高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

秋期入学者用

Ⅲ

内容

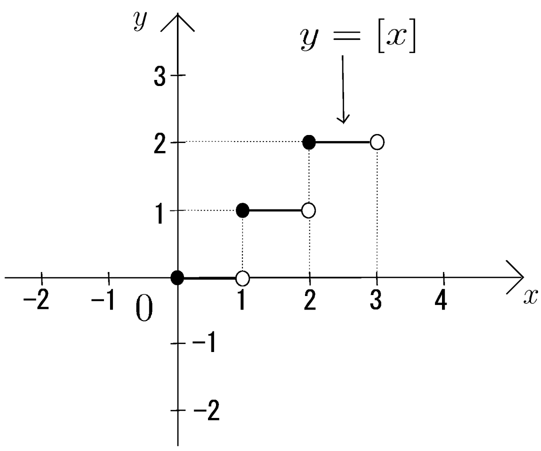
◎ 関数の増減

◎ 左極限･右極限

◎ 三角関数の微分

◎ 指数･対数関数の微分

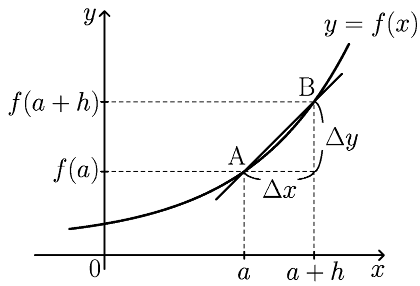
◎ 合成関数の微分



電子・光システム工学科

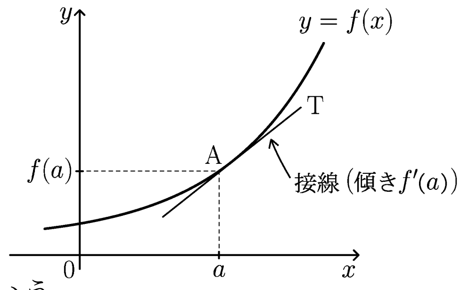
井上 昌昭 著

＜接線の傾き＞



微分係数の意味を関数のグラフについて考えてみる。
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に、x 座標が、それぞれ、a , $a+h$ である 2 点 A , B をとると、$y=f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は、直線 AB の傾きを表す。ここで h を 0 に近づけると、

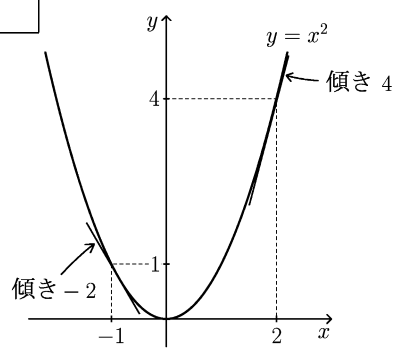
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$$
$$=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\longrightarrow f'(a)\quad (h\to 0\text{ のとき})$$



であるから、直線 AB は、傾きが $f'(a)$ であるような直線 AT に限りなく近づいていく。この直線 AT を点 A における曲線 $y=f(x)$ の**接線**といい、点 A を**接点**という。

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は、この関数のグラフ上の点 $\big(a\ ,\ f(a)\big)$ における接線の傾きである。

例 関数 $f(x)=x^2$ の微分係数は $f'(a)=2a$ であるから、
点 $(2\ ,\ 4)$ における接線の傾きは $f'(2)=2\times 2=4$
点 $(-1\ ,\ 1)$ における接線の傾きは $f'(-1)=2\times(-1)=-2$
である。



問 関数 $f(x)=3x^2$, $g(x)=2x^3$ に対して、次の問に答えよ。

(1) 微分係数 $f'(a)$, $g'(a)$ を求めよ。

$f'(a)=$ 　　　　　　　　　　　　, $g'(a)=$

(2) $x=-1$, 1 のとき、$f(x)$, $g(x)$ のとりうる座標と、その座標における接線の傾きを求めよ。

＜導関数１＞

例１ 関数 $f(x)=x^2-5x$ に対し、$f(a)=a^2-5a$ であるから微分係数 $f'(a)$ は、

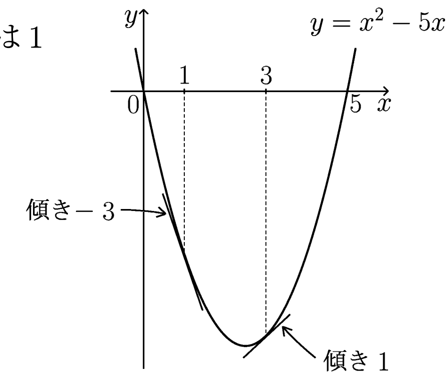
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\big((a+h)^2-5(a+h)\big)-(a^2-5a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2a-5+h)=2a-5$$

となる。$f'(a)=2a-5$ は $x=a$ における接線の傾きを意味する。
たとえば

$f'(1)=2\times 1-5=-3$ より $x=1$ における接線の傾きは -3

$f'(3)=2\times 3-5=1$ より $x=3$ における接線の傾きは 1



である。$f'(a)=2a-5$ は、a をいろいろな値をとる変数とみれば、a の関数になっている。

そこで、$f'(a)=2a-5$ の a を x でおきかえた

$$f'(x)=2x-5$$

を、関数 $f(x)=x^2-5x$ の**導関数**という。

一般に関数 $f(x)$ に対して、$x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を a の関数とみて、a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad \big(f(x)\text{ の導関数}\big)$$

を、関数 $f(x)$ の導関数という。

例２ $f(x)=x^2-3x+2$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\big((x+h)^2-3(x+h)+2\big)-(x^2-3x+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)=2x-3$$

問 $f(x)=2x^2-x$ の導関数を求めよ。

＜導関数2＞

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **について微分する**、あるいは、単に**微分する**という。

例題　関数 $f(x) = x^3$ を微分せよ。

(解)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

ここで $h \to 0$ のとき $3xh \to 0$ 、 $h^2 \to 0$ だから

$$f'(x) = 3x^2$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $f(x) = x, \quad f'(x) =$

(2) $f(x) = x^2, \quad f'(x) =$

(3) $f(x) = 1, \quad f'(x) =$

＜パスカルの三角形＞

例 $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

問1　次の展開式を求めたい。$\boxed{}$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$=\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4$

(2) $(a\ +\ b)^5=(a\ +\ b)\left(\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4\right)$

