

高知工科大学  
基礎数学ワークブック

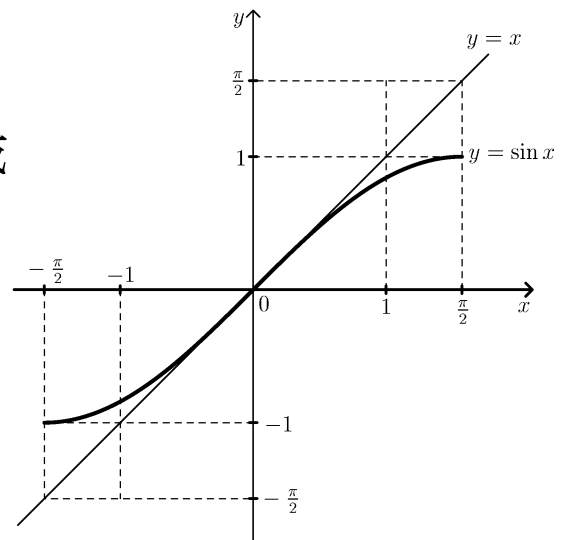
(2000年度版)

秋期入学者用

## II

### 内容

- ◎ 関数のグラフ
- ◎ 関数の定義域と値域
- ◎ 逆関数
- ◎ 数列
- ◎ 極限



電子・光システム工学科

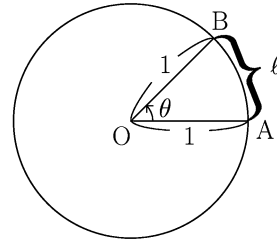
井上 昌昭 著

## < 弧度法 1 >

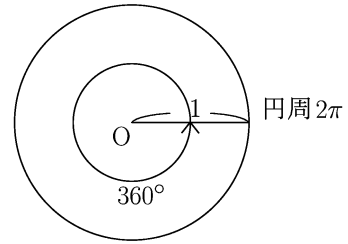
右図のように、角度  $\theta$  を、半径 1 の円の弧 AB の長さ  $l$  で表す方法を弧度法という。単位をラジアンで表し、

$$\theta^\circ = l \text{ (ラジアン)}$$

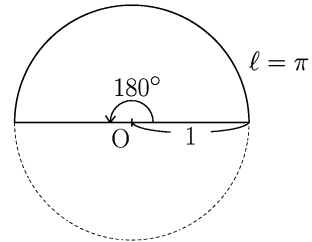
と記す。



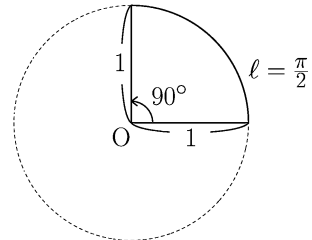
- 例 (1)  $\theta = 360^\circ$  のとき、半径 1 の円周の長さは  $2\pi$  だから  
 $360^\circ = 2\pi$  (ラジアン)  
 である。(  $\pi$  は円周率  $\approx 3.14$  )



- (2)  $\theta = 180^\circ$  のとき、半径 1 の半円の長さは  $\pi$  だから  
 $180^\circ = \pi$  (ラジアン)



- (3)  $\theta = 90^\circ$  のとき、半径 1 の円周の  $\frac{1}{4}$  の長さは  $\frac{\pi}{2}$  だから  
 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  (ラジアン)



以上の例から、1 (ラジアン) は弧の長さが 1 に対する角度  $\theta$  で、

$$1 \text{ (ラジアン)} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

である。

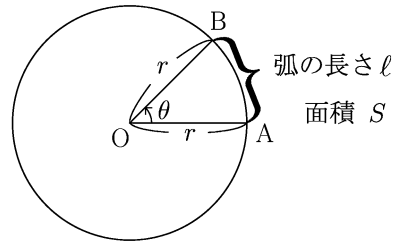
(注)  $360^\circ$  ,  $180^\circ$  ,  $90^\circ$  等と表す方法を度数法という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	$0^\circ$		$45^\circ$	$60^\circ$		$120^\circ$		$150^\circ$		$210^\circ$	$225^\circ$		$270^\circ$	$300^\circ$		$330^\circ$
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\pi$			$\frac{4}{3}\pi$			$\frac{7}{4}\pi$	$2\pi$

## < 弧度法 2 >

中心角  $\theta$ 、半径  $r$  の扇形 OAB  
の弧の長さ  $l$  と扇形 OAB の  
面積  $S$  を求めたい。



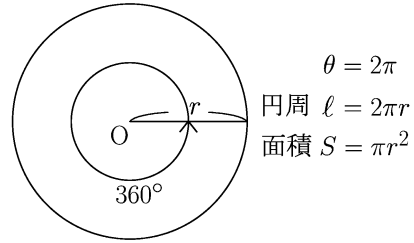
(1)  $\theta = 2\pi$  (ラジアン) =  $360^\circ$  のときは

$l$  は円周の長さだから

$$l = 2\pi r$$

であり  $S$  は円の面積だから

$$S = \pi r^2$$

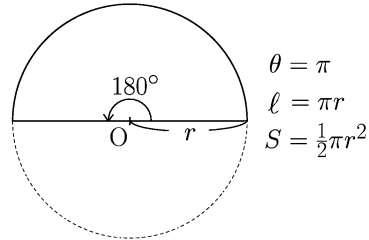


(2)  $\theta = \pi$  (ラジアン) =  $180^\circ$  のとき、円周  
及び面積は

(1) の半分であるから

$$l = \pi r$$

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$

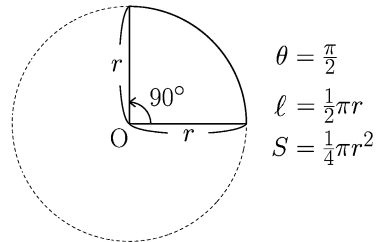


(3)  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (ラジアン) =  $90^\circ$  のとき同様に

(1) の  $\frac{1}{4}$  であるから

$$l = \frac{1}{2}\pi r$$

$$S = \frac{1}{4}\pi r^2$$



問 1 次の表を完成させよ。

度数法	$45^\circ$	$60^\circ$		$120^\circ$		$360^\circ$
弧度法 $\theta$			$\frac{\pi}{2}$		$\pi$	
弧の長さ $l$			$\frac{1}{2}\pi r$			$2\pi r$
面積 $S$					$\frac{1}{2}\pi r^2$	$\pi r^2$

問 2 上の表を参考にして、一般に角度が  $\theta$  (ラジアン) であるとき  
弧の長さ  $l$  と扇形 OAB の面積  $S$  を  $\theta$  を用いて表せ。

$$l =$$

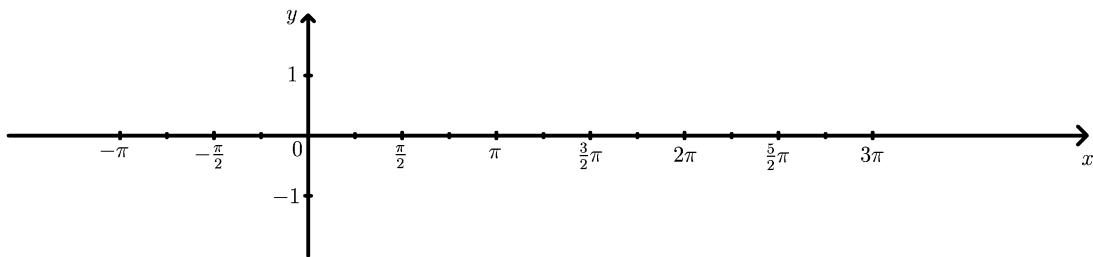
$$S =$$

## ＜三角関数のグラフ＞

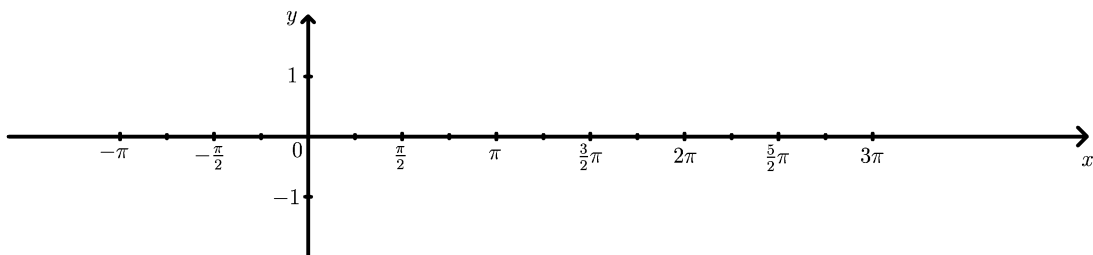
問 表を完成し、 $y = \sin x$  と  $y = \cos x$  および  $y = \tan x$  のグラフを書け。

$x$	度数法	-135°	-45°	0°	90°	180°	225°	315°	405°	495°
	弧度法	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
	$\sin x$									
	$\cos x$									

(1)  $y = \sin x$

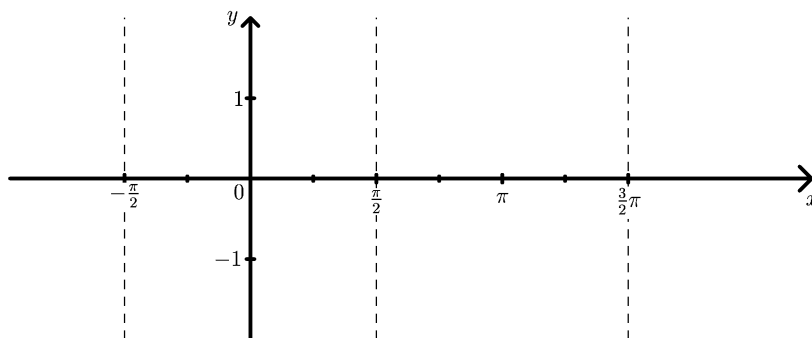


(2)  $y = \cos x$



$x$	度数法	-90°	-45°	0°	30°	60°	120°	150°	225°		
	弧度法	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
	$\tan x$										

(3)  $y = \tan x$



## < 正弦波 1 >

定数  $A, B, C$  に対し、正弦関数  $y = A \sin(Bx + C)$  のグラフを正弦波という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2}$$

であるが  $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$  より

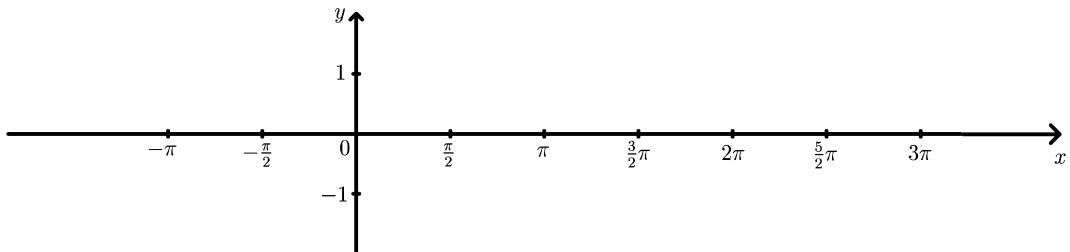
$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って  $y = \cos x$  のグラフも正弦波である。前ページの  $y = \sin x$  と  $y = \cos x$  のグラフを比べてほしい。 $y = \cos x$  のグラフは  $y = \sin x$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-\frac{\pi}{2}$  だけ平行移動したものである。このようなとき「 $\cos x$  のグラフは  $\sin x$  のグラフより位相が  $\frac{\pi}{2}$  だけ遅れている」という。あるいは「 $\sin x$  のグラフは  $\cos x$  のグラフより位相が  $\frac{\pi}{2}$  だけ進んでいる」という。

