高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

秋期入学者用

I

内容

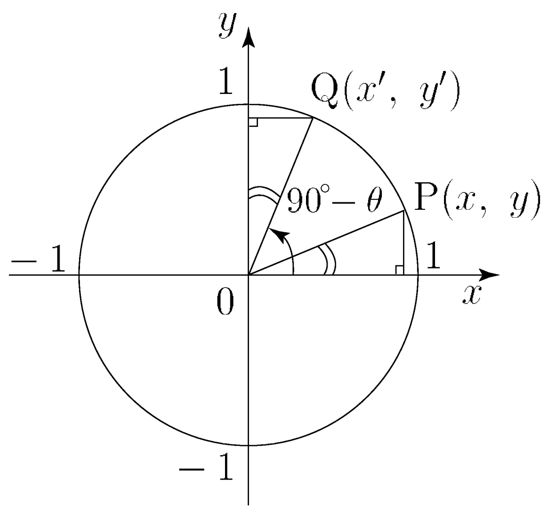
◎　式の計算

◎　整式

◎　指数

◎　対数

◎　三角関数



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

< 数の表示 >

数を表すのにアラビア文字や漢数字が使われるが、まれにローマ字も見られる。

アラビア数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000
漢数字	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	五十	百	五百	千
ローマ数字	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M

数学では主にアラビア数字を使うので、これを算用数字ともいう。
漢数字では一が 10 個集まって十、十が 10 個集まって百、百が 10 個集まって千と 10 個ごとに大きい数になる。この一、十、百、千、$\cdots$ を**位** (くらい) という。
アラビア数字では 1 , 10 , 100 , 1000 , $\cdots$ となり、0 の個数で位がわかる。10 個ごとに位が上がるのを **10 進法**という。10 進法で 4 桁の数、たとえば 5467 は

$$5467 = 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 6 \times 10 + 7 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

という意味である。このように 10 進法で表される数を **10 進数**といい、
10 進数で表されることを明記する必要がある場合、5467 を $(5467)_{10}$ と書く。

$$(5467)_{10} = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

これに対し 8 進法で 4 桁の数 $(5467)_8$ は

$$(5467)_8 = 5 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 6 \times 8 + 7 = (2871)_{10}$$

となる。$(5467)_8$ のように 8 進法で表される数を **8 進数**という。
(注)　8 進法では 0 から 7 までの数しか使われない。
　　　2 進法では 0 と 1 しか使わない。

例　$(10101)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = (21)_{10}$

問　以下の 8 進数または 2 進数を 10 進数になおせ。

(1) $(54)_8$　　　　(2) $(237)_8$

(3) $(1111)_2$　　　　(4) $(100000)_2$

< 数の分類 >

$1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ のような数を**自然数**または**正の整数**といい、$-1, -2, -3, -4, -5, \cdots$ を**負の整数**という。正の整数と負の整数に 0 を合わせた数を**整数** $(integer)$ という。整数 m と自然数 n によって $\dfrac{m}{n}$ のように分数の形で表される数を**有理数** $(rational\ number)$ という。$n = 1$ のときは $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m}{1} = m$ となるので、整数は有理数である。また小数も有理数である。

例 1 $3.7 = \dfrac{37}{10}$, $0.12 = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$, $1.045 = \dfrac{1045}{1000} = \dfrac{209}{200}$

逆に有理数を小数で表すと、どこかで割り切れるか、どこまでいっても割り切れない無限小数になる。

例 2 (1) $\dfrac{3}{8} = 0.375$

(2) $\dfrac{1}{9} = 0.11111\cdots$

(3) $\dfrac{13}{99} = 0.13131313\cdots$

(4) $\dfrac{157}{999} = 0.157157157157\cdots$

この例 (2) ～ (4) のような小数を**循環小数**という。
一方 $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$ や円周率 $\pi = 3.1415926\cdots$ のようにどこまでいってもくり返しが現れない無限小数がある。これらのように有理数でない数を**無理数** $(irrational\ number)$ といい、有理数と無理数を合わせた集合を**実数** $(real\ number)$ という。

$$
\text{実数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数} = \text{自然数}\ (1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots) \\ 0 \\ \text{負の整数}\ (-1\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ \cdots)\end{cases} \\
\text{整数でない有理数 (分数)}\begin{cases}\text{有限小数}\ \left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ -\frac{5}{4}\ ,\ \cdots\right) \\ \text{循環小数}\ \left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{13}{99}\ ,\ \cdots\right)\end{cases}
\end{cases} \\
\text{無理数}\cdots\ \text{循環しない無限小数}\ (\sqrt{2}, \pi, \cdots)
\end{cases}
$$

問 次の有理数を例 2 のように小数で表せ。

(1) $\dfrac{3}{16}$ (2) $\dfrac{5}{9}$ (3) $\dfrac{8}{9}$ (4) $\dfrac{23}{99}$

＜ギリシャ文字とアルファベット＞

数学の教科書で数を表す文字としてギリシャ文字や英語のアルファベットが使われる。ギリシャ文字は１種類の活字体しかないが、アルファベットは筆記体と活字体があり、活字体は立体 (ローマン体) と斜体 (イタリック体) がある。