$=\boxed{}\times a^5+\boxed{}\times a^4b+\boxed{}\times a^3b^2+\boxed{}\times a^2b^3+\boxed{}\times ab^4+\boxed{}\times b^5$

問2　$(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。以下の $\boxed{}$ の中に適当な数字を入れよ。

$(a+b)^0=1\cdots\cdots$ 1

$(a+b)^1=1\times a+1\times b\cdots\cdots$ 1　1

$(a+b)^2=1\times a^2+2\times ab+1\times b^2\cdots\cdots$ 1　2　1

$(a+b)^3=1\times a^3+3\times a^2b+3\times ab^2+1\times b^3\cdots\cdots$ 1　3　3　1

$(a+b)^4=\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4\cdots\cdots$ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

$(a+b)^5=\boxed{}\times a^5+\boxed{}\times a^4b+\boxed{}\times a^3b^2+\boxed{}\times a^2b^3+\boxed{}\times ab^4+\boxed{}\times b^5$ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a+b)^6=\boxed{}\times a^6+\boxed{}\times a^5b+\boxed{}\times a^4b^2+\boxed{}\times a^3b^3+\boxed{}\times a^2b^4+\boxed{}\times ab^5+\boxed{}\times b^6$

<導関数3>

例 $f(x)=x^4$ を微分したい。4 乗の展開式

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

を使うと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

問 1 $f(x)=x^5$ を微分せよ。

問 2 $f(x)=x^6$ を微分せよ。

＜導関数4＞

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を y' や記号 $\dfrac{dy}{dx}$ で表すこともある。

例えば、 $f(x)=x^2$ のとき、 $f'(x)=2x$ だから、

$$y=x^2 \text{ の導関数は } y'=2x$$

と表すこともある。これを更に略して、

$$\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$$

と記す。

問1 表を完成し、右の $\boxed{\quad\quad}$ に適当な文字を入れよ。

y	x	x^2	x^3	x^4
y'		$2x$		

$$(x)' = \boxed{\quad\quad}$$

$$\left(x^3\right)' = \boxed{\quad\quad}$$

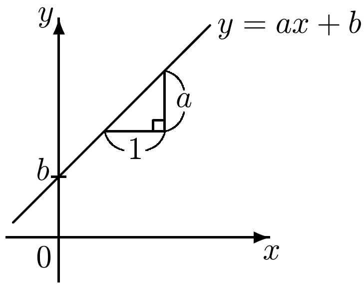
$$\left(x^4\right)' = \boxed{\quad\quad}$$

問2 上の問から、一般に $y=x^n$ の導関数を類推せよ。

$\left(x^n\right)' =$

問3 傾き a、切片 b の直線 $y=ax+b$ に対し、

導関数 y' を求めたい。$f(x)=ax+b$ とおくと、



$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

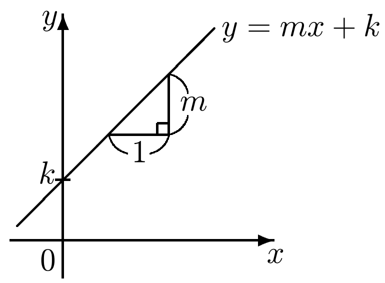
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$

である。この計算を完成し、y' を求め、

y' は元の直線の何を意味するか答えよ。

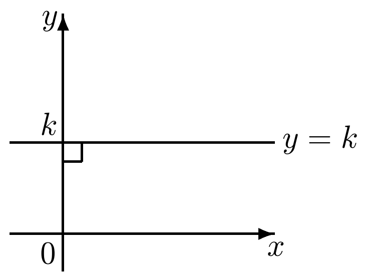
(解) $y'=$

＜導関数5＞



問1 関数 $y = mx + k$ 　(m と k は定数)
のグラフは、傾き m 、切片 k の直線を表す。
これを微分せよ。

(解) $(mx + k)' =$



問2 関数 $y = k$ 　(k は定数) のグラフは、
傾き 0 (ゼロ) の直線を表す。
これを微分せよ。

(解) $(k)' =$

例 関数 $y = x^3$ の導関数は $y' = 3x^2$ である。つまり

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

である。これを利用して、 $5x^3$ を微分する。

$$\left(5x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^3 - 5x^3}{h} = \lim_{h \to 0} 5 \times \left\{ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right\}$$

$$= 5 \times \left(x^3\right)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

同様にして、 $7x^3$ を微分する。

$$\underline{\left(7x^3\right)' = 7 \times \left(x^3\right)' = 7 \times 3x^2 = 21x^2}$$

問3 $\left(x^3\right)' = 3x^2$ を利用して kx^3 (k は定数) を微分せよ。

(解) $\left(kx^3\right)' =$

問4 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を利用して、kx^n (k は定数) を微分せよ。

(解) $\left(kx^n\right)' =$

問5 $\{f(x)\}' = f'(x)$ を利用して、$kf(x)$ (k は定数) を微分せよ。

(解) $\left\{kf(x)\right\}' =$

＜導関数6＞

例 $\left(x^2\right)' = 2x$、$\left(x^3\right)' = 3x^2$、すなわち

$$\left(x^2\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

を利用して $x^2 + x^3$ を微分する。

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x^3\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{(x+h)^2 + (x+h)^3\right\} - \left\{x^2 + x^3\right\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right\} \\ &= \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 2x + 3x^2\end{aligned}$$

同様に

$$\underline{\left(x^2 - x^3\right)' = \left(x^2\right)' - \left(x^3\right)' = 2x - 3x^2}$$

問1 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $(k)' = 0$ (k は定数) を利用して、次の関数を微分せよ。

(1) $\left(x^3 - 2\right)' =$

(2) $\left(x^4 + 2x^5\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}x^2 - x + 2\right)' =$

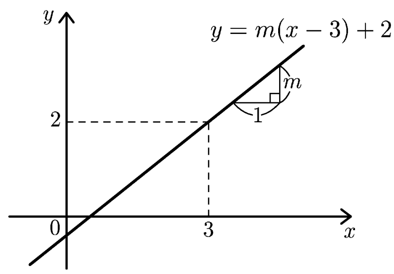
(4) $\left(x^n - x^{n+1} + k\right)' =$

問2 一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して、次の式を $f'(x)$ と $g'(x)$ の式で表せ。