一般の正弦波関数  $y = A \sin(Bx + C)$  において、( ) の中の部分 (この場合は  $Bx + C$ ) を位相という。

問 次の表を完成し、 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  のグラフを描け。

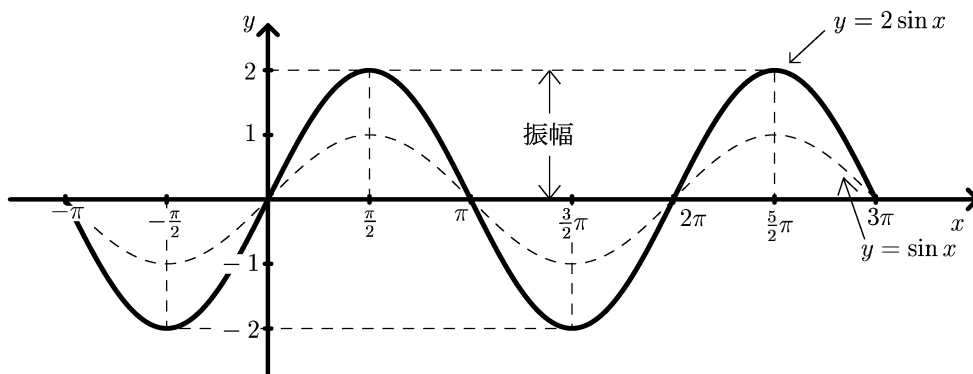
$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$3\pi$
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



## < 正弦波 2 >

例  $y = 2 \sin x$  のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、それを元にグラフを描く。

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$3\pi$
$\sin x$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$
$2 \sin x$	$0$	$-2$	$0$	$2$	$0$	$-2$	$0$	$2$	$0$

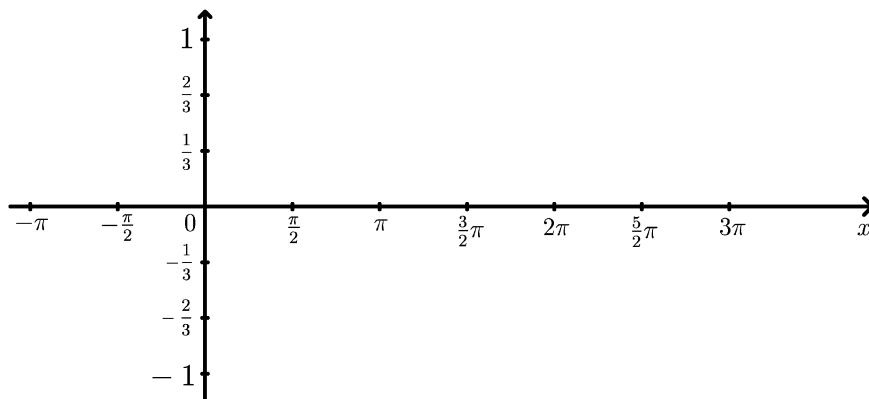


このグラフでは実線が  $y = 2 \sin x$  のグラフであり、点線が  $y = \sin x$  のグラフである。このグラフを見れば分かるが、 $y = 2 \sin x$  のグラフは  $y = \sin x$  のグラフを  $y$  軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は  $-2$  である。

このような場合に「この正弦波の振幅は 2」という。

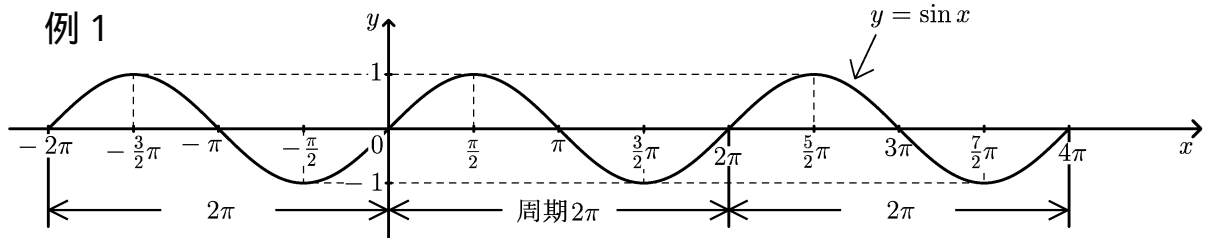
一般の正弦波の場合に、 $x$  軸からの距離の最大値を振幅という。

問  $y = -\frac{1}{3} \sin x$  のグラフを描き、その振幅を求めよ。



### < 正弦波 3 >

例 1

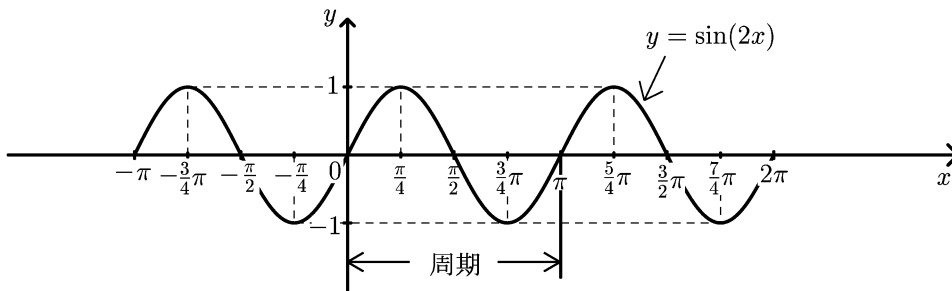


このグラフは  $y = \sin x$  のグラフである。この正弦波は  $2\pi$  ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を周期関数といい、一つの波形の ( $x$  軸方向の) 長さを周期という。

$y = \sin x$  の周期は  $2\pi$  である。

例 2  $y = \sin(2x)$  のグラフを、次の表を元にして描く。

$x$	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$2\pi$
$2x$	$-2\pi$	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$3\pi$	$\frac{7}{2}\pi$	$4\pi$
$\sin(2x)$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$

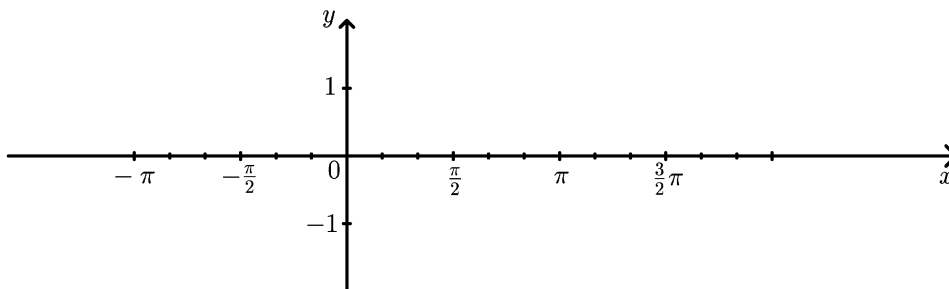


このグラフは  $\pi$  ごとに同じ波形を繰り返しているので、

$y = \sin(2x)$  の周期は  $\pi$  である。

問 次の表を完成し、 $y = -\sin(3x)$  のグラフを描き、その周期を求めよ。

$x$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$-\sin(3x)$													

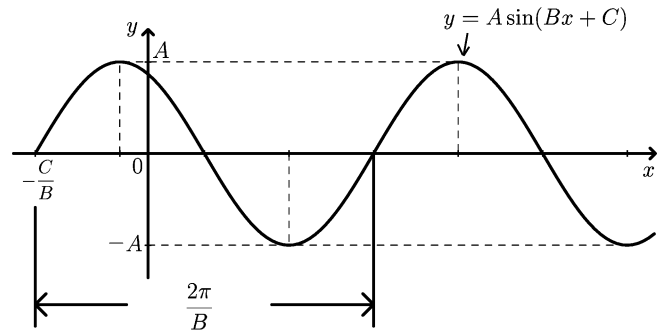


## < 正弦波 4 >

問 1  $y = 4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$  の振幅と周期を求めよ。

問 2  $A, B > 0$  のとき、 $y = A \sin(Bx)$  の振幅と周期を求めよ。

定数  $A, B, C$  がすべての正の数するとき、  
正弦関数  $y = A \sin(Bx + C)$  のグラフは  
右図のようになる。



[ 正弦波の和 ]

サインの加法定理より正弦関数  $y = A \sin(Bx + C)$  は

$$A \sin(Bx + C) = A \{ \sin(Bx) \cos C + \cos(Bx) \sin C \}$$

の形に分解できる。ここで

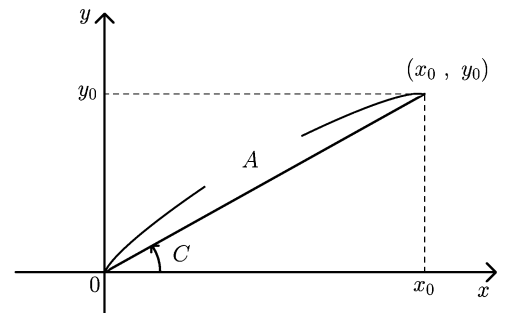
$$x_0 = A \cos C, \quad y_0 = A \sin C$$

( $A, C > 0$  のときの、 $x_0, y_0$  と  $A, C$  の  
関係は右図のようになる。)

とおくと

$$(*) \quad A \sin(Bx + C) = x_0 \sin(Bx) + y_0 \cos(Bx)$$

の形になる。 $x_0 \sin(Bx)$  と  $y_0 \cos(Bx)$  は同じ周期  
の正弦関数であり、その和も同じ周期の  
正弦関数になる。



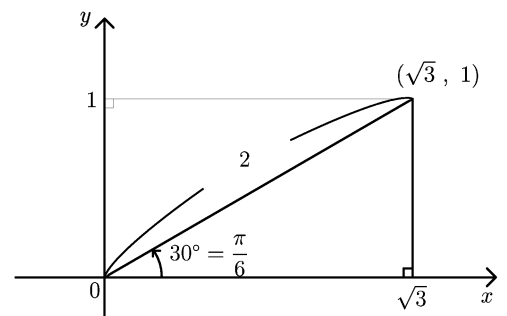
例  $\sqrt{3} \sin(4x)$  と  $\cos(4x)$  は同じ周期の

正弦関数である。その和を (\*) の形にしたい。

この場合は  $B = 4$  であり、 $x_0 = \sqrt{3}$ ,  $y_0 = 1$  で

あるから右図より  $A = 2$ ,  $C = \frac{\pi}{6}$  となるから

$$\sqrt{3} \sin(4x) + \cos(4x) = 2 \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$$