＜ギリシャ文字＞

小文字	大文字	英語名	読み方
α	A	alpha	アルファ
β	B	beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ	E	epsilon	イプシロン
ζ	Z	zeta	ツェータ
η	H	eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι	I	iota	イオタ
κ	K	kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ	M	mu	ミュー
ν	N	nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ
o	O	omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ
ρ	P	rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ	T	tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン (ユプシロン)
$\phi(\varphi)$	Φ	phi	ファイ
χ	X	chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

＜アルファベット＞

立体小文字	立体大文字	斜体小文字	斜体大文字
a	A	a	A
b	B	b	B
c	C	c	C
d	D	d	D
e	E	e	E
f	F	f	F
g	G	g	G
h	H	h	H
i	I	i	I
j	J	j	J
k	K	k	K
l	L	l	L
m	M	m	M
n	N	n	N
o	O	o	O
p	P	p	P
q	Q	q	Q
r	R	r	R
s	S	s	S
t	T	t	T
u	U	u	U
v	V	v	V
w	W	w	W
x	X	x	X
y	Y	y	Y
z	Z	z	Z

(注 1) 大学の数学ではほとんど全ての種類のギリシャ文字を使用する。
以下の文字は間違えやすいので区別がつくように書くこと。
d と α(アルファ) , r と ɣ(ガンマ) , x と χ(カイ) , w と ω(オメガ)

(注 2) アルファベット立体小文字の x は積の $\times$ とよく似ているため立体小文字の x はほとんど使われない。未知数を表すときは必ず斜体小文字の x を使う。次のページで詳しく解説するが、数学の教科書では文字の用途に応じた字体を使用する。

＜文字の用途と字体＞

前ページで書いたように、数学の教科書では「数を表す文字」と「それ以外のものを表す文字」で明確に字体を区別している。

1.「**数を表す文字**は**アルファベットの斜体**または**ギリシャ文字**を使う」

特に以下のような場合によく使われる文字を紹介する。

(1) $1, 2, 3, \cdots$ などの自然数は n , m , k , i , j , ℓ 等

(2) 未知数や変数には x , y , z , w , t , u , v , r 等

(3) 指数、次数には n , p , q , r 等

(4) 係数、定数には a , b , c , d , α , β , γ 等

(5) 関数には f , g , h , $\cdots$ 等

その他特別な数を表す場合がある。たとえば円周率 π、ネピアの数 e、虚数単位 i (または j)、重力加速度 g 等である。

2.「**単位を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 長さ $\cdots$ km , m , cm , mm

(2) 質量 $\cdots$ kg , g

(3) 時間 $\cdots$ h , min , s

その他、角度 (rad)、力 (N,kgf)、熱量 (cal)、電流 (A)、電圧 (V) など全て立体である。ただし μm (マイクロメートル) や抵抗 Ω (オーム) のようにギリシャ文字を使うこともある。しかしアルファベットの斜体は使わない。

3.「**特殊な関数**や**数学記号**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 特殊な関数 $\cdots$ sin , cos , tan , log , exp など

(2) 数学記号 $\cdots$ lim(極限) , det(行列式) など

4.「**点や図形を表す文字**は**アルファベットの立体**を使う」

(1) 点を表す文字 $\cdots$ P , Q , A , B , C などがよく使われる。

(2) 図形を表す文字 $\cdots$ 線分 AB , 三角形 ABC など

(注 1) 立体で AB と書いた場合は点 A と点 B の間の**距離**を意味する。
斜体で AB と書いた場合は数 A と数 B との**積** $AB = A \times B$ を意味する。
この使い分けを特に注意すること !!

(注 2) 上記 **2,3,4** のように立体で書く文字は数学の中の**固有名詞**と考えればよい。

(注 3) 未知数がたくさんあるときはアルファベットやギリシャ文字では数が足りないことがある。たとえば未知数が 100 個あるときは、未知数を $x, y, z, \cdots$ と書くかわりに

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ \cdots \ , x_{100}$$

と書く。x の右下の小さな文字を 添(そえ) 字という。x_2 は未知数 y のかわりで、$x \times 2$ ではない！

< 文字式の計算1>

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。
文字式の四則演算 (加減乗除) は数の四則演算と同じであるが、
特に以下のようなきまりがある。

< 文字式のきまり >	1. 文字式では積の記号 $\times$ は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側 , 文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表わす。 5. $+, -$ より $\times, \div$ が優先する。

例 (1) $a \times a \times a \times b \times x \times x = a^3 \times b \times x^2 = a^3bx^2$ ($\times$ を省略)

(アルファベットの積は a^3bx^2 のようにアルファベットの順に $a, b, c, \cdots, x, y, z$ に従って左側から書いていく。)

(2) $a \times 4 \times b \times x \times 5 = 4 \times 5 \times a \times b \times x = 20abx$