(1) $\left\{f(x) + g(x)\right\}' =$

(2) $\left\{f(x) - g(x)\right\}' =$

＜接線の方程式＞

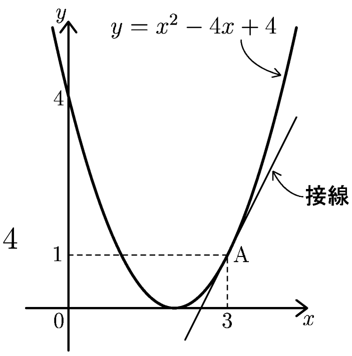


例 1 m を定数とする関数

$$y = m(x-3)+2$$

は、$x=3$ のとき $y=2$ であるから、
点 $(3,2)$ を通り、傾き m の直線の方程式を意味する。

問 1 a,b,m を定数とする。**点 (a,b) を通り、傾き m の直線**の方程式を求めよ。
(答)



例 2 関数 $y = x^2-4x+4$ のグラフ上の点 A$(3,1)$
における接線の方程式を求めたい。
$f(x) = x^2-4x+4$ とおくと、接線の傾き m は
$x=3$ における微分係数 $f'(3)$ である。

$$f'(x) = (x^2-4x+4)' = \underbrace{(x^2)'}_{2x} - 4\times\underbrace{(x)'}_{1} + \underbrace{(4)'}_{0} = 2x-4$$

より

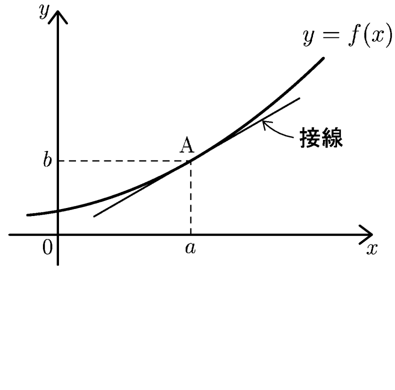
$$f'(3) = 2\times 3-4 = 2$$

となる。点 A$(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y=m(x-3)+1$ だから

$$y = 2(x-3)+1 = 2x-5$$

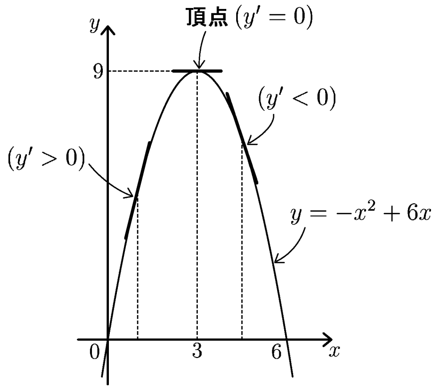
より、接線の方程式は $\boldsymbol{y=2x-5}$ となる。

問 2 $y = x-x^2$ 上の点 A$(1,0)$ における接線の方程式を求めよ。



問 3 一般の関数 $y=f(x)$ のグラフ上の
点 A(a,b) における接線の傾きは $f'(a)$
である。接線の方程式を求めよ。

<関数の増減1>



例 2次関数 $y=-x^2+6x$ の導関数は

$$y'=-2x+6=-2(x-3)$$

となる。x の範囲によって y' のプラス、マイナスを場合分けする。

(1) $y'=0$ となる x の値は $\underline{x=3}$ である。
このとき、$x=3$ における接線の傾き y' は 0(ゼロ) である。すなわち、2次関数の頂点を意味する。
$x=3$ のとき $y=9$ より、頂点の座標は $(3,9)$ である。

(2) $y'>0$ となる x の範囲は $\underline{x<3}$ である。
このとき、接線の傾き y' はプラスであるから、グラフは右上がり (↗) になる。y の値は (x の増加とともに) **増加**する。

(3) $y'<0$ となる x の範囲は $\underline{x>3}$ である。
このとき、接線の傾き y' はマイナスであるから、グラフは右下がり (↘) になる。y の値は (x の増加とともに) **減少**する。

以上 (1),(2),(3) をまとめて、右の表にした。
このような表を**増減表**という。増減表を作れば、グラフのだいたいの様子がわかる。
2次関数の場合は、頂点の座標がわかる。
この場合の頂点の座標は $(3,9)$ である。

x	$x<3$	3	$3<x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	9	↘

問 次の2次関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y=-2x^2-4x+5$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

頂点 (　　,　　)

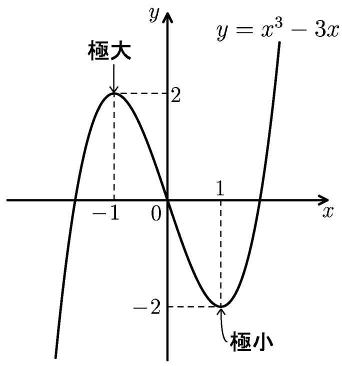
(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

頂点 (　　,　　)

＜関数の増減2＞



例 関数 $y = x^3 - 3x$ の導関数は

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

となる。この関数の増減表を以下のようにして作る。

(1) $y' = 0$ となる x の値は $x = \pm 1$ である。
そこで $x = 1$ と $x = -1$ で範囲を分ける。

(2) $x > 1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = 2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

(3) $-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
(たとえば $x = 0$ のとき $y' = -3 < 0$ であるから)

(4) $x < -1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = -2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

$(-1 < x < 1)$
$(x < -1)$ $(1 < x)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

右の増減表で、x の範囲は省略した。このように書く時は常に右の方が x の値の大きい範囲であると約束することにする。この表をもとにグラフを描くと、上図のようになる。

(ア) $x = -1$ の近くでは、$x = -1$ のとき y は最大になる。
このような場合 **極大** といい $x = -1$ のとき極大値 $y = 2$ と書く。

(イ) $x = 1$ の近くでは、$x = 1$ のとき y は最小になる。
このような場合 **極小** といい $x = 1$ のとき極小値 $y = -2$ と書く。

(注) 極大値と極小値とをあわせて、**極値**という。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = 2 - 3x + x^3$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$
$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

(2) $y = 9x + 3x^2 - x^3$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$
$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