問 3  $\sin x + \cos x$  を  $A \sin(Bx + C)$  の形にせよ。

## < 無理関数 1 >

例 1  $\sqrt{\quad}$  のついた関数を通常無理関数という。

たとえば関数  $y = \sqrt{x+2}$  のグラフを描きたい。

ここで  $\sqrt{\quad}$  の中は  $x+2$  であるが、この値が負になると

$\sqrt{\quad}$  の値が定義されないので、この場合、 $x$  の

とりうる範囲は

$$x+2 \geq 0 \quad \text{つまり} \quad x \geq -2$$

となる。無理関数の場合は

このような制限が自動的に付く。

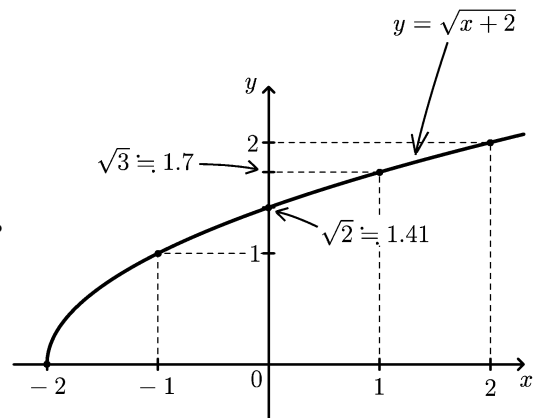
このような  $x$  の範囲を定義域という。

なお  $\sqrt{\quad}$  の値は常に 0 以上だから、

この場合の  $y$  の範囲は  $y \geq 0$  となる。

$y$  の範囲を値域という。

$y = \sqrt{x+2}$  のグラフは右図のようになる。



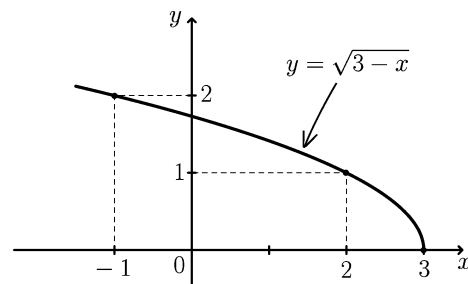
例 2  $y = \sqrt{3-x}$  の定義域は

$$3-x \geq 0$$

より  $3 \geq x$  である。値域は

$\sqrt{\quad} \geq 0$  より  $y \geq 0$  であり、

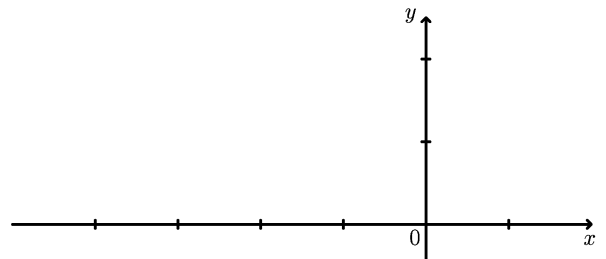
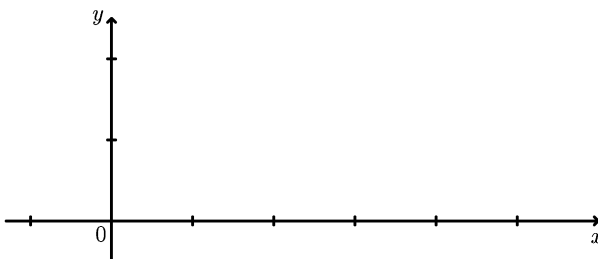
グラフは右図のようになる。



問 以下の関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1)  $y = \sqrt{2x-2}$

(2)  $y = \frac{\sqrt{-x}}{2}$



## < 無理関数 2 >

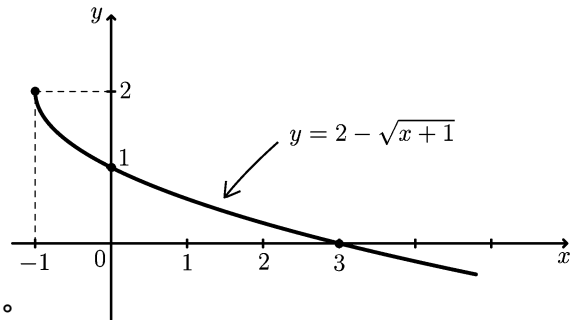
例 1 無理関数  $y = 2 - \sqrt{x+1}$  の  
定義域は  $x+1 \geq 0$  より

$$\boxed{\text{定義域: } x \geq -1}$$

である。値域は  $\sqrt{\quad} \geq 0$  だから  
 $2 - \sqrt{\quad} \leq 2$  より

$$\boxed{\text{値域: } y \leq 2}$$

となり、グラフは右図のようになる。



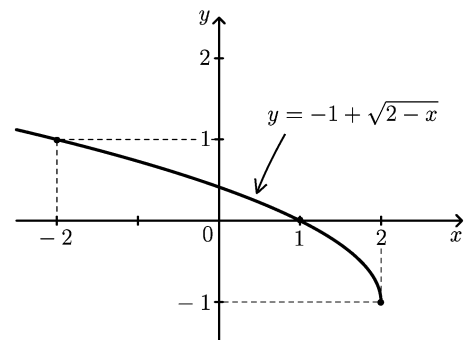
例 2 無理関数  $y = -1 + \sqrt{2-x}$  の  
定義域は  $2-x \geq 0$  より

$$\boxed{\text{定義域: } 2 \geq x}$$

である。値域は  $\sqrt{\quad} \geq 0$  だから  
 $-1 + \sqrt{\quad} \geq -1$  より

$$\boxed{\text{値域: } y \geq -1}$$

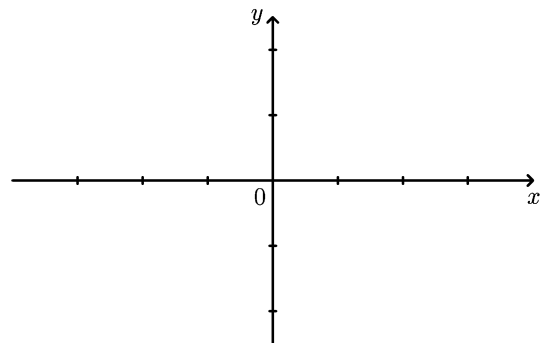
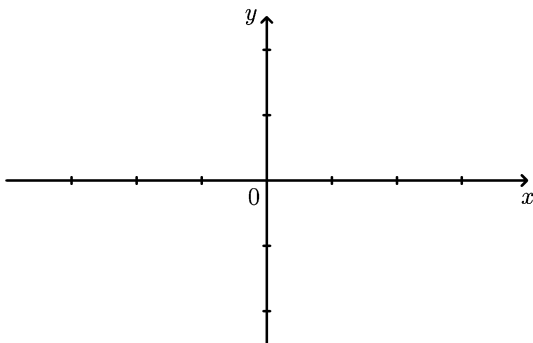
となり、グラフは右図のようになる。



問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1)  $y = -2 + \sqrt{x+3}$

(2)  $y = -\sqrt{1-x} + 1$



## < 分数関数 1 >

例 1 分数関数  $y = \frac{1}{x}$  を考える。

$x = 0$  のときは分母が 0 になるから定義できない。従って定義域は 0 以外のすべての実数となる。

$$\text{定義域: } x \neq 0$$

$y = \frac{1}{x}$  を変形すると  
 $xy = 1$

より  $y$  は 0 にならない。結局

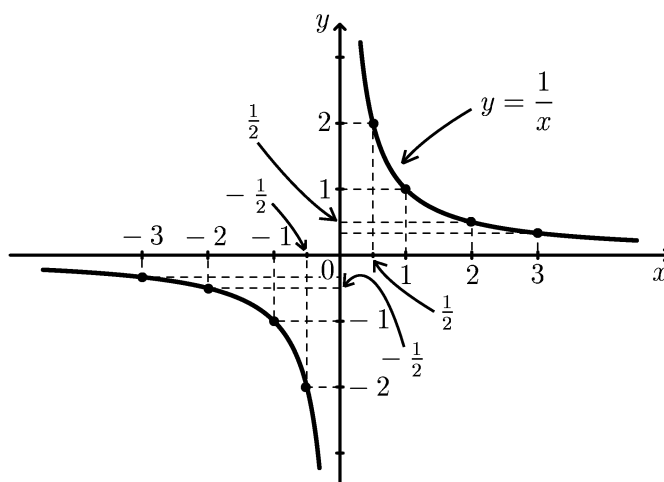
$$y = \frac{1}{x} \neq 0$$

となり、 $y$  は 0 以外のすべての実数の値を取る。

$$\text{値域: } y \neq 0$$

となり、グラフは右図のようになる。

$x$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	X	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



例 2 分数関数  $y = \frac{1}{x-2}$  を考える。

分母が 0 になってはならないので  $x - 2 \neq 0$  より

$$\text{定義域: } x \neq 2$$

となり、値域は上と同様に

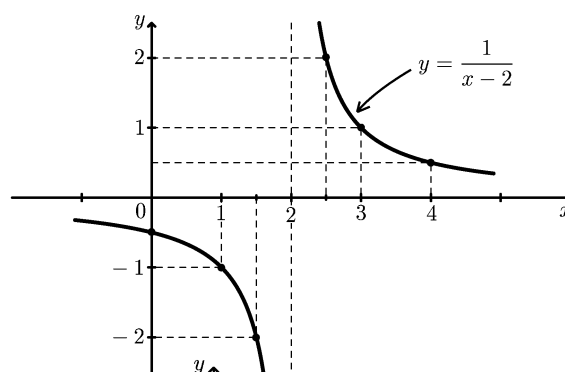
$$\text{値域: } y \neq 0$$

であり、グラフは右図のようになる。

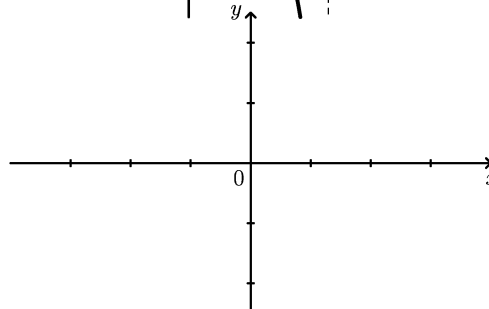
このグラフは  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  $x$  軸方向に

+2 だけ平行移動したものである。

$x$	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x - 2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	X	2	1	$\frac{1}{2}$