(3) $\left(4a^2b\right) \div \left(6ab^2\right) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{2a}{3b}$

($\frac{2a}{3b}$はこれ以上簡単にできない。このような分数を**既約分数**という)

(4) $5 \times x \times x + x + x + x - x \div x \times x = 5x^2 + 2x$

(5) $a \times b \div c \times d \div x \times y \div z = \dfrac{abdy}{cxz}$

問 次の式を簡単にせよ。

(1) $x \times x \times x + x + x$

(2) $2 \times a \times b \times a - b \times b \times 3 \times a$

(3) $x \times y \div x \times y$

(4) $a \times b + b + b + b \times 2$

(5) $5 \times x - 4 \times y + x \times 3$

(6) $a \times b \div a \times a \div b \times c$

(7) $\left(3x^2y\right) \times \left(4xy^3\right) \div \left(6x^3y\right)$

(8) $\left(10a^3bc\right) \div \left(2abc^3\right) \times \left(8ab^2c^3\right)$

＜文字式の計算2＞

例 (1)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b \\ &= (a^3+2a^2b+ab^2) + (a^2b+2ab^2+b^3) \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) \\ &= (a+b+c)a + (a+b+c)b + (a+b+c)c \\ &= (a^2+ab+ac) + (ab+b^2+bc) + (ac+bc+c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\end{aligned}$$

問 次の式を例のように展開せよ。

(1) $(a-b)(a+b)$

(2) $(a-b)^2$

(3) $(a-b)^3$

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(6) $(a-b+c)^2$

＜文字式の計算3＞

分数は分母と分子に同じ数をかけると元の分数と等しい。
分数の計算は全てこの原理の応用である。

例1 (通分)

① $\dfrac{2}{3}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2x}{3x}+\dfrac{3y}{3x}=\dfrac{2x+3y}{3x}$

② $\dfrac{b}{a}-\dfrac{d}{c}=\dfrac{bc}{ac}-\dfrac{ad}{ac}=\dfrac{bc-ad}{ac}$

問1 次の分数を通分せよ。

(1) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{y}{x}$

(2) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{y}{x}$

(3) $\dfrac{2b}{3a}+\dfrac{4d}{5c}$

(4) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}$

例2

① $\dfrac{1}{\frac{b}{a}}=\dfrac{1\times a}{\left(\frac{b}{a}\right)\times a}=\dfrac{a}{b}$

② $\dfrac{\frac{d}{b}}{\frac{c}{a}}=\dfrac{\left(\frac{d}{b}\right)\times ab}{\left(\frac{c}{a}\right)\times ab}=\dfrac{ad}{bc}$

③ $\dfrac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{a+b}{\frac{b+a}{ab}}=\dfrac{(a+b)\times ab}{\left(\frac{a+b}{ab}\right)\times ab}=\dfrac{(a+b)ab}{a+b}=ab$

問2 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\frac{b}{a}}{1}$

(2) $\dfrac{\frac{1}{y}}{x}$

(3) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{c}$

(4) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+x}$

(5) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$

(6) $\dfrac{\frac{1}{abc}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

＜整式１＞

10 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 9 までの数字である。
8 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_8 = a \times 8^3 + b \times 8^2 + c \times 8 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は 0 から 7 までの数字である。
2 進法で 4 桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$$

と表される。ここで $a,\ b,\ c,\ d$ は 0 かまたは 1 である。
一般に x 進法では 4 桁の整数は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

の形になる。まだ 2 桁、3 桁の整数は、

$$2\text{桁} \cdots\ ax + b \qquad , \quad 3\text{桁} \cdots\ ax^2 + bx + c$$

の形になる。このように x 進法で整数を表すような式を x に関する

整式という。これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を x に関する**分数式**という。

整式は式の形で区別する。
　x に関する 1 次式 $\cdots\ ax + b$ の形
　x に関する 2 次式 $\cdots\ ax^2 + bx + c$ の形
　x に関する 3 次式 $\cdots\ ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

ただし a には 0 でない数である。x に関する整式では、x 以外の文字 (a, b, c, d 等) を**定数** という。ax^3 の a ,　bx^2 の b ,　cx の c
のように x との積になっている定数を**係数**という。

＜ 整式 2 ＞

x の整式は“ x 進法 ”よりもっと広い意味で用いる。たとえば x の 2 次式は一般に

$$ax^2+bx+c$$

であるが、この係数 a,b や定数 c は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

例 1　$2x+7-5x^2+6x^3=6x^3-5x^2+2x+7$

このように整式は x の次数 (指数) の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順** に並べる」という。

例 2 (1)　$(3-x+2x^2)+(4x+5+3x^2)$

$=(2x^2-x+3)+(3x^2+4x+5)$

$=(2x^2+3x^2)+(-x+4x)+(3+5)$

$=5x^2+3x+8$

筆算では

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & -\ x & +\ 3 \\ +) & 3x^2 & +\ 4x & +\ 5 \\ \hline & 5x^2 & +\ 3x & +\ 8 \end{array}$$