＜最大最小 1＞

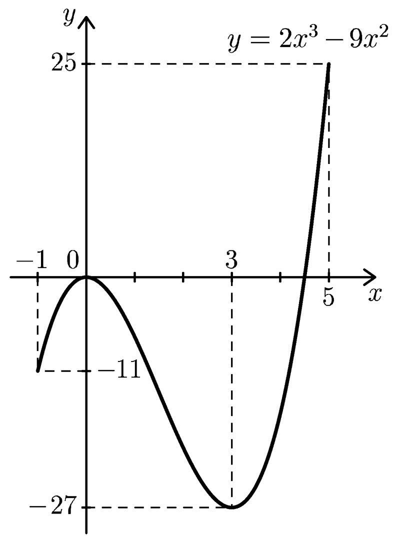
例題 次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq 5\right)$$

(解) $y' = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$

より $-1 \leqq x \leqq 5$ における増減表は
次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25



よって、この関数は

$x = 5$ のとき、最大値 $y = 25$ をとり、

$x = 3$ のとき、最小値 $y = -27$ をとる。

(注) $x = 0$ のとき、極大であるが最大ではない。
$x = 3$ のときは極小かつ最小になっている。
最大や最小は定義域によって違ってくる。

問 次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、
最大値と最小値を求めよ。

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq 2\right)$$

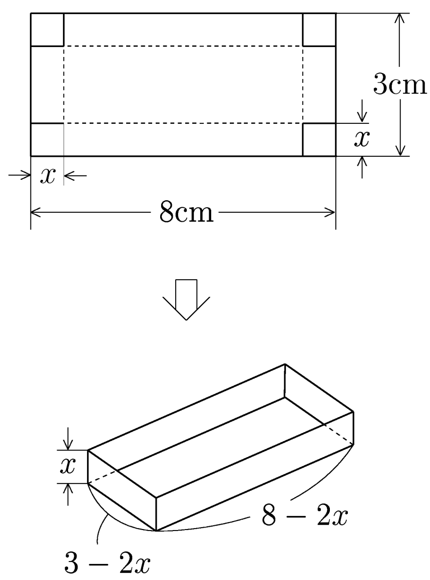
(解)

x	-1		2
y'			
y			

(答) $x =$ 　　のとき最大値 $y =$
$x =$ 　　のとき最小値 $y =$

＜最大最小 2＞

例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 $x$cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解) 容器のたては $3-2x$(cm), よこは $8-2x$(cm), 高さは x(cm) だから、容積 y(cm^3) は

$$y = (3-2x)(8-2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

である。題意より $x > 0$ でしかも $2x < 3$ であるから、x の範囲は $0 < x < \dfrac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り、y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y' = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

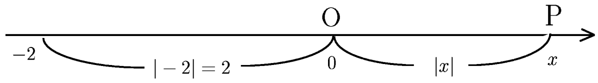
(答) $x = \dfrac{2}{3}$(cm) のとき、最大容積 $y = \dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 $2a$ cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 y(cm^3) を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

$<$ 絶対値 $>$



問１ 実数 x の数直線上の位置を点 P (x) とする。原点 O(0) からの距離 OP を x の 絶対値といい、

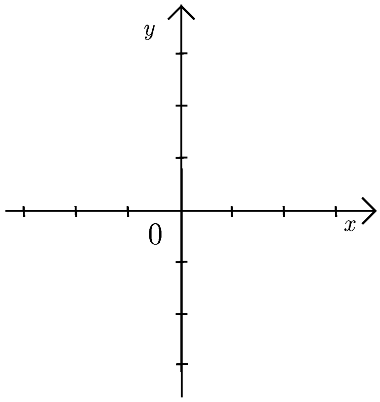
$$\mathrm{OP}=|x|$$

と表わす。例えば、$|2| = 2$ 、$|-2| = 2$ である。ここで、

$$y = |x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを書け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



又、以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ の中に適当な文字式を入れよ。

「右のグラフより、$y = |x|$ のグラフは

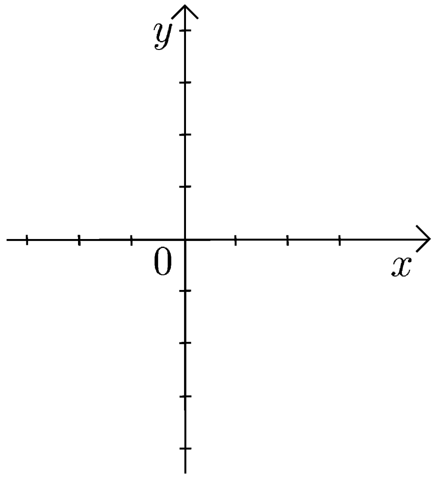
$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad\quad}$ であり

$x < 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\quad\quad}$ であることから、

$$y = |x| = \begin{cases} \boxed{\quad\quad\quad} & (x \geqq 0) \\ \boxed{\quad\quad\quad} & (x < 0) \end{cases}$$ が分かる。」

問２ 関数 $y = |x^2 - 4|$ に対し、表を完成し、

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



右図に、グラフを書き、以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ の中に、
適当な数字又は文字式を入れよ。
「右のグラフより、 $y = |x^2 - 4|$ のグラフは、
３つの領域に分かれた式

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} \boxed{\quad\quad\quad\quad} & (\boxed{\quad} \leqq x) \\ \boxed{\quad\quad\quad\quad} & (\boxed{\quad} < x < \boxed{\quad}) \\ \boxed{\quad\quad\quad\quad} & (x \leqq \boxed{\quad}) \end{cases}$$

で、表わされる。グラフをよく見ると、このグラフは２次関数

$$y=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

のグラフで x 軸より下にある部分を、x 軸を対称軸として折り返したものと同じ。」

＜ガウス記号＞

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n
とすると

$$n \leqq x < n+1,\quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例　$[1.5] = \ 1,\qquad [2.76] = 2$

$[3.024] = \ 3,\qquad [4.8196] = 4$

$[0.135] = \ 0,\qquad [-0.52] = -1$

$[-1.23] = -2,\qquad [-2.746] = -3$

問１　次の値を求めよ。

(1) $[5.98] =$　　　　(2) $[-3.01] =$

(3) $\left[\dfrac{3}{2}\right] =$　　　　(4) $\left[-\dfrac{11}{5}\right] =$

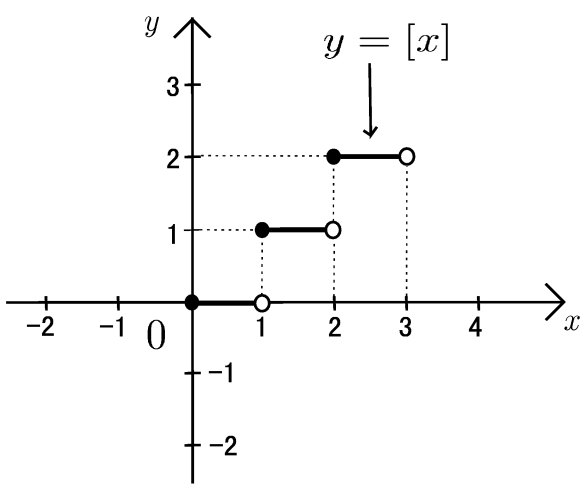
問２　関数 $f(x) = [x]$ のグラフを
描きたい。

$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ の
グラフは右図のようになる。このグラフ
を $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