問 分数関数  $y = \frac{1}{1-x}$  の定義域と値域を求め、右にグラフを描け。



## < 分数関数 2 >

例 分数関数  $y = 3 + \frac{1}{x-2}$   
 を考える。定義域は分母  $\neq 0$   
 より

定義域 :  $x \neq 2$

である。一方逆数  $\frac{1}{\square} \neq 0$  より

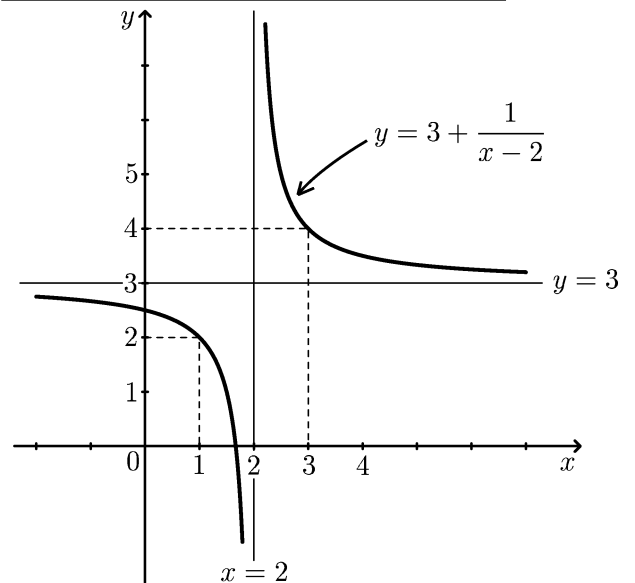
$$y - 3 = \frac{1}{x-2} \neq 0$$

であるから  $y - 3 \neq 0$  より

値域 :  $y \neq 3$

となる。このグラフは  
 右図のように  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを  
 $x$  軸方向に  $+2$ 、 $y$  軸方向に  $+3$   
 だけ平行移動したものである。

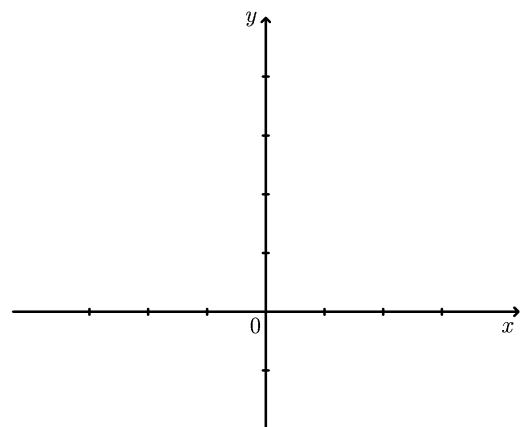
$x$	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	X	2	1	$\frac{1}{2}$
$y$	2.5	2	1	X	5	4	3.5



このグラフは  $x$  の値が 2 に近づくほど直線  $x = 2$  に近づき、 $x$  の値が  
 2 から遠ざかるほど直線  $y = 3$  に近づく。

この 2 直線  $x = 2, y = 3$  を分数関数  $y = 3 + \frac{1}{x-2}$  の  
 漸近線 (ゼンキンセン) という。

問 分数関数  $y = 2 + \frac{2}{x+1}$   
 定義域と値域および  
 漸近線を求め、右に  
 そのグラフを描け。  
 (漸近線のグラフも描く。)



## < 関数 1 >

例 1 一辺の長さが  $x_{cm}$  の正方形の面積を  $y_{cm^2}$  とすると、 $y$  は  $x$  で  $y = x^2$  と表される。

例えば、

$$x = 1 \text{ のとき } y = 1^2 = 1$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 2^2 = 4 \text{ となる。}$$

このように、2つの変数  $x, y$  があって、 $x$  の値

を定めると、それに応じて  $y$  の値がただ一つだけ定めるとき、

$y$  は  $x$  の関数であるという。一般に、 $y$  が  $x$  の関数であることを、

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。 $f(x)$  の  $f$  は *function* の頭文字で、

*function* の意味は、「機能」、「働き」などである。

例 1 の場合は  $f(x) = x^2$  であるが、これはカッコ内の数字  $\square$  を 2 乗するという機能

$$f(\square) = \square^2$$

を意味する。又、関数  $y = f(x)$  において、 $x = a$  に対応する  $y$  の値を  $x = a$  における関数の値といい、 $f(a)$  で表す。

例 2 関数  $y = 2x^2 - 3x + 5$  を  $y = f(x)$  と表すと

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \quad (f(\square) = 2 \times \square^2 - 3 \times \square + 5)$$

である。このとき  $x = 1, x = 0, x = -1$  に対応する関数の値

$f(1), f(0), f(-1)$  は次のように求められる。

$$f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 5 = 4$$

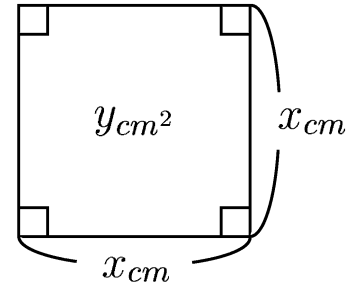
$$f(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 5 = 5$$

$$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 5 = 10$$

問  $f(x)$  が以下の場合に  $x = 1, x = 0, x = -1$  に対応する関数の値を求めよ。

$$(1) f(x) = -x + 2 \quad , f(1) = \quad , f(0) = \quad , f(-1) =$$

$$(2) f(x) = x^2 - x + 2 \quad , f(1) = \quad , f(0) = \quad , f(-1) =$$



## <関数2>

問 関数  $f(x)$  が左の場合に、右の関数の値を求めよ。

(1)  $f(x) = x^3$  のとき  $f(-2) =$  ,  $f(\sqrt{3}) =$

(2)  $f(x) = \sqrt{2x+3}$  のとき  $f(-1) =$  ,  $f(3) =$

(3)  $f(x) = \sqrt{3x^2+4}$  のとき  $f(0) =$  ,  $f(2) =$

(4)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$  のとき  $f(-2) =$  ,  $f(5) =$

(5)  $f(x) = 3^x$  のとき  $f(-2) =$  ,  $f(0) =$

(6)  $f(x) = 2^{3-x}$  のとき  $f(0) =$  ,  $f(2) =$

(7)  $f(x) = \log_3(x+1)$  のとき  $f(0) =$  ,  $f(2) =$

(8)  $f(x) = \log_2(3x^3+1)$  のとき  $f(0) =$  ,  $f(1) =$

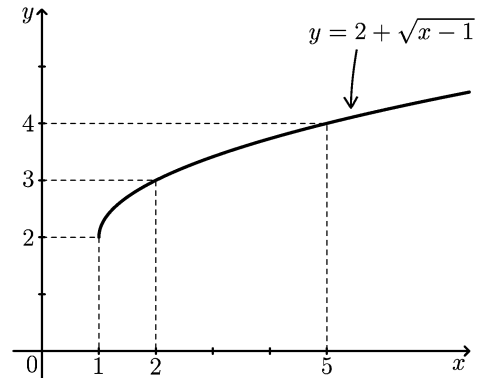
(9)  $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$  のとき  $f(0) =$  ,  $f(\frac{\pi}{3}) =$

(10)  $f(x) = 2 \sin(2x)$  のとき  $f(\frac{\pi}{6}) =$  ,  $f(\frac{\pi}{2}) =$

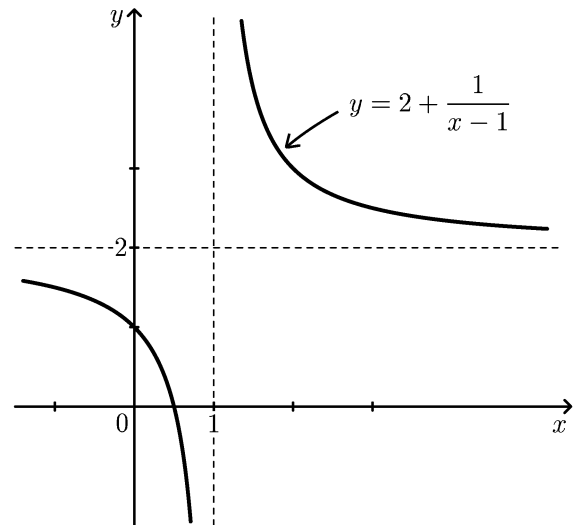
### < 関数 3 >

$y$  が  $x$  の関数  $y = f(x)$  であるとき、変数  $x$  を独立変数といい、  
 $y$  は  $x$  によって変わるから変数  $y$  を従属変数という。  
 関数  $y = f(x)$  において、独立変数  $x$  の範囲を定義域、  
 従属変数  $y$  の範囲を値域という。

例 1 無理関数  $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$   
 は  $\sqrt{\quad}$  の中が 0 以上の制限  
 があるから、 $x-1 \geq 0$  より  
 $f(x)$  の 定義域は  $x \geq 1$ 。  
 $y = 2 + \sqrt{x-1}$  とおくと  $\sqrt{\quad} \geq 0$   
 より 値域は  $y \geq 2$ 。



例 2 分数関数  $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$   
 は分母が 0 以外であるから  
 $x-1 \neq 0$  より  $x \neq 1$ 。  
 $f(x)$  の 定義域は 1 以外  
 の全ての実数 である。  
 $y = 2 + \frac{1}{x-1}$  とおくと  
 $\frac{1}{x-1} \neq 0$  より  $y \neq 2$ 。  
値域は 2 以外の全ての実数 である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1)  $f(x) = \sqrt{1-x} - 3$       (2)  $f(x) = -1 + \frac{1}{2x+1}$       (3)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

## < 関数 4 >

例 1 対数関数  $f(x) = \log_4(x - 2)$

を考える。一般に対数

$$\bigcirc = \log_4 \square$$

に対し、 $\square$ 内にはいる数を真数  
という。上の対数を指数の形に  
すると

$$\square = 4^{\bigcirc} > 0$$

より真数は正でなければならない。

従って真数  $= x - 2 > 0$  より

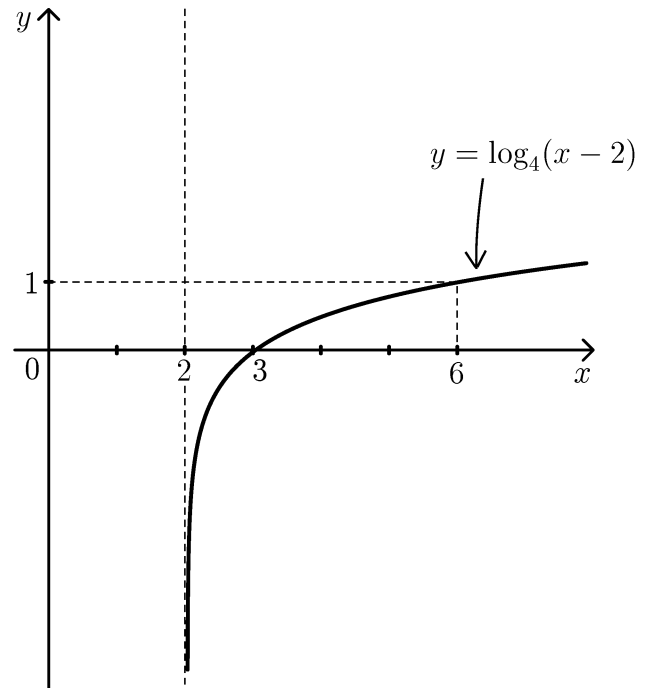
$f(x)$  の 定義域は  $x > 2$  である。

又  $y = \log_4(x - 2)$  とおくと

$$x - 2 = 4^y$$

となり指数  $y$  に制限はないので

値域は実数全体 である。



例 2 指数関数  $f(x) = 2^x + 1$

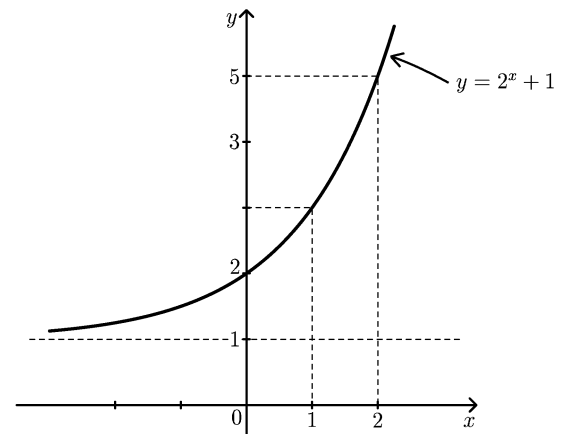
を考える。指数  $x$  に制限はない

ので  $f(x)$  の 定義域は実数全体

である。一方  $y = 2^x + 1$  とおくと

$2^x > 0$  より  $2^x + 1 > 1$  であるから

値域は  $y > 1$  である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1)  $f(x) = \log_3(1 - x)$