(2)　$(-4x+3+5x^2)-(7-2x)$

$=(5x^2-4x+3)-(-2x+7)$

$=5x^2+(-4x-(-2x))+(3-7)$

$=5x^2-2x-4$

筆算では

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & -\ 4x & +\ 3 \\ -) & & -\ 2x & +\ 7 \\ \hline & 5x^2 & -\ 2x & -\ 4 \end{array}$$

(3)　$(2x-3)(4x+5)$

$=(2x-3)\times 4x+(2x-3)\times 5$

$=8x^2-12x+10x-15$

$=8x^2-2x-15$

筆算では

$$\begin{array}{rrrrl} & & 2x & -\ 3 & \\ \times) & & 4x & +\ 5 & \\ \hline & & 10x & -\ 15 & \cdots\cdots (2x-3)\times 5 \\ +) & 8x^2 & -\ 12x & & \cdots\cdots (2x-3)\times 4x \\ \hline & 8x^2 & -\ 2x & -\ 15 & \end{array}$$

(注) 整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問　次の計算をせよ。

(1) $(3+4x-x^2)+(2+3x^2-5x)$　　(2) $(4x-5+3x^2)-(7-6x-2x^2)$

(3) $(x-3)x^2$　　(4) $(x+6)(3x-7)$

< 整式 3>

x の整式の積は文字式の場合 (6 ページ) と同様に展開する。
そして最後の答は必ず降べきの順に並べる。

例 ① $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = (x+3)\times x + (x+3)\times 3 = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$

② $(2x+1)(3x+4) = (2x+1)\times 3x + (2x+1)\times 4 = 6x^2+3x+8x+4 = 6x^2+11x+4$

③ $(x-a)(x-b) = (x-a)\times x + (x-a)\times(-b) = x^2-ax-bx+ab = x^2-(a+b)x+ab$

問 1 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^2$

(2) $(x-3)^2$

(3) $(x+a)^2$

(4) $(x-a)^2$

(5) $(x-a)(x+a)$

(6) $(x+a)(x+b)$

(7) $(x+a)(x-b)$

(8) $(x+a)^3$

(9) $(x-a)^3$

(10) $(ax+b)(cx+d)$

(11) $(ax+b)(cx-d)$

(12) $(ax-b)(cx-d)$

(13) $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(14) $(x+a)(x^2-ax+a^2)$

(15) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

(16) $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$

＜因数分解＞

前ページで整式の積の展開を学んだ。逆に展開された式を次数の低い整式の積の形にすることを**因数分解**という。
前ページの結果より

(Ⅰ) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
(Ⅱ) $x^2+(a+b)x+ax=(x+a)(x+b)$
(Ⅲ) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$
(Ⅳ) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
(Ⅴ) $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
(Ⅵ) $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=(x+a)^3$

がわかる。

例 (1) $x^2+8x+16=(x+4)^2$
(2) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$
(3) $x^2-9=(x-3)(x+3)$
(4) $8x^2+22x+15=(2x+3)(4x+5)$
(5) $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$
(6) $x^3+12x^2+48x+64=(x+4)^3$

(注) (4) は $8x^2=2\times4\times x^2$, $15=3\times5$ と考え (Ⅳ) 式と比較する。

問 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2+10x+25$

(2) x^2+3x+2

(3) x^2-16

(4) $3x^2+17x+10$

(5) x^3-27

(6) $x^3+6x^2+12x+8$

(7) $x^2-2ax+a^2$

(8) $x^2+(a-b)x-ab$

(9) $x^2-(a+b)x+ab$

(10) $acx^2-(ad+bc)x+bd$

(11) x^3+a^3

(12) $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$

$<$ 整式の除法 $>$

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。
これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{rr} & 12 \\ 11 & \overline{)\,136} \\ & \underline{11} \\ & 26 \\ & \underline{22} \\ & 4 \end{array}$$

となる。整式の除法も同様で
x^2+3x+6 を $x+1$ で割ると商が
$x+2$ で余りが 4 である。これを式で
書くと

$$x^2+3x+6 = (x+2)(x+1)+4$$

かまたは

$$\frac{x^2+3x+6}{x+1} = x+2+\frac{4}{x+1}$$

となる。

$$\begin{array}{rrl} & x+2 & \\ x+1 & \overline{)\ x^2+3x+6} & \\ & \underline{x^2+\ x} & \cdots\ (x+1)\times x \\ & 2x+6 & \\ & \underline{2x+2} & \cdots\ (x+1)\times 2 \\ & 4 & \end{array}$$

例 2　右の等算より

$$\frac{4x^3-2x^2+6x-1}{2x+3} = 2x^2-4x+9-\frac{28}{2x+3}$$

$$\begin{array}{rrl} & 2x^2-4x+9 & \\ 2x+3 & \overline{)\ 4x^3-2x^2+6x-1} & \\ & \underline{4x^3+6x^2} & \cdots\ (2x+3)\times 2x^2 \\ & -8x^2+6x & \\ & \underline{-8x^2-12x} & \cdots\ (2x+3)\times(-4x) \\ & 18x-1 & \\ & \underline{18x+27} & \cdots\ (2x+3)\times 9 \\ & -28 & \end{array}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の
右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{2x^2+4x}{x+1}$