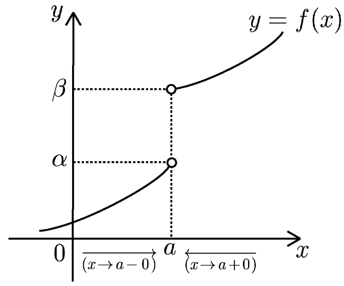
＜ 左極限・右極限１ ＞

変数 x が１つの数 a に限りなく近づくとき

(1)　a より小さい値をとりながら a に近づく場合には、$x \to a - 0$

(2)　a より大きい値をとりながら、a に近づく場合には、$x \to a + 0$

と表す。



関数 $y = f(x)$ のグラフが右図のように

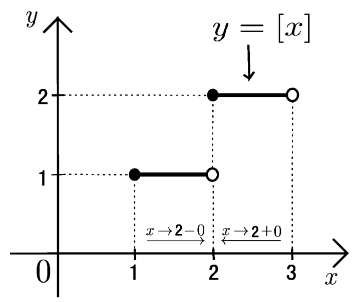
なったときは

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \quad （左極限）$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta \quad （右極限）$$

と書き、それぞれを**左側からの極限（左極限）**、**右側からの極限（右極限）**という。

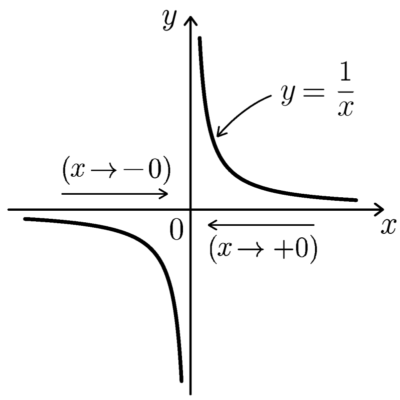
例１　$f(x) = [x]$（ガウス記号）のとき



$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$ より $\displaystyle\lim_{x \to 2-0}[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$ より $\displaystyle\lim_{x \to 2+0}[x] = 2$

例２　x が 0 に近づく場合 ($a = 0$ のとき)



0 への左極限値 $x \to 0 - 0$ を略して $x \to -0$

0 への右極限値 $x \to 0 + 0$ を略して $x \to +0$

と書く。　$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のときグラフより

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty\ ,\ \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$$

である。

問　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to -0}[x] =$　　　　　$\displaystyle\lim_{x \to +0}[x] =$

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \tan\theta =$　　　　　$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}+0} \tan\theta =$

＜左極限・右極限２＞

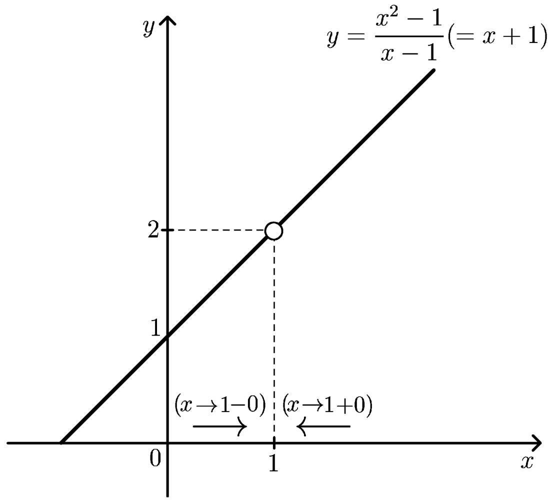
例１　関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ で定義されないが、$x=1$ における左極限と右極限は

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

のように一致する。このような場合は単に

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

と書く。



一般の関数 $f(x)$ に対し、$x=a$ における左極限と右極限が同じ値 α に収束するとき、すなわち

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \quad , \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$$

のとき、単に

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

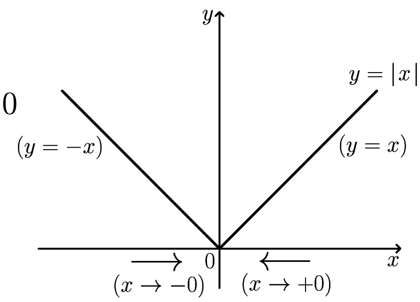
と書く。

例２　$f(x) = |x|$（絶対値）の場合

(1) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $\displaystyle\lim_{x \to -0} |x| = \lim_{x \to -0} (-x) = 0$

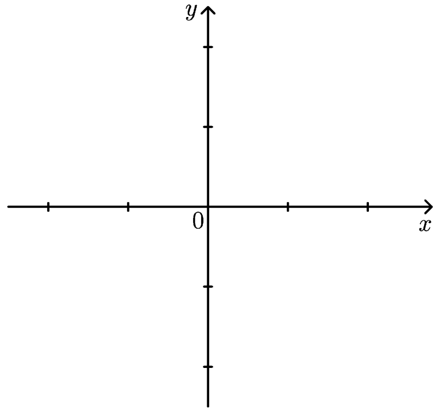
(2) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $\displaystyle\lim_{x \to +0} |x| = \lim_{x \to +0} x = 0$

よって (1) と (2) より $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x| = 0$



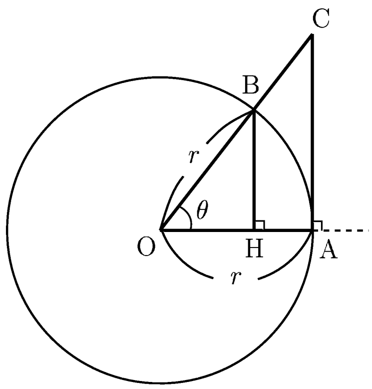
問　$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ に対し、次の極限値を求め、$y = \dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} =$　　　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} =$



