y - 1) + 6 \quad \text{より} \quad \underline{\underline{(\text{答}) } z = 5x - 3y - 6}$$

問 $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - 2y^2$ のとき、 $(x, y) = (1, 2)$ における接平面の方程式を求めよ。



< 2変数関数の一次近似 >

1変数関数の一次近似式は曲線を接線で近似した。この考え方を2変数関数 $z = f(x, y)$ の場合にも適応する。2変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは曲面を表す。この曲面の $(x, y) = (a, b)$ における接平面の方程式は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

である。曲面 $z = f(x, y)$ は、 $(x, y) = (a, b)$ の近くでは接平面によって近似できるから、

$$(x, y) \doteq (a, b) \text{ のとき } f(x, y) \doteq f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \quad (*)$$

がなりたつ。この式を $f(x, y)$ の一次近似式という。

$$x - a = \Delta x, \quad y - b = \Delta y$$

とおくと、この近似式は

$$\begin{array}{l} \Delta x \doteq 0 \\ \Delta y \doteq 0 \end{array} \text{ のとき } f(a + \Delta x, b + \Delta y) \doteq f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + f(a, b) \quad (**)$$

となる。この式も一次近似式という。

例題 $f(x, y) = \sin x \log y$ のとき $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(解) $f_x(x, y) = \cos x \log y$, $f_y(x, y) = \frac{\sin x}{y}$ より $(**)$ 式は

$$(答) \quad \sin(a + \Delta x) \log(b + \Delta y) \doteq (\cos a \log b)\Delta x + \left(\frac{\sin a}{b}\right)\Delta y + \sin a \log b$$

問 $f(x, y)$ が以下の場合に $(**)$ の形の一次近似式を求めよ。

(1) $f(x, y) = x^4 y^5$, $(a + \Delta x)^4 (b + \Delta y)^5 \doteq$

(2) $f(x, y) = (\sin x)\sqrt{y}$, $\sin(a + \Delta x)\sqrt{b + \Delta y} \doteq$

(3) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $\frac{a + \Delta x}{b + \Delta y} \doteq$

< 2変数合成関数の微分 1 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、 x と y が t の関数

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

である場合は

$$z = f(x(t), y(t))$$

は t の関数である。そこで t に関する導関数

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t}$$

を求めたい。そこで

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

とおくと

$$x(t + \Delta t) = x + \Delta x, \quad y(t + \Delta t) = y + \Delta y$$

となるから

$$\frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x, y)}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t}$$

となる。ここで前ページの一次近似式 (**) で $(a, b) = (x, y)$ とおくと

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} \doteq f_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

で近似できる。よって

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ f_x(x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y) \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\}$$

が成り立つ。

問 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dy}{dt}$

を利用して、 $\frac{d}{dt}f(x(t), y(t))$ を $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ で表せ。

< 2変数合成関数の微分 2 >

2変数合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ の変数 t に関する導関数は前ページの結果より

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

となる。ここで

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

より

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}}$$

が成り立つ。

例題 2変数関数 $f(x, y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt}f(1+2t, 4+3t) \qquad (2) \frac{d}{d\theta}f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(解) (1) $x = 1 + 2t, y = 4 + 3t, z = f(x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(1+2t, 4+3t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt} \\ &= f_x(x, y) \times 2 + f_y(x, y) \times 3 \\ &= 2f_x(1+2t, 4+3t) + 3f_y(1+2t, 4+3t) \end{aligned}$$

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = f(x, y)$ とおくと、 θ に関する微分だから、 r を定数とみて

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{d\theta} \\ &= f_x(x, y) \times (-r \sin \theta) + f_y(x, y) \times (r \cos \theta) \\ &= -r \sin \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

問 2変数関数 $f(x, y)$ に対し、次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt}f(2-3t, 4-5t) \qquad (2) \frac{d}{dr}f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

=

=

< 全微分 >

x と y の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、 x と y が t の関数のときは、前ページより