(2)  $f(x) = 3^{2x} - 1$

(3)  $f(x) = \log_4(2^x)$

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

## < 関数 5 >

例 1 三角関数  $f(x) = 3 + 2 \sin x$  を考える。正弦関数の角度  $x$  の範囲に制限はないから、関数  $f(x)$  の 定義域は実数全体 である。

一方

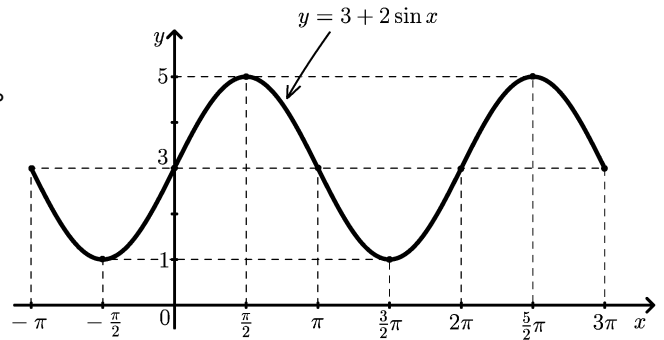
$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

より

$$1 \leq 3 + 2 \sin x \leq 5$$

だから 値域は  $1 \leq y \leq 5$  である。



例 2 関数  $f(x) = \tan(2x)$  を考える。一般に  $\tan(\square)$  は  $\square \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) という制限があるから

$$\square = 2x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

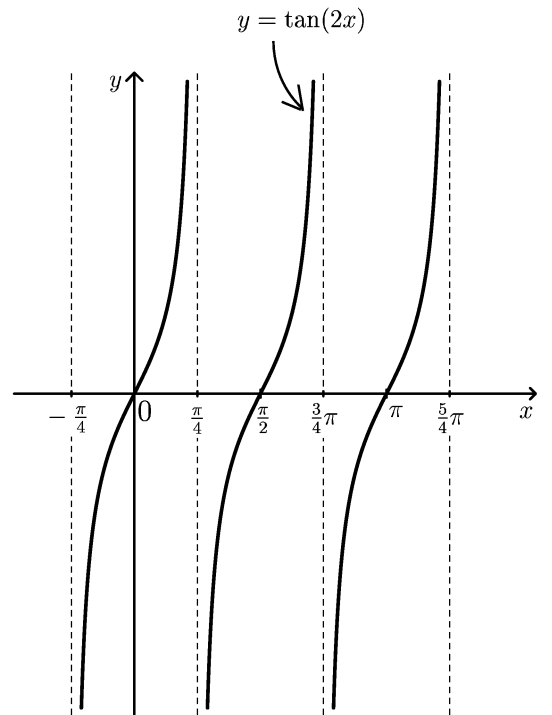
より

$$x \neq \frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi$$

であるから、 $f(x)$  の 定義域は

$$\frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi \text{ (} n \text{ は整数) 以外のすべての実数}$$

である。又 値域は実数全体 である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1)  $f(x) = 1 + \sin(2x)$

(2)  $f(x) = 2 + \frac{1}{3} \cos x$

(3)  $f(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

定義域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

値域 \_\_\_\_\_

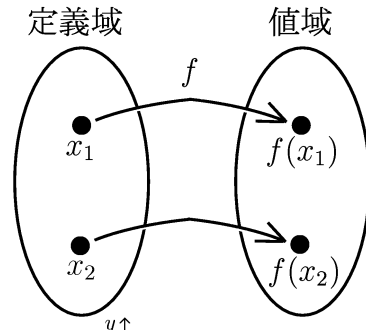
(ヒント)  $-1 \leq \sin(2x) \leq 1$  ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$

## < 1 対 1 関数 >

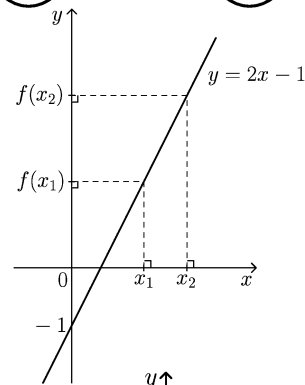
関数  $y = f(x)$  について、定義域内の  $x$  の値が異なれば、それに対応する  $y$  の値も異なるとき、つまり

(\*)  $x_1 \neq x_2$  ならば  $f(x_1) \neq f(x_2)$

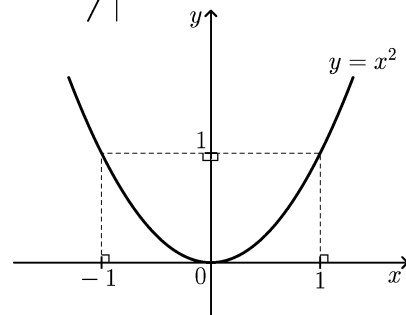
が成り立つとき、関数  $y = f(x)$  は 1 対 1 であるという。



例 1  $f(x) = 2x - 1$  のとき、  
関数  $y = f(x)$  は 1 対 1 である。



例 2  $f(x) = x^2$  のとき、  
定義域を実数全体とすれば、関数  $y = f(x)$  は 1 対 1 ではない。  
なぜなら、 $x_1 = -1$  ,  $x_2 = 1$  のとき  
 $f(x_1) = f(x_2) = 1$



となり (\*) 式が成立しないから。

(注) このような  $x_1$  ,  $x_2$  が 1 組でもあれば 1 対 1 ではない。

問 次の関数が 1 対 1 であるかどうか判定せよ。

(1)  $y = 3x - 2$

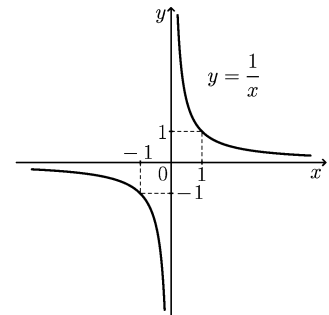
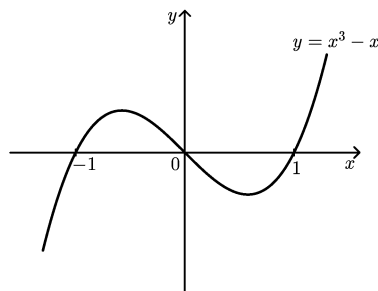
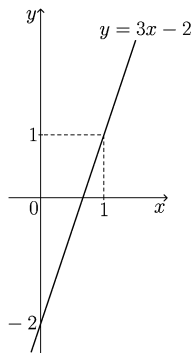
(2)  $y = x^3 - x$

(3)  $y = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )

(答) \_\_\_\_\_

(答) \_\_\_\_\_

(答) \_\_\_\_\_



## < 逆関数 1 >

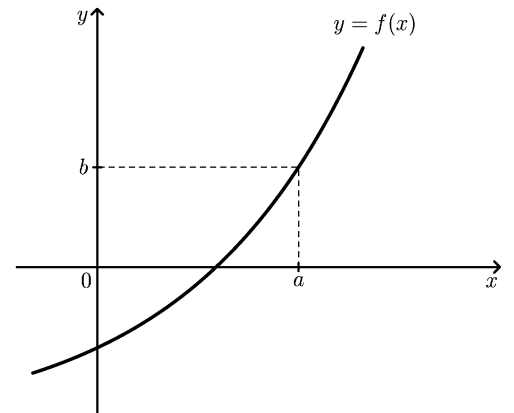
関数  $f(x)$  が 1 対 1 であるとき、 $y$  の値  $b$  に対して、

$$b = f(a)$$

となるような  $x$  の値  $a$  がただ 1 つ定まる。このとき

$$a = f^{-1}(b)$$

と書く。



例  $f(x) = 2x - 1$  のとき、

関数  $y = f(x)$  は 1 対 1 である。

$$b = f(a)$$

とおくと、 $f(a) = 2a - 1$  より

$$b = 2a - 1$$

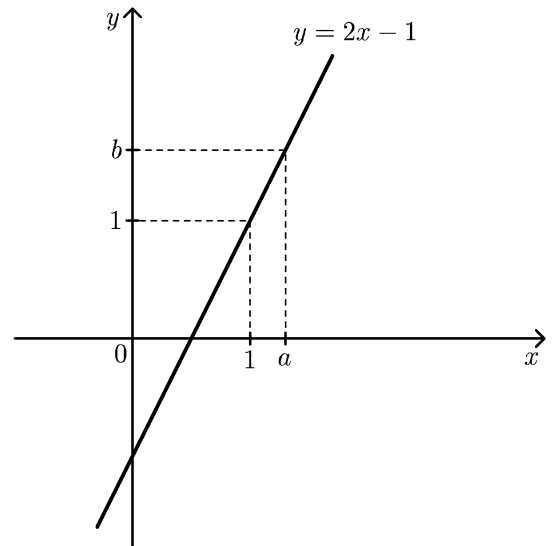
である。これを  $a$  について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。 $a = f^{-1}(b)$  であるから

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。



問  $f(x)$  が以下の場合に、関数  $y = f(x)$  はすべて 1 対 1 である。

このとき上の例のように  $f^{-1}(b)$  を  $b$  に関する式で表せ。

(1)  $f(x) = 3x - 2$

(2)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

(3)  $f(x) = \sqrt{x+1}$

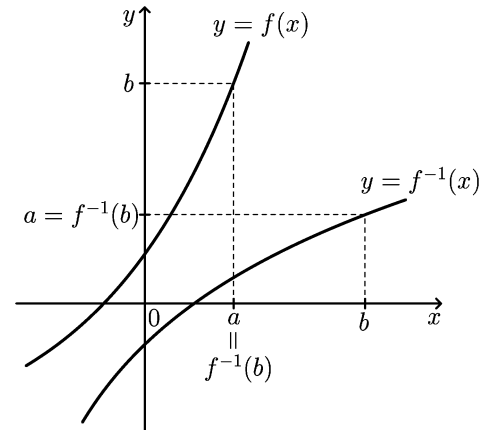
( 解 )