(2) $\dfrac{x^2+4x-6}{x-2}$

(3) $\dfrac{2x^2+3x-1}{x-1}$

(4) $\dfrac{x^3+5x^2-6x+4}{x-3}$

< 平方根 1 >

正の数 a にたいし、2 乗して a になる数を a の**平方根**という。
平方根は正と負の 2 個あるが、正の平方根を $\sqrt{a}$ で表わす。

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad , \quad x^2 = a$$

例 1 $\sqrt{2}$ ($\fallingdotseq 1.4142356\cdots$) は無理数であるが、

$$\sqrt{4} \qquad , \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

のように平方根が無理数とは限りない。

問 1 次の平方根は全て無理数でない。根号を使わずに表わせ。

(1) $\sqrt{121}$ (2) $\sqrt{\dfrac{36}{49}}$ (3) $\sqrt{0.25}$

正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad , \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成りたつ。

例 2 (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
(2) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

問 2 例 2 のように次を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ (2) $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$

(3) $\sqrt{72}$ (4) $\sqrt{98}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

問 3 次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$ (4) $\dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

＜平方根2＞

例1 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2$

$$= 5+2\sqrt{50}+10$$

$$= 15+2\times 5\sqrt{2} = 15+10\sqrt{2}$$

(注) ここで文字式の展開式 $\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$ を用いた。

問1 6ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$　(3) $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$　(5) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$　(6) $\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)$

例2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, (2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問2 次の分数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$　(3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$　(5) $\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

例3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \quad \times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$ を用いた。

問3 次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

＜ 2 次方程式 ＞

$a(\neq 0),\ b,\ c$ を係数とする 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は、$b^2-4ac \geqq 0$ であれば

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad (\text{解の公式})$$

によって求められる。

例 2 次方程式

$$4x^2-20x+24$$

の解は公式より

$$x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{20^2-4\times4\times24}}{2\times4}=\frac{20\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{20\pm4}{8}$$

$$\frac{20+4}{8}=3\ ,\quad \frac{20-4}{8}=2 \qquad \underline{(\text{答})x=3 \text{ または } x=2}$$

(別解)

$$4x^2-20x+24=4(x^2-5x+6)=4(x-3)(x-2)$$

と因数分解されるから

$$\begin{aligned} 4x^2-20x+24=0 &\Leftrightarrow 4(x-3)(x-2)=0 \\ &\Leftrightarrow x-3=0 \text{ または } x-2=0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x=3 \text{ または } x=2} \end{aligned}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2-5x+4=0$

(2) $2x^2-2x-4=0$

(3) $x^2+3x-4=0$

(4) $2x^2-5x-3=0$

(5) $x^2+x-1=0$

(6) $2x^2+x-3=0$

＜累乗根＞

例1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると

$$x^2 = 2$$

である。 x は無理数で、約 1.4142 である。

この x を 2 の **平方根** といい、 $\boxed{x = \sqrt{2}}$ と書く。

例2 体積が 2 である立方体の一辺の長さを x とすると

$$x^3 = 2$$

である。 x は無理数で、約 1.25992 である。

この x を 2 の **立方根** といい $\boxed{x = \sqrt[3]{2}}$ と書く。

例3 $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ は、4 乗すると 2 になる。

この x を 2 の **4 乗根** といい、 $\boxed{x = \sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して、 n 乗すると a になる正の数を x とし、この x を a の n **乗根** といい、 $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$ と表す。すなわち

$$\boxed{x^n = a \quad (x > 0) \text{ のとき } x = \sqrt[n]{a}}$$

と定める。平方根、立方根、 n 乗根をまとめて **累乗根** という。

例4 累乗根は常に無理数とはかぎらない。たとえば、

$$\sqrt{49} = 7 \ , \quad \sqrt[3]{0.125} = 0.5 \ , \quad \sqrt[4]{81} = 3 \ , \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。簡単な数になおせ。

(1) $\sqrt{121} =$

(2) $\sqrt[3]{0.027} =$

(3) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} =$

(4) $\sqrt[5]{7 + \dfrac{19}{32}} =$

＜整数指数＞

例 1 自然数 n と m に対し、$n > m$ ならば

$(*)$ $$\boxed{2^n \div 2^m = 2^{n-m}}$$

が成り立つ。今 $n = m$ のとき $(*)$ の左辺は 1 であり、右辺は 2^0 となる。そこで

$$\boxed{2^0 = 1} \quad (\text{ゼロ乗}=1)$$

と定めることにする。$(*)$ 式で $n = 0$ のとき左辺は $\dfrac{1}{2^m}$ であり、右辺は 2^{-m} であるから

$$\boxed{2^{-m} = \frac{1}{2^m}}$$

と定めると、全ての整数 n と m に対して $(*)$ 式が成り立つ。

一般に正の数 a と自然数 m に対し

$$\boxed{a^0 = 1 \quad (\text{ゼロ乗}=1) \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