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

がなりたつ。ここで形式的に両辺に dt をかけると

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy} \cdot \cdot \cdot \cdot (*)$$

となる。 $(*)$ 式の右辺を、 x と y の 2 変数関数 z の全微分という。 Δz を z の増分というのに対し、 dz を z の微小増分又は無限小増分という。

例 1 $z = x^2 y^3$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2$$

より z の全微分は

$$\underline{dz = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy}$$

問 1 z が以下の場合に、 z の全微分を求めよ。

(1) $z = x^2 + 3xy$

$dz =$

(2) $z = x^2 \cos y$

$dz =$

x が変数 u と v の 2 変数関数 $x = x(u, v)$ である場合は $(*)$ と同様に

$$\boxed{dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv} \cdot \cdot \cdot \cdot (**)$$

を、 u と v の 2 変数関数 x の全微分という。

例 2 $x = u^5(2 + v^3)$ のとき

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 5u^4(2 + v^3), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 3u^5 v^2$$

より x の全微分は

$$\underline{dx = 5u^4(2 + v^3) du + 3u^5 v^2 dv}$$

問 2 x と y が以下の場合、変数 u と v に関する全微分を求めよ。

(1) $x = 2u + 3v$

$dx =$

(2) $y = 4u + 5v$

$dy =$

<ヤコビアン>

x と y がともに変数 u と v の 2 変数関数

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

である場合、 x と y の全微分は、前ページより

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$$

となる。これを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

となる。(2) は u と v の微小増分の組 (du, dv) を x と y の微小増分の組 (dx, dy) に移す変換と考えられる。この変換行列をヤコビ行列 (*Jacob* 行列) といい、その行列式を

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

で表し、関数 (1) の関数行列式またはヤコビアン (*Jacobian*) という。

例 u と v の関数 x, y が

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = 4u + 5v \end{cases}$$

のときヤコビアンは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$$

問 x と y が以下の場合にヤコビアンを求めよ。

$$(1) \begin{cases} x = 5u + v \\ y = 3u + 2v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$(2) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

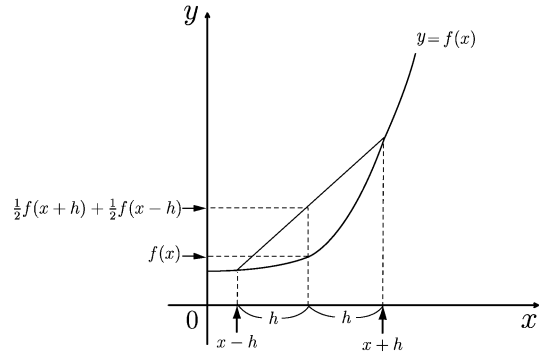
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

< ラプラシアン 1 >

1 変数関数 $f(x)$ と正の定数 h に対し

$$\frac{2}{h^2} \left\{ \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h) - f(x) \right\}$$

の値は $f(x)$ が凹ならばプラスであり、
凸ならばマイナスである。 $h \rightarrow 0$ の極限は
ロピタルの定理より



$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h) - f(x) \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial h} \{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\}}{\frac{\partial}{\partial h} (h^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial h} \{f'(x+h) - f'(x-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h} (2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x) \end{aligned}$$

となる。よって2階導関数 $f''(x)$ がプラスならば $f(x)$ は凹であり、 $f''(x)$ がマイナスならば $f(x)$ は凸である。

2 変数関数 $f(x, y)$ に対しても同様な極限

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) + f(x - \Delta x, y) - 2f(x, y)}{(\Delta x)^2} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) + f(x, y - \Delta y) - 2f(x, y)}{(\Delta y)^2} \\ = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) \end{aligned}}$$

が成立する。この極限の関数を $f(x, y)$ のラプラシアンといい

$$\boxed{\Delta f(x, y) = f_{xx} + f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)} \quad (\text{ラプラシアン})$$