( 解 )

( 解 )

## < 逆関数 2 >

関数  $y = f(x)$  が 1 対 1 のとき、 $y$  の値  $b$  に  $x$  の値  $f^{-1}(b)$  を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を  $y = f^{-1}(x)$  と表して、関数  $y = f(x)$  の逆関数という。



例  $f(x) = 2x + 1$  の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

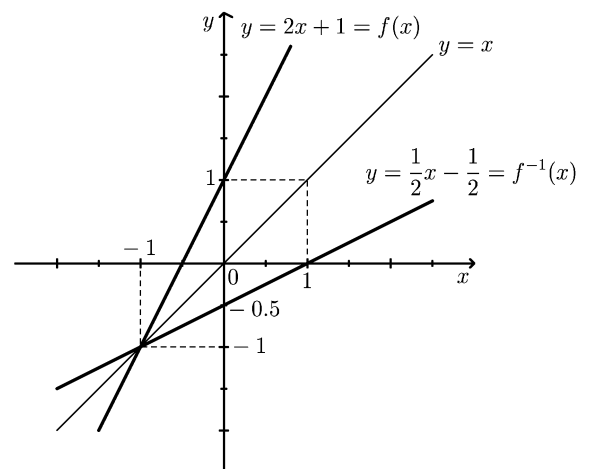
$$b = 2a + 1 \iff \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = a = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

元の関数  $y = f(x)$  と逆関数  $y = f^{-1}(x)$  のグラフを同じ座標平面上に書くと、右図のように直線  $y = x$  に関して対称になる。



問  $f(x)$  が以下の場合に、逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。

(1)  $f(x) = 3x - 2$

(2)  $f(x) = \frac{2}{x} - 1$

(3)  $f(x) = \sqrt{3x}$

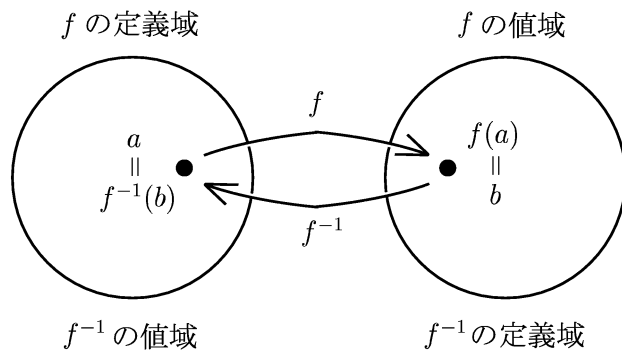
(解)

(解)

(解)

### < 逆関数 3 >

関数  $y = f(x)$  が1対1であるとき、関数  $f$  の値域は逆関数  $f^{-1}$  の定義域であり、関数  $f$  の定義域は逆関数  $f^{-1}$  の値域になっている。



例  $f(x) = x^2 + 1$  のとき、 $f$  の定義域を  $x \geq 0$  に制限すれば  $y = f(x)$  は1対1にある。この逆関数を以下のようにして求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

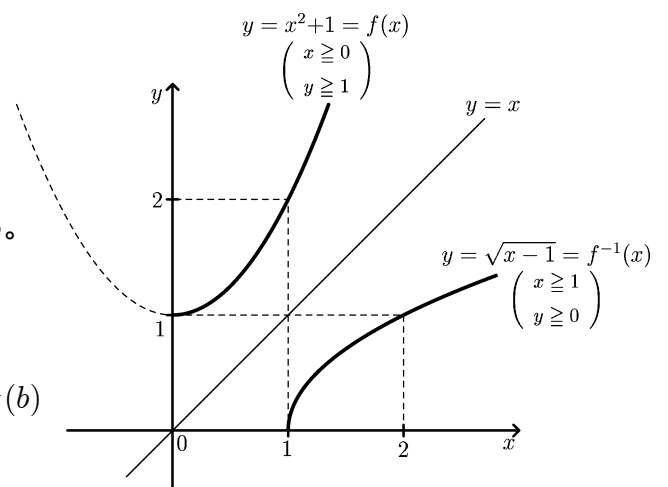
より

$$b = a^2 + 1 \iff a = \sqrt{b-1} = f^{-1}(b) \quad (a \geq 0, b \geq 1) \quad (a \geq 0, b \geq 1)$$

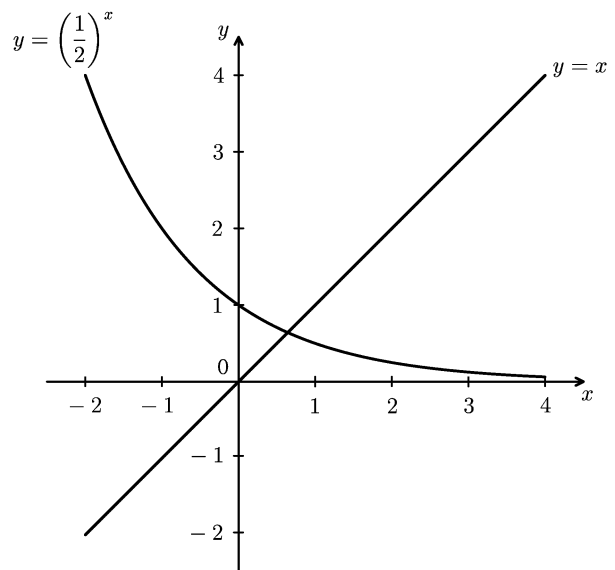
となる。 $b$  を  $x$  でおきかえると、逆関数

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad (\text{定義域 } x \geq 1)$$

が求まる。 $y = f(x)$  と  $y = f^{-1}(x)$  のグラフは右図のように直線  $y = x$  に関し、対称になる。



問 指数関数  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  の逆関数を求め、グラフを右図に書け。

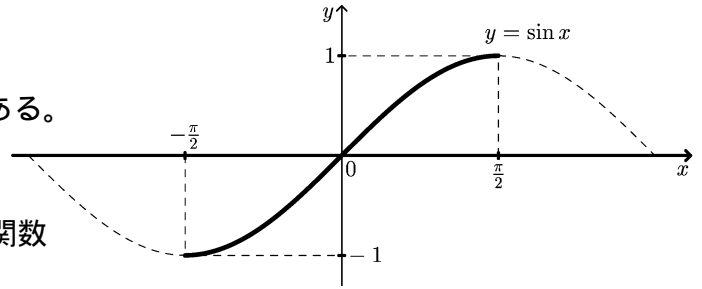


## < 逆三角関数 1 >

正弦関数  $y = \sin x$  の通常の見方は、  
実数全体であり、値域は  $-1 \leq y \leq 1$  である。

この関数の定義域を  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  に  
制限すると、1対1になる。このとき、関数

$$y = \sin x \quad \left( \text{定義域 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 値域 } -1 \leq y \leq 1 \right)$$



の逆関数が存在して、これを、

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arcsin x \quad \left( \text{定義域 } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域 } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

(インバースサイン) (アークサイン)

と表す。  $y = \sin^{-1} x$  のグラフは、  $y = \sin x$  のグラフを  
直線  $y = x$  に関して対称におり返したものである。

問 1 右の座標平面上に  $y = \sin^{-1} x$  のグラフを書け。

例 逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

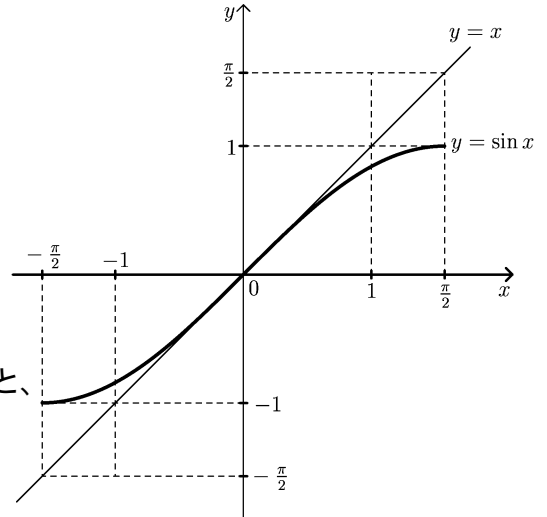
である。たとえば  $\sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \right)$  の値  $\theta$  を求めようとするとき、

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) \iff \frac{1}{2} = \sin \theta$$

より、  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で  $\sin$  が  $\frac{1}{2}$  となる角度  $\theta$  を求める。表より  $\theta = \frac{\pi}{6}$  であるから、

$\theta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

$$(\text{答}) \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$



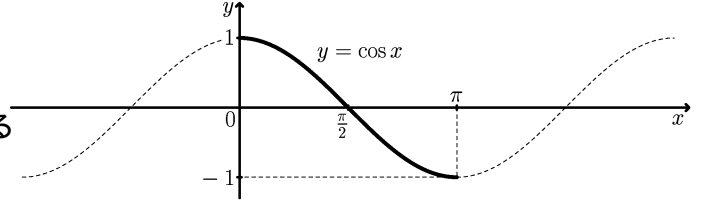
問 2 上の表を完成せよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \quad (2) \sin^{-1} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \quad (3) \sin^{-1} (-1) =$$

## < 逆三角関数 2 >

余弦関数  $y = \cos x$  の通常の実数全体であり、値域は  $-1 \leq y \leq 1$  である。この関数の定義域を  $0 \leq x \leq \pi$  に制限すると、1対1になる。そのとき、関数



$$y = \cos x \quad (\text{定義域 } 0 \leq x \leq \pi, \text{ 値域 } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在し、これを

$y = \cos^{-1} x$  又は  $y = \arccos x$  (定義域  $-1 \leq x \leq 1$ , 値域  $0 \leq y \leq \pi$ ) (インバースコサイン) (アークコサイン)

と表す。 $y = \cos^{-1} x$  のグラフは  $y = \cos x$  のグラフを直線  $y = x$  に関して対称におり返したものである。

問 1 右図の座標平面上に  $y = \cos^{-1} x$  のグラフを書け。

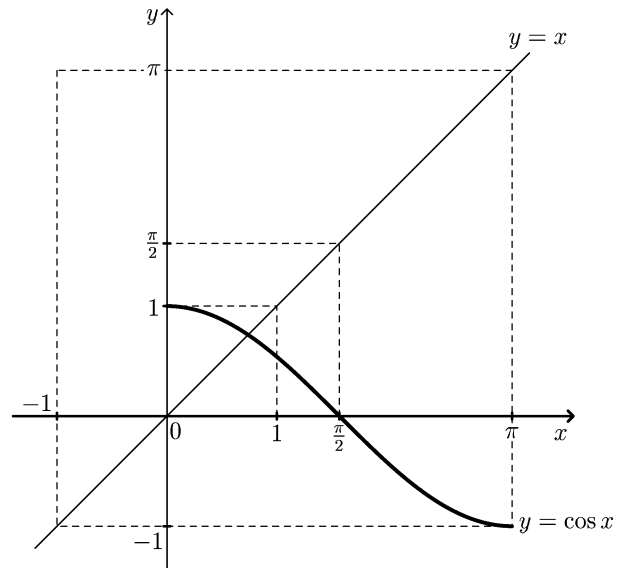
例 逆関数の定義より、

$$a = \cos^{-1} b \iff b = \cos a$$

である。たとえば  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  の

値  $\theta$  を求めようとするとき、

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \cos \theta$$



より、 $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲で、 $\cos \theta$  が  $\frac{1}{2}$  となる角度  $\theta$  を求める。右表より