と定めることにする。このように決めると全ての整数 n と m に対し

$$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

が成り立つ。

例 2 $5^0 = 1 \quad , \quad 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 次の値を求めよ。

(1) $9^0 =$

(2) $2^{-3} =$

(3) $3^5 \times 9^{-2} =$

(4) $\left(3^3\right)^{-2} =$

＜分数指数＞

$$(2^2)^3 = (2\times 2)^3 = (2\times 2)\times(2\times 2)\times(2\times 2) = 2^6$$

という例からわかるように、自然数 n と m を使って

$$\boxed{(2^m)^n = 2^{m\times n} \qquad (*)}$$

が言える。これは指数をかける計算の例である。次に指数のわり算については

$$\boxed{2^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{2^n}}$$

が成り立つ。これは

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

というように使う。また、$(*)$ より

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^{\frac{1}{3}\times 6} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$$

が成り立つことが説明できる。これを自然数 k と正の数 a を使って

$$\boxed{a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^k}$$

と定義する。

例　$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$　,　$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$　,　$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

問　次の値を求めよ。

(1) $169^{\frac{1}{2}}$

(2) $64^{\frac{2}{3}}$

(3) $36^{\frac{3}{2}}$

(4) $(0.008)^{\frac{5}{3}}$

＜指数法則＞

分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して
$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$, $2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$
$3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$, $4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 $\sqrt[4]{64^2} = \left(\sqrt[4]{64}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{4}\right)^2 = \left(2 \times \sqrt{2}\right)^2 = 4 \times 2 = 8$

を指数を用いて計算すると

$$64^{\frac{2}{4}} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$$

$$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

(2) $(16\times25)^{\frac{1}{3}}\times(4\times25\times25)^{\frac{1}{3}} =$

(3) $12^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{1}{3}} =$

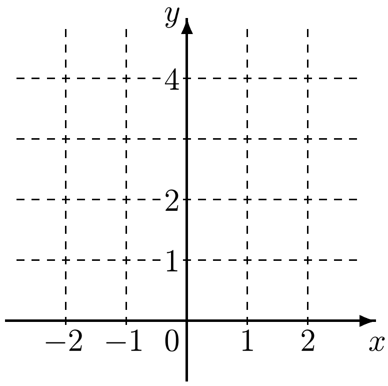
(4) $\sqrt[4]{54} \times \sqrt[4]{24} =$

＜指数関数＞

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

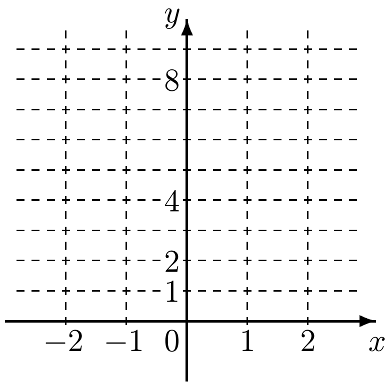
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



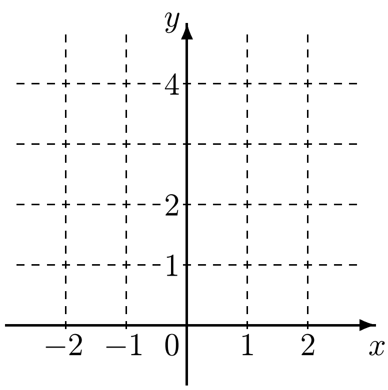
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



＜対数１＞

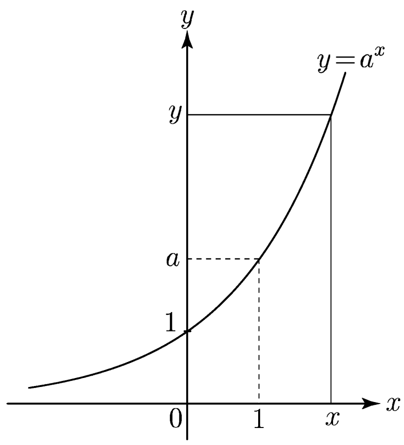
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例１　(1)　$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2)　$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問１　次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$　　(2) $10^{-1} = 0.1$　　(3) $5 = \log_2 32$　　(4) $\dfrac{2}{3} = \log_8 4$

(注) 記号 $\boxed{\log_a ○}$ は $\boxed{a \text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例２　(1)　$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2)　$\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問２　次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 64$

(2)　$\log_5 125$

(3)　$\log_{10} 10000$

(3)　$\log_6 216$

＜ 対数 2＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\dfrac{25}{100}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 (1) $\log_2 32$　(2) $\log_3 \sqrt{3}$　(3) $\log_5 0.2$

(4) $\log_3\left(9\sqrt{3}\right)$　(5) $\log_3 81$　(6) $\log_4 0.25$

(7) $\log_5 \sqrt[3]{5}$　(8) $\log_6 \sqrt[3]{36}$　(9) $\log_4 8$

対数の性質として

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N \ , \quad \log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \\[2ex] \log_a(M^n) = n \log_a M \end{array}}$$