＜三角関数の極限1＞

斜角 θ(ラジアン) に対し半径 r、
中心角 θ のとき右のような図形を
考える。



問 1 直線 HB の長さ ℓ_1 を r と θ を使って表せ。

問 2 直線 AC の長さ ℓ_3 を r と θ を使って表せ。

問 3 弧 AB は円周の $\dfrac{\theta}{2\pi}$ 倍であることを用いて、弧 AB の長さ ℓ_2 を r と θ を使って表せ。

問 4 右上図から

$$\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$$

である。この不等式を r と θ で表し、単純化せよ。

問 5 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して、問 4 で得られた不等式を次の形にせよ。

$$\boxed{} < \theta < \boxed{}$$

$\boxed{}$ の中を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を使って表せ。

＜三角関数の極限２＞

前ページの結果より、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \qquad \sin\theta \quad < \quad \theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

がわかる。右側の不等式で $\dfrac{\cos\theta}{\theta} > 0 \ (\theta > 0,\ \cos\theta > 0)$ より

$$\theta \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad \theta \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$$

がわかる。

問１　上の結果より、次の不等式が得られる。

$$(**) \quad \cos\theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \quad < \quad \boxed{}$$

$(*)$ の左側式を θ で割ることにより、□の中に適当な数字を入れよ。

問２　$\theta \to +0$（右極限）のとき $\cos\theta \to 1$ である。不等式 $(**)$ から次の極限値を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} \quad =$$

問３　$\theta \to -0$（左極限）のとき $\theta = -\theta_1$ とおくと $\theta_1 \to +0$ であるから

$$(2) \quad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} \quad = \quad \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1}$$

となる。$\sin(-\theta_1) = -\sin\theta_1$ と (1) 式の結果を利用して、(2) 式の極限値を求めよ。

＜三角関数の極限３＞

前ページの問２，問３の結果より

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \quad , \quad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

である。従って 17 ページの例２と同様に

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ = \ 1}$$

が成り立つ。

例１ $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$, $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)}{\theta \qquad \times(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \right) = 1 \times \frac{0}{1+1} = 0$$

例２ 加法定理と上の結果より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta)-\sin x}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta - \sin x}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x(\cos\theta - 1) + \cos x\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left\{ -\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\sin x + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos x \right\}$$

$$= -0 \times \sin x + 1 \times \cos x = \cos x$$

問 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ と上の結果を使って、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(x+\theta)-\cos x}{\theta} =$$

＜三角関数の微分＞

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

より $\sin x$ の導関数は次の極限値

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

である。ここで 0 に近づく変数 h を θ に変えると、前ページの結果より

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \cos x$$

であるから $\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

問１　前ページの問の結果を用いて、$\cos x$ の導関数を求めよ。

$(\cos x)' =$

例　$(2\sin x)' = (\sin x + \sin x)' = 2 \times (\sin x)' = 2\cos x$

$$\begin{aligned}\left(x^2 + 2\sin x + 3\cos x\right)' &= \left(x^2\right)' + (2\sin x)' + (3\cos x)' \\ &= 2x + 2\cos x - 3\sin x\end{aligned}$$

問２　例にならって、次の関数を微分せよ。

(1) $(3\cos x - 2\sin x)' =$

(2) $(10 - 2x + \sin x - 5\cos x)' =$

<積・商の微分1>

例 $h \to 0$ のとき

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \longrightarrow (\sin x)'$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \longrightarrow (\cos x)'$$

$$\cos(x+h) \longrightarrow \cos x$$

であるから

$$(\sin x \times \cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos(x+h)+\sin x\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)\cos(x+h)+\sin x\left(\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right)\right\}$$

$$= (\sin x)' \times \cos x + \sin x \times (\cos x)'$$

$$= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

となる。

問 例を参考にして、一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数を $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ で表せ。

$$\big(f(x) \times g(x)\big)' =$$

＜積・商の微分2＞

例　$h \longrightarrow 0$　のとき

$$\sin(x+h) \longrightarrow \sin x$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \longrightarrow (\sin x)'$$

であるから

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin(x+h)} - \dfrac{1}{\sin x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\dfrac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ -\frac{\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \right\} \\
&= -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

問　例を参考にして、一般の関数 $g(x)$ に対する次の関数の導関数を $g(x)$ と $g'(x)$ で表せ。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

＜積・商の微分３＞

分数関数 $\dfrac{\square}{\triangle}$ の微分は、$\dfrac{\square}{\triangle} = \square \times \dfrac{1}{\triangle}$ と考え

積の微分 $(\square \times \bigcirc)' = (\square)' \times \bigcirc + \square \times (\bigcirc)'$

と商の微分 $\left(\dfrac{1}{\triangle}\right)' = -\dfrac{(\triangle)'}{(\triangle)^2}$ を組み合わせてできる。

例 $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\sin x \times \dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$= (\sin x)' \times \left(\frac{1}{\cos x}\right) + (\sin x) \times \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'}{\cos x} + (\sin x) \times \left\{-\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}\right\}$$

$$= \frac{(\sin x)' \times \cos x - (\sin x) \times (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \times \cos x - (\sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問１ 例を参考にして、一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対する次の関数の導関数を $f(x)$,$g(x)$,$f'(x)$,$g'(x)$ で表せ。

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

問２ 問１の結果を用いて次の関数を微分せよ。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

＜積・商の微分４＞

22 , 23 , 24 ページの結果より、次の３式が成り立つ。

$$\bigl(f(x)\times g(x)\bigr)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

例　(1) $(x^2\sin x)' = (x^2)'\times\sin x + x^2\times(\sin x)'$

$$= 2x\sin x + x^2\cos x$$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = -\dfrac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\dfrac{3x^2}{x^6} = -\dfrac{3}{x^4}$

(3) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{(\cos x)'\times(\sin x) - (\cos x)\times(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $\bigl\{(x^2-2x-1)(2x^2+x+1)\bigr\}' =$

(2) $\left(\dfrac{1}{x-\cos x}\right)' =$

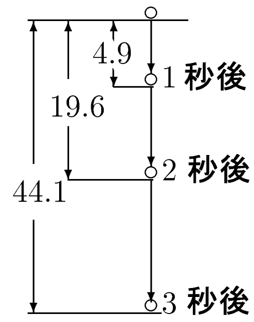
(3) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' =$