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos \theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

$\theta = \frac{\pi}{3}$  であるから (答)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

問 2 表を完成せよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1)  $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$       (2)  $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$       (3)  $\cos^{-1}(0) =$

### < 逆三角関数 3 >

正接関数  $y = \tan x$  の通常の実数定義域は

$\frac{\pi}{2} + n\pi$  ( $n$  は整数) 以外の実数であり、

値域は実数全体である。この関数の

定義域を  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  に制限すると、

1対1になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad \left( \text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: 実数全体} \right)$$

の逆関数が存在し、これを、

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arctan x \quad \left( \text{定義域: 実数全体, 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

(インバースタンジェント)(アークタンジェント)

と表す。 $y = \tan^{-1} x$  のグラフは  $y = \tan x$  のグラフを直線  $y = x$  に関して対称におり返したものである。

問 1 右の座標平面上に  $\tan^{-1} x$  のグラフを書け。

例 逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。たとえば、 $\tan^{-1}(\sqrt{3})$  の値  $\theta$  を求めようとするとき、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で、 $\tan \theta$  が

$\sqrt{3}$  となる角度  $\theta$  を求める。右表より

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ であるから (答) } \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

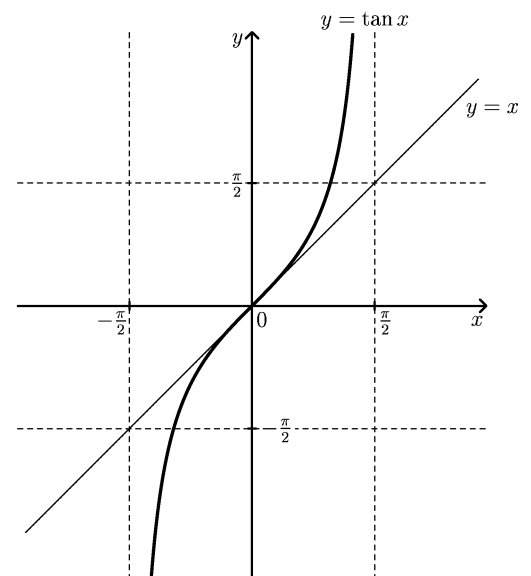
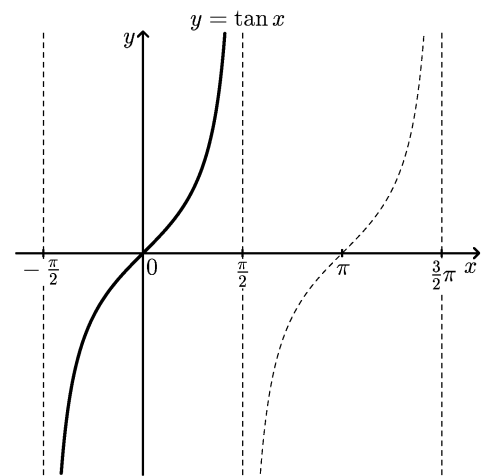
問 2 表を完成せよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1)  $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

(2)  $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$

(3)  $\tan^{-1}(-1) =$



$\theta$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan \theta$				0			$\sqrt{3}$

## < 数列 >

ある規則に従って並んでいる数の列を数列という。数列の各数を項といい、最初の項から順に、第1項、第2項、…、第 $n$ 項と呼ぶ。特に第1項を初項という。

例 次の数列

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

は初項が1、第2項が4、第3項が9であるが、これを

$$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$$

と書き直すと、第 $n$ 項は $n^2$ であることがわかる。

第 $n$ 項が $n$ についての式で書けるとき、これを一般項と言う。第 $n$ 項が $a_n$ である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

例題 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第4項までを求めよ。

(1)  $a_n = 2n - 4$

(2)  $a_n = 3 \times 2^n$

(解) (1)  $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 4$

(2)  $a_1 = 6, a_2 = 12, a_3 = 24, a_4 = 48$

問 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第4項までを求めよ。

(1)  $a_n = 3 - 2n$

(解)  $a_1 =$  ,  $a_2 =$  ,  $a_3 =$  ,  $a_4 =$

(2)  $a_n = n^2 - 2n$

(解)  $a_1 =$  ,  $a_2 =$  ,  $a_3 =$  ,  $a_4 =$

(3)  $a_n = \frac{2}{n}$

(解)  $a_1 =$  ,  $a_2 =$  ,  $a_3 =$  ,  $a_4 =$

(4)  $a_n = 8 \times (0.5)^n$

(解)  $a_1 =$  ,  $a_2 =$  ,  $a_3 =$  ,  $a_4 =$

## < 等差数列 >

数列の各項と1つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を等差数列といい、前の項との差を公差という。

### 例1 奇数列

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

は初項1、公差2の等差数列である。

### 例2 数列

$$4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

は初項4、公差3の等差数列である。一般項を  $a_n$  とすると

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 13, a_5 = 16$$

であるが、

$$a_2 = 4 + 3$$

$$a_3 = 4 + 3 \times 2$$

$$a_4 = 4 + 3 \times 3$$

$$a_5 = 4 + 3 \times 4$$

と考えると、一般項は  $a_n = 4 + 3 \times (n - 1)$  である。

### 問1 初項が $a$ 、公差が $d$ の等差数列

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots$$

の一般項  $a_n$  を求めよ。

(答)  $a_n =$

### 問2 例1の一般項 $a_n$ を求めよ。

(解)

## < 等差数列の和 >

例題 1 から 100 までの和を求めよ。

(解)  $S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$  を逆に並べて、加えると 101 が 100 個できる。

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ +) S = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 = 101 \times 100 \end{array}$$

よって  $S = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$  である。

問 1 1 から  $n$  までの和

$S = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n$  を求めよ。

(解)

問 2 偶数の第 100 項までの和

$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 196 + 198 + 200$  を求めよ。

(解)

## <等比数列 1>

数列の各項と一つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を等比数列といい、前の項との比を公比という。

### 例 1 数列

$$5, 10, 20, 40, 80, 160, \dots$$

は、前の項を 2 倍してできる数列であるから、初項 5、公比 2 の等比数列である。

問 1 次の等比数列の初項と公比を求めよ。

(1)  $5, 15, 45, 135, \dots$       初項 =      , 公比 =

(2)  $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$       初項 =      , 公比 =

(3)  $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$       初項 =      , 公比 =

(4)  $1, -1, 1, -1, \dots$       初項 =      , 公比 =

問 2 次の数列が等比数列になるように  に適当な正の数を入れよ。

(1)  $1, -3, \text{  }, -27, \text{  }$

(2)  $1, \text{  }, 16, \text{  }$

## <等比数列2>

例 数列

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$

は初項3、公比2の等比数列で、一般項を  $a_n$  とすると、

$$a_1 = 3, a_2 = 3 \times 2, a_3 = 3 \times 2^2, a_4 = 3 \times 2^3, a_5 = 3 \times 2^4, \dots$$

であるから、

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

になる。

(注)  $2^0 = 1$ (ゼロ乗 = 1) であるから、 $n = 1$  のとき  $a_1 = 3 \times 2^0 = 3$

問1 初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$$

の一般項  $a_n$  を求めよ。 (答)  $a_n =$

問2 次の等比数列の一般項  $a_n$  を求めよ。

(1)  $1, 3, 9, 27, 81, \dots$  (答)  $a_n =$

(2)  $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$  (答)  $a_n =$

## < 等比数列の和 >

例題 初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解)  $S$  に公比 3 をかけて、 $S$  から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{r} S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\ -) 3S = \quad 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\ \hline -2S = 5 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -5 \times 3^{100} \end{array}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \frac{5(3^{100} - 1)}{2}$$

問 1 例題と同じ数列で、第  $n$  項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$$

を求めよ。

(解)

問 2 初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の第  $n$  項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

を求めよ。

(解)

## < 数列の類推 >

例題 奇数列  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  の第  $n$  項までの和を

$$a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1)$$

とする。第  $n$  項までを求め、一般項を類推せよ。

$$\begin{aligned} \text{(解)} \quad a_1 &= 1, & a_2 &= 1 + 3 = 4 = 2^2, & a_3 &= 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2, \\ a_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, & a_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \end{aligned}$$

より  $a_n = n^2$  と類推される。

問1 数列

$$a_n = \frac{6}{n(2n+1)} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

に対し、第5項まで求め、一般項を類推せよ。

$$a_1 = \quad , \quad a_2 = \quad , \quad a_3 = \quad$$

$$a_4 = \quad , \quad a_5 = \quad$$

$$a_n = \quad$$

問2 2つの数列

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n, \quad b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

に対し、共に第4項まで求め、 $b_n$  を  $a_n$  で表せ。

$$a_1 = \quad , \quad a_2 = \quad , \quad a_3 = \quad , \quad a_4 = \quad$$

$$b_1 = \quad , \quad b_2 = \quad , \quad b_3 = \quad , \quad b_4 = \quad$$

$$b_n = \quad$$

## < 数列の極限 1 >

項がかぎりなく続く数列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$$

を無限数列という。この無限数列において、 $a_n$  を第  $n$  項または一般項といい、上の無限数列を、単に  $\{a_n\}$  と表す。

数列  $\{a_n\}$  の極限のようす、つまり  $n$  をかぎりなく大きくしていくとき、項  $a_n$  の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

$n$  をかぎりなく大きくすることを、 $n \rightarrow \infty$  と表す。

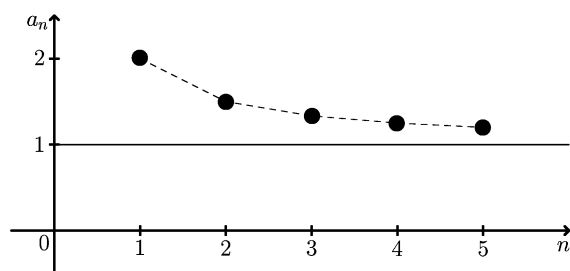
(注) 記号  $\infty$  は「無限大」と読む。

### 例 1 数列

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$$

の極限を考える。右図のように、

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n = \frac{n+1}{n}$  の値は減少しながら、1にかぎりなく近づいていく。

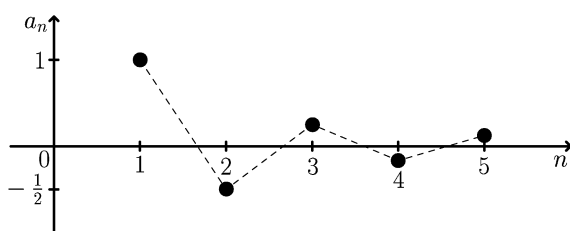


### 例 2 数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

の極限を考える。右図のように、

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  の値は増減を繰り返しながら、0に限りなく近づいていく。