が成り立つ。

例 2 (1) $\log_3(54) + \log_3(1.5) = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2) $\log_{10}(30000) = \log_{10}(10000 \times 3)$

$= \log_{10} 10000 + \log_{10} 3 = 4 + \log_{10} 3$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\log_6 12 + \log_6 3$

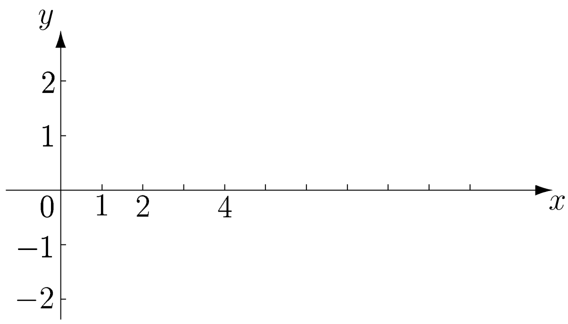
(2) $\log_{10} 200 - \log_{10} 100 + \log_{10} 500$

＜対数関数＞

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域 (括弧内の x の範囲) 内で、グラフの概形を書け。

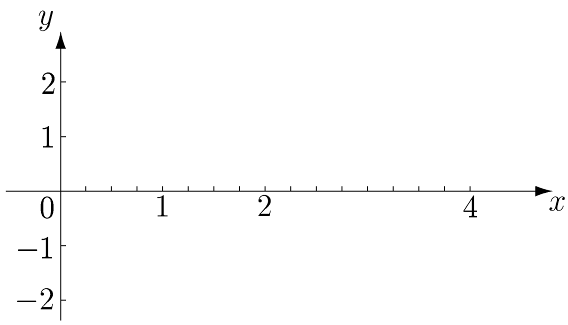
(1) $y = \log_4 x \quad (x \ > \ 0)$

x	0.25	1	$\sqrt{4}$	4
y				



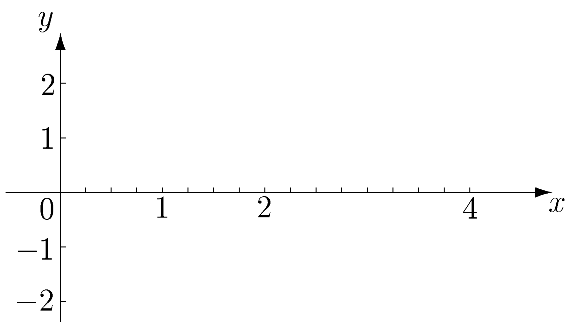
(2) $y = \log_2 x \quad (x \ > \ 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



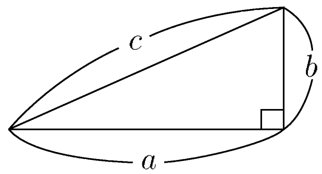
(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x \ > \ 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



＜直角三角形＞

問 1　右辺 a, 高さ b, 斜辺 c, の直角三角形に対し，ピタゴラスの定理を用いて斜辺の長さ c を a と b で表せ。

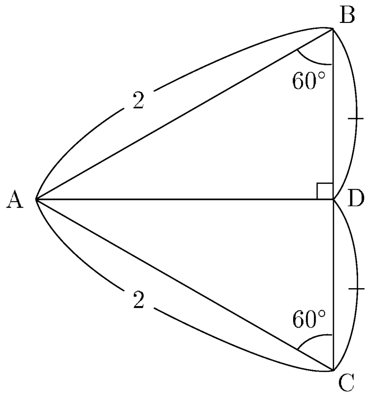


（図１）

(注)　$\sqrt{a^2} = a,\ \sqrt{b^2} = b$ であるが $\sqrt{a^2+b^2}\ \neq\ a+b$

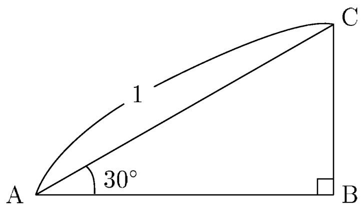
たとえば　$5 = \sqrt{3^2+4^2}\ \neq\ 3+4=7$

問 2　図 2 のように一辺の長さが 2 である正三角形 ABC に対し，BC の中点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



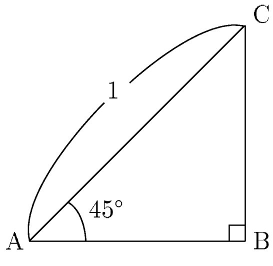
（図２）

問 3　図 3 の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図３）

問 4　図 4 の直角三角形 ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図４）

＜平面上の距離と円の方程式＞

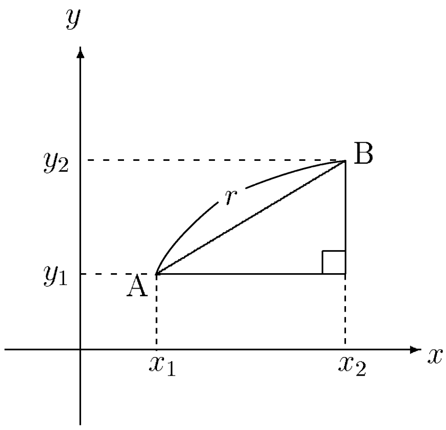
問 1 (平面上の 2 点間の距離)