という記号で表す。

例 $f(x, y) = x^3 + xy^2$ のとき

$$f_x = 3x^2 + y^2, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_y = 2xy, \quad f_{yy} = 2x$$

$$\text{より } \Delta f(x, y) = f_{xx} + f_{yy} = 6x + 2x = 8x$$

問 2 変数関数 $f(x, y)$ が以下の場合にラプラシアン $\Delta f(x, y)$ を求めよ。

(1) $f(x, y) = 2x^2y + 4y^3$

$$\Delta f(x, y) =$$

(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

$$\Delta f(x, y)$$

< ラプラシアン 2 >

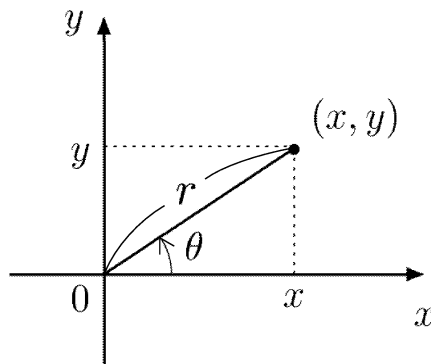
座標平面上の点 (x, y) を極座標で表すと

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

となる。ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



である。2変数関数 $z = f(x, y)$ を極座標で表すと

$$z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

となる。35ページの結果より

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -(r \sin \theta) f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + (r \cos \theta) f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (\cos \theta) f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + (\sin \theta) f_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -(r \cos \theta) f_x + (r^2 \sin^2 \theta) f_{xx} - (r^2 \sin \theta \cos \theta) f_{xy} \\ &\quad - (r \sin \theta) f_y - (r^2 \cos \theta \sin \theta) f_{yx} + (r^2 \cos^2 \theta) f_{yy} \\ &= r^2 \left((\sin^2 \theta) f_{xx} - 2(\sin \theta \cos \theta) f_{xy} + (\cos^2 \theta) f_{yy} \right) - r \left((\cos \theta) f_x + (\sin \theta) f_y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= (\cos^2 \theta) f_{xx} + (\cos \theta \sin \theta) f_{xy} + (\sin \theta \cos \theta) f_{yx} + (\sin^2 \theta) f_{yy} \\ &= (\cos^2 \theta) f_{xx} + 2(\sin \theta \cos \theta) f_{xy} + (\sin^2 \theta) f_{yy} \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$$

となる。従って $z = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ のラプラシアンは

$$\Delta z (= f_{xx} + f_{yy}) = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (\text{ラプラシアンの極座標表示})$$

と表される。これをラプラシアンの極座標表示という。

< ラプラシアン 3 >

2変数関数 $z = f(x, y)$ が $\sqrt{x^2 + y^2}$ や $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ などの関数になっている場合は

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (*)}$$

とおくと

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

の極座標で表せるので、前のページの公式

$$\boxed{\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r}$$

を使う。

例 1 $z = \log(x^2 + y^2)$ のとき $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ とおくと

$$z = \log(r^2) = 2 \log r$$

となる。このとき

$$z_r = \frac{2}{r}, \quad z_{rr} = -\frac{2}{r^2}, \quad z_\theta = 0, \quad z_{\theta\theta} = 0$$

より

$$\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r = -\frac{2}{r^2} + 0 + \frac{1}{r} \times \left(\frac{2}{r}\right) = 0$$

例 2 $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ のとき (*) の変換により

$$z = \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

となる。このとき

$$z_r = 0, \quad z_{rr} = 0, \quad z_\theta = -4 \sin \theta \cos \theta, \quad z_{\theta\theta} = -4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta$$

より

$$\Delta z = \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} (-4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = \frac{-4x^2 + 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

問 2変数関数 z が以下の場合に、ラプラシアン Δz を求めよ。

(1) $z = e^{-x^2 - y^2}$

(2) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$