< 速度 >

例 (自由落下) 物体を高い所まで持って上がり、静かに手を放すと地上に向かって落下する。 t 秒後に y $[m]$ 落下するとすれば、

$$y = 4.9t^2$$

であることが実験からわかる。 $f(t) = 4.9t^2$ とすれば
1 秒後は　$y = f(1) = 4.9 \times 1^2 = 4.9$ $[m]$
2 秒後は　$y = f(2) = 4.9 \times 2^2 = 19.6$ $[m]$
3 秒後は　$y = f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ $[m]$ である。



この落下速度を調べたい。(速度) $= \dfrac{(\text{動いた距離})}{(\text{時間})}$ だから、

1 秒後から 3 秒後までの平均速度は

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6 \quad [m/s]$$

問 1 2 秒後から 3 秒後までの平均速度を求めよ。
(解)

h を微少時間とする。1 秒後から $(1 + h)$ 秒後の平均速度は、

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{4.9 \times (1+h)^2 - 4.9 \times 1^2}{h} = 4.9 \left\{ \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \right\} = 4.9 \times (2 + h)$$

である。ここで $h \to 0$ とすれば、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \{4.9 \times (2 + h)\} = 9.8$$

である。この値 $9.8[m/s]$ が、ちょうど 1 秒後の **瞬間の速度** を意味する。この値は極限の形から、$y = f(t)$ の $t = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を意味する。

問 2 2 秒後の瞬間の速度 $f'(2)$ を求めよ。

(解)　$f'(2) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

問 3 t 秒後の瞬間の速度 $f'(t)$ を求めよ。

(解)　$f'(t) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =$

＜ 微分記号 ＞

関数 $y=f(x)$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限でもあるから、導関数を

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す（全て同じ意味である）。 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数（ x についての微分）であることを明記するためにある。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y=f(t)$ の導関数を

$$y'=f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y=x^3-2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4x$

$y=t^3-2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-4t$

$S=r^3-2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr}=3r^2-4r$

微分の公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=2x^2-3x+4$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=10-9.8t$ $\qquad \dfrac{dy}{dt}=$

(3) $\ell=2\pi r$ $\qquad \dfrac{d\ell}{dr}=$

(4) $S=\pi r^2$ (π は円周率) $\qquad \dfrac{dS}{dr}=$

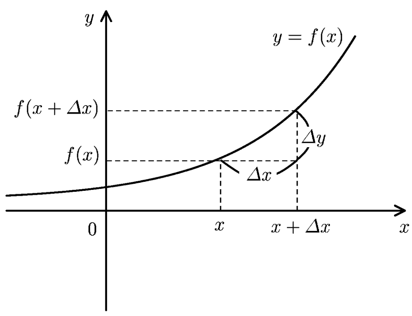
(5) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad \dfrac{dV}{dr}=$

$<$ 増分記号 $\varDelta$ (デルタ) $>$

関数 $y=f(x)$ と x の増分 $\varDelta x$ に対して、y の増分を

$$\varDelta y = f(x+\varDelta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\varDelta x \to 0$ のときの平均変化率 $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ の極限だから $\dfrac{dy}{dx}$ と書く。



$$f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 $\varDelta x$ は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例 $\displaystyle \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(x+\varDelta x)^3 - x^3}{\varDelta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\varDelta t \to 0} \frac{(t+\varDelta t)^4 - t^4}{\varDelta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\sin(u+\varDelta u) - \sin(u)}{\varDelta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限値を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(x+\varDelta x)^5 - x^5}{\varDelta x} =$

(2) $\displaystyle \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\cos(t+\varDelta t) - \cos(t)}{\varDelta t} =$

(3) $\displaystyle \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\tan(u+\varDelta u) - \tan(u)}{\varDelta u} =$

＜ 合成関数 ＞

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとき、関数 $g(f(x))$ を考えることができる。この関数を $f(x)$ と $g(x)$ の **合成関数** という。

例1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$

問1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x + 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = 2x,\ g(x) = \cos x - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = 2^x,\ g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。たとえば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x\ ,\quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 3x + 1)^3$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

(4) $y = 2^{x^2 - 1}$, $f(x) =$, $g(x) =$

＜合成関数の微分１＞

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad \Big(= \sin\big((x + \Delta x)^3\big) - \sin(x^3)\Big)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\right)$$

$$= (\sin u)' \times (x^3)'$$

$$= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

問 関数 $y = \cos(x^5)$ の導関数を求めたい。

$u = x^5$ とおくと、 $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^5 - x^5$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx} =$

＜合成関数の微分 2＞

問 1 一般の合成関数 $y=g(f(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u=f(x)$ とおくと $y=g(u)$ となる。

このとき、$\dfrac{dy}{dx}\left(=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ を、$\dfrac{dy}{du}\left(=\lim_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)$ と $\dfrac{du}{dx}\left(=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\dfrac{dy}{dx}= \qquad\qquad\qquad\qquad}$

例 関数 $y=(x^3+5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u=x^3+5x^2$ とおくと $y=u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\left(u^7\right)'\times\left(x^3+5x^2\right)'=7u^6\times\left(3x^2+10x\right)=7\left(x^3+5x^2\right)^6\left(3x^2+10x\right)$$

問 2 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y=(x^2-3x+1)^5$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\cos(2x-3)$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$, $\dfrac{dy}{dx}=$

＜ネピアの数1＞

無限数列

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$, $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$, $\cdots\cdots$

を考える。この数列の第 n 項は

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

であり、$n\to\infty$ のとき一定の数に収束する。この極限を e と書き、**ネピアの数**という。

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828\cdots}$$

この極限値 e は無理数であることがわかっている。

問 上の数列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ に対し、$n\to-\infty$ の極限を求めたい。

$n=-2$ のとき　$\left(1+\frac{1}{-2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\times\left(1+\frac{1}{1}\right)$

$n=-3$ のとき　$\left(1+\frac{1}{-3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$n=-4$ のとき　$\left(1+\frac{1}{-4}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$n=-5$ のとき　$\left(1+\frac{1}{-5}\right)^{-5}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-5}=\left(\frac{5}{4}\right)^5=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$n=-6$ のとき　$\left(1+\frac{1}{-6}\right)^{-6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-6}=\left(\frac{6}{5}\right)^6=\left(1+\frac{1}{5}\right)^5\times\left(1+\frac{1}{5}\right)$