問 次の数列の極限の様子を調べよ。

$$2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{2n}{2n-1}, \dots$$

## < 数列の極限 2 >

無限数列  $\{a_n\}$  において、 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n$  の値が一定の数  $\alpha$  に限りなく近づく場合に  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するといひ、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha$$

または

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき  $\alpha$  を数列  $\{a_n\}$  の極限值という。

例 1 前ページの例より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

例 2  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  であるから、グラフを見なくても

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

等がわかる。

例 3  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{2}{n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

問. 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-7}{2n+11} =$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 5}{3n^2 + 1} =$$

### < 数列の極限 3 >

数列には、一定の値に収束しないものがある。数列  $\{a_n\}$  が収束しないとき、 $\{a_n\}$  は発散するという。

例 1 数列  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$

を考える。  $n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n = n^2$  は限りなく大きくなる。

例 1 のようなとき、数列  $\{a_n\}$  は正の無限大に発散するといひ、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \infty \text{ (又は } a_n \rightarrow +\infty)$$

または  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (又は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ) と表す。

例 2 数列  $2, 0, -2, \dots, 4 - 2n, \dots$

を考える。  $n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n = 4 - 2n$  は負の値をとりながら、その絶対値は限りなく大きくなる。

例 2 のようなとき、数列  $\{a_n\}$  は負の無限大に発散するといひ、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow -\infty$$

または  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

と表す。例 2 の場合は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - 2n = -\infty$  となる。

問 次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - n^2) =$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - n) =$

## <数列の極限 4>

例 1 次のような数列も発散する数列である。

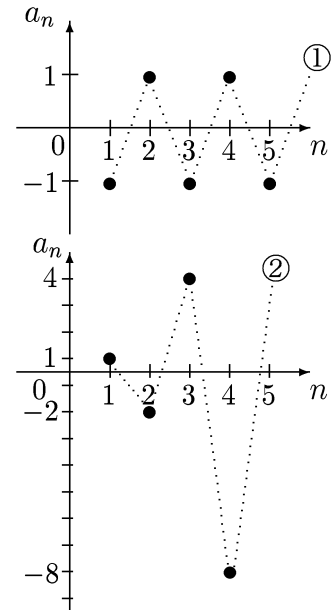
$$-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$1, -2, 4, -8, \dots, (-2)^{n-1}, \dots$$

数列  $\{a_n\}$  では  $n$  を限りなく大きくしても、一定の値に収束しないし、正の無限大にも、負の無限大にも発散しない。このような数列は振動するという。

発散する数列  $\{a_n\}$  は次のような場合がある。

- (1) 正の無限大に発散  $\dots \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
- (2) 負の無限大に発散  $\dots \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- (3) 振動する



例 2

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty$$

(4) 数列

$$-\frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \dots, \left(-\frac{4}{3}\right)^n, \dots$$

は振動する。

問 次の数列の極限を調べ、例 2 のように答えよ。

$$(1) \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^n, \dots$$

$$(2) \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \dots$$

$$(3) -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots, \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \dots$$

$$(4) -\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \dots, \left(-\frac{3}{2}\right)^n, \dots$$

$$(5) -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, -\frac{81}{16}, \dots, -\left(\frac{3}{2}\right)^n, \dots$$

## < 無限級数 >

無限級数  $\{a_n\}$  の各項を順に加えていった式

$$(1) a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を無限級数という。数列  $\{a_n\}$  について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第  $n$  項までの部分和という。部分和を作る数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

が収束して、その極限值が  $S$  (つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ) のとき、無限級数

(1) は  $S$  に収束するといひ、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、 $S$  を無限級数の和という。

例 無限級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分 and を  $S_n$  とすると

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

$$-) \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{2^{n+1}}$$

より

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  だから

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

(注) この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を無限等比級数という。

問 次の無限級数の和  $S$  を求めよ。

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$$

## < 循環小数 >

例 1  $\frac{1}{3}$  を小数にすると、 $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$  であり、3 が無限に続く。

$\frac{4}{11}$  を小数にすると、 $\frac{4}{11} = 0.363636\cdots$  であり、3 と 6 が無限に続く。

このように同じ数が無限に繰り返される小数を循環小数という。  
繰り返される最初と最後の数の上にドット (黒丸) を付けて表す。  
例えば、

$$0.333\cdots = 0.\dot{3} \quad , \quad 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$$

$$0.5123123123123\cdots = 0.5\dot{1}\dot{2}\dot{3}$$

等で表す。

例 2 循環小数は分数で表される。例えば  $0.\dot{1}\dot{2} = S$  とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 0.\dot{1}\dot{2} = 0.121212\cdots \\ &= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots \\ &= 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots \end{aligned}$$

のような無限等比級数となる。第  $n$  項までの部分 and を  $S_n$  とおくと、

$$\begin{aligned} S_n &= 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n \\ -) \frac{1}{100} S_n &= 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n + 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{99}{100} S_n &= 12 \times \left(\frac{1}{100}\right) - 12 \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

より  $S_n = \frac{12}{99} - \frac{12}{99} \times \left(\frac{1}{100}\right)^n$  である。 $n \rightarrow \infty$  のとき、 $\left(\frac{1}{100}\right)^n \rightarrow 0$

より

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{12}{99} - \frac{12}{99} \times \left(\frac{1}{100}\right)^n \right\} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

問 次の循環小数を分数になおせ。

(1)  $S = 0.\dot{9} = 0.999\cdots$

(2)  $S = 0.\dot{8} = 0.888\cdots$

## < 関数の極限 >

関数  $f(x)$  において、 $x$  が  $a$  以外の値を取りながら、 $a$  に限りなく近づくとき、 $f(x)$  の値が一定の数  $\alpha$  に限りなく近づくことを、

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

または

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

と表し、 $\alpha$  を  $x \rightarrow a$  のときの  $f(x)$  の極限值という。 $a$  に近づく変数は  $x$  以外でもよい。

$$\text{例 1} \quad \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x) = 10, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+3}{2h+1} = 3$$

$$\text{例 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{例 3} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9+6h+h^2) - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

問 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x+2}{x+1} =$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} =$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} =$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+2h)^2 - 3^2}{h} =$$

## < 平均の変化率 >

関数  $y = f(x)$  について、 $x$  の値が  $a$  から  $b$  に変わるとき、

$x$  の値は  $\Delta x = b - a$

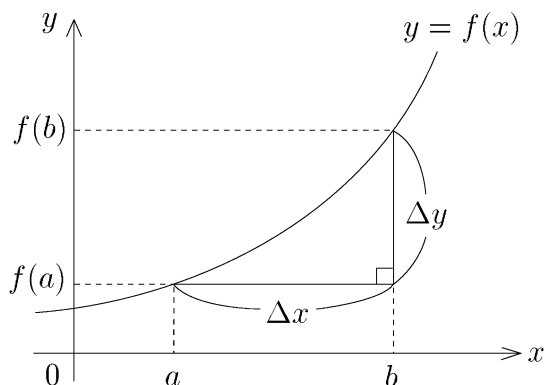
$y$  の値は  $\Delta y = f(b) - f(a)$

だけ変化する。

( $\Delta$  はギリシャ文字で、デルタと読む)

$\Delta x$  を  $x$  の増分

$\Delta y$  を  $y$  の増分 という。



また  $y$  の増分の、 $x$  の増分に対する比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を  $x$  が  $a$  から  $b$  まで変わるときの  $f(x)$  の 平均変化率 という。

例  $f(x) = x^2$  に対し、 $x$  が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

問 1 関数  $f(x)$  が以下の場合に、 $x$  が 1 から 5 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)  $f(x) = 7x$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

(2)  $f(x) = \frac{1}{6}x^2$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

問 2 関数  $f(x)$  が以下の場合に、 $x$  が  $a$  から  $b$  まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)  $f(x) = 3x$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

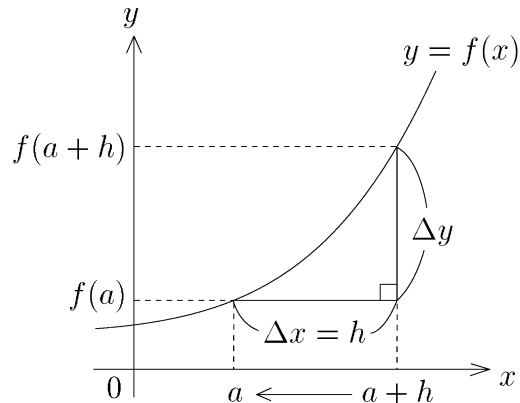
(2)  $f(x) = \frac{x^2}{b + a}$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

## < 微分係数 1 >

関数  $y = f(x)$  に対し,  $x$  の値が  $a$  から  $a + h$  に変わるときの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を考える。



ここで  $x$  の増分  $\Delta x = h$  をかぎりなく 0

に近づけたとき, 平均変化率  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  が, あるきまった数に近づけば、その極限値を, 関数  $y = f(x)$  の  $x = a$  における微分係数 といひ,  $f'(a)$  で表す。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (x = a \text{ における微分係数})$$

例  $f(x) = 5x^2$  の  $x = 3$  における微分係数  $f'(3)$  を求める

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(3+h)^2 - 5 \times 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) - 5 \times 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h + 5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (30 + 5h) = 30 \end{aligned}$$

問  $f(x)$  と  $a$  が以下の場合に  $f'(a)$  を求めよ。

(1)  $f(x) = -3x$ ,  $a = -1$ ,  $f'(-1) =$

(2)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 1$ ,  $f'(1) =$

## < 微分係数 2 >

例 関数  $f(x) = 3x^2$  に対し、次の微分係数を求める。

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \times (1+h)^2 - 3 \times 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) = 6$$
$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \times (2+h)^2 - 3 \times 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+3h) = 12$$

以下同様に  $f'(3)$ ,  $f'(4)$  等を求めたい。

そこで一般に  $x = a$  における微分係数  $f'(a)$  を求めておく。

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \times (a+h)^2 - 3 \times a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6ah + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a+3h) = 6a$$

であるから、 $f'(a) = 6a$  より、 $f'(3) = 6 \times 3 = 18$   $f'(4) = 6 \times 4 = 24$  等が求まる。

このように、同じ関数のいくつかの微分係数は、ひとつひとつを計算しなくても、

$x = a$  における微分係数  $f'(a)$  を求めておいて、  
 $a$  に必要な値を代入することによって求められる。

問 関数  $f(x) = 3x^3$  に対して、次の問を求めよ。

(1)  $f'(a)$  を求めよ。

$$f'(a) =$$

(2)  $f'(-1)$ ,  $f'(0)$ ,  $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ,  $f'(2)$  を求めよ。

$$f'(-1) = \qquad f'(0) = \qquad f'\left(\frac{1}{3}\right) = \qquad f'(2) =$$