(1) $n=-(m+1)$ のときの項を上の式の右端の形にせよ。

$$\left(1+\frac{1}{-(m+1)}\right)^{-(m+1)}=$$

(2) $n=-(m+1)$ とおくと $n\to-\infty$ のとき $m\to+\infty$ である。
$m\to+\infty$ のとき $\left(1+\frac{1}{m}\right)\to1$, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\to e$ であることから
次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(m+1)}\right)^{-(m+1)}=$$

＜ネピアの数2＞

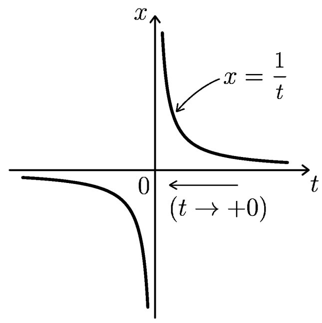
前ページの結果より

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ , \ \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

であることがわかった。この極限で、自然数 n のかわりに
実数 x としても同じ値に収束する。

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad , \quad (2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

例 極限 $\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ を考える。



$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと、$t\to+0$ のとき $x\to+\infty$
より (1) 式より

$$(3)\ \lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

問1 $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと $t\to-0$ のとき $x\to-\infty$ である。(2) の式を使って
次の極限値を求めよ。

$$(4)\ \lim_{t\to-0}(1+t)^{\frac{1}{t}} =$$

問2 (3) と (4) の結果から (17 ページを参考にして) 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} =$

(2) $\lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\log_e(1+t) =$

(ヒント)　対数の性質 $n\times\log_a(M)=\log_a(M^n)$ を使う。

< 対数関数の微分 1 >

例 関数 $f(x)=\log_{10}x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。

定義から

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\log_{10}(2+h)-\log_{10}2\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{2}=t$ とおくと、 $h\to 0$ のとき $t\to 0$ より

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_{10}\left(1+\frac{h}{2}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\log_{10}(1+t)$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\log_{10}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}=\frac{1}{2}\log_{10}e$$

(注) ここで前ページの結果 $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ を使った。

問 例と同じ関数 $f(x)=\log_{10}x$ の微分係数 $f'(3)$ を例と同様な極限計算で求め、導関数 $f'(x)$ を類推せよ。

$f'(3)=$

$f'(x)=$

< 対数関数の微分 2 >

問 1 前ページの結果より、底が $a > 0 (a \neq 1)$ である対数関数 $f(x) = \log_a x$ の導関数を求めよ。

(答) $(\log_a x)' =$

底が e (ネピアの数 ≒ 2.7) である対数 $\log_e x$ を **自然対数** と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log x = \log_e x} \ (\text{自然対数})$$

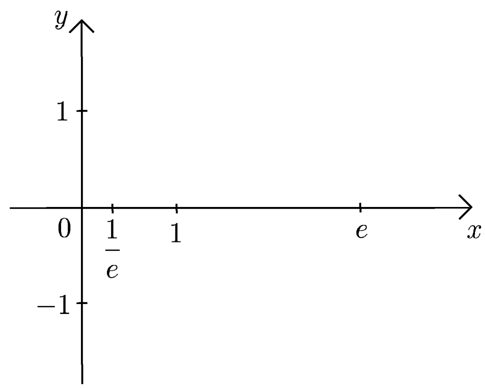
例 $\log e = \log_e e = 1, \quad \log \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$

問 2 次の自然対数の値を求め、 $y = \log x$ のグラフを書け。

(1) $\log(e^2) =$

(2) $\log\left(\dfrac{1}{e}\right) =$

(3) $\log 1 =$



問 3 問 1 の結果を利用して、自然対数 $\log x = \log_e x$ の導関数を求めよ。

(答) $(\log x)' =$

< 対数関数の微分3 >

例　関数 $y=\log(x^2+3x+4)$ の導関数を求めたい。

$u=x^2+3x+4$　とおくと　$y=\log u$　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log u)'\times(x^2+3x+4)'$$
$$=\frac{1}{u}\times(2x+3)=\frac{1}{x^2+3x+4}\times(2x+3)=\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

問1　例にならって、次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y=\log(x^3-2x-1)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log(1+\cos x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log(x-\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

問2　上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y=\log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'=\qquad\qquad}$

< 指数関数の微分 >

一般の関数 $y=f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (前ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y=2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x\log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x'=1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

（注）両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y=3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。
(解)

問 2 例と問 1 の結果を使って、一般の正数 $(a>0)$ に対する指数関数 $y=a^x$ の導関数 $y'=(a^x)'$ を類推せよ。

(答) $(a^x)' =$

問 3 $a=e$（ネピア数）のとき、指数関数 $y=e^x$ の導関数 $y'=(e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

< x^r の微分 >

例　$y = \sqrt[3]{x^2}$ の導関数を求めたい。巾乗の形に直すと $y = x^{\frac{2}{3}}$ である。
これを対数微分法で微分する。

両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}\log x$$

である。両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x}$$

であるから

$$y' = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

問 1　一般の実数 r に対して、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答)　$(x^r)' =$

問 2　指数の定義 $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ と問 1 の結果を利用して、次の関数を微分せよ

(1)　$(\sqrt[3]{x^5})' =$

(2)　$(\sqrt{x})' =$

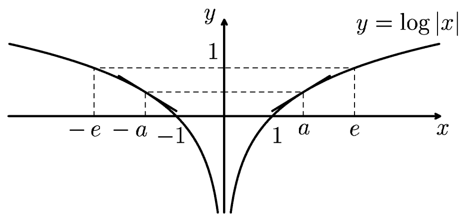
(3)　$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

$<\log|x|$ の微分 $>$

例 1 関数 $y=\log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より、 $y=\log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$

となる。

例 2 関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。
$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\tan x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|x^2+3x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

＜ 逆関数の微分 ＞

$f(x)$ の逆関数　$y = f^{-1}(x)$　は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$$

$\varDelta y = f^{-1}(x+\varDelta x) - f^{-1}(x)$　とおくと　$\varDelta x \to 0$　のとき　$\varDelta y \to 0$　より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta y \to 0} \frac{1}{\frac{\varDelta x}{\varDelta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

となる。

例　逆三角関数　$y = \sin^{-1} x$　の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(注)　$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$　より　$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

問　例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \cos^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(ヒント)　$\dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$