座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$ が右図のような位置にあるとする。

線分 AB の長さ r の 2 乗をピタゴラスの定理より求めよ。

(注) 2 乗の式は展開しなくてよい。

(解) $r^2=$



問 2 (円の方程式)

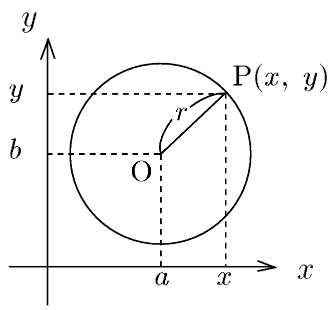
座標平面上に、中心 O$(a,\ b)$、半径 r の円がある。円周上の 1 点 P の座標を $(x,\ y)$ としたとき、

式

$$(x-a)^2\ +\ (y-b)^2\ =\ \boxed{\qquad}\ \cdots(*)$$

が成り立つ。$\boxed{\quad}$ に適当な文字を入れよ。

(注) 方程式 $(*)$ を、中心 $(a,\ b)$、半径 r の円の方程式という。



問 3　次の円の方程式が表わす円の中心と半径を求めよ。

(1) $(x-1)^2\ +\ (y-2)^2\ =\ 4$

(答) 中心 (　　,　　)、半径 $=$

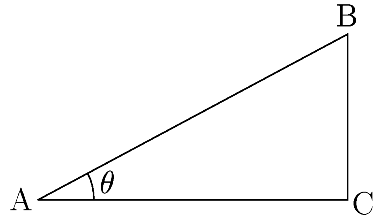
(2) $(x+2)^2\ +\ y^2\ =\ 121$

(答) 中心 (　　,　　)、半径 $=$

(3) $x^2+y^2\ =\ 25$

(答) 中心 (　　,　　)、半径 $=$

＜三角比＞



右図のような直角三角形 ABC に対し、角 A が θ であるとき、辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を角 θ の**正接** $(tangent)$ といい

$$\boxed{\tan\theta \;=\; \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \left(=\frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}\right)}$$

と書く。同様に辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦** $(sine)$ といい

$$\boxed{\sin\theta \;=\; \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \left(=\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}\right)}$$

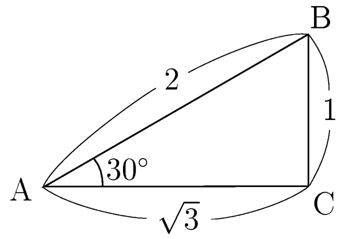
と書く。又、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦** $(cosine)$ といい

$$\boxed{\cos\theta \;=\; \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \left(=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。これらをまとめて**三角比**という。

例　図 1 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

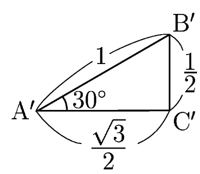
$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(図 1)

となる。一方、図 2 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad (= \mathrm{B'C'})$$
$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (= \mathrm{A'C'})$$
$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(図 2)

で上と同じ結果になる。どちらで考えてもよい。

問　45° の三角比を求めよ。

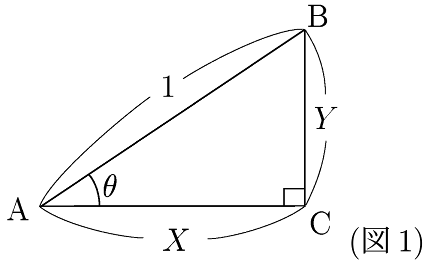
＜三角関数の定義＞

図１のように斜辺の長さが１の直角三角形 ABC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{Y}{1} = Y$$

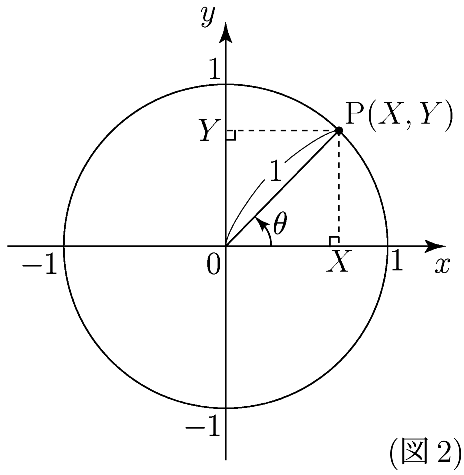
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{X}{1} = X$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{Y}{X}$$



(図 1)

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径１の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は $(1, 0)$ から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で



(図 2)

$$\boxed{\sin\theta = Y\ ,\quad \cos\theta = X\ ,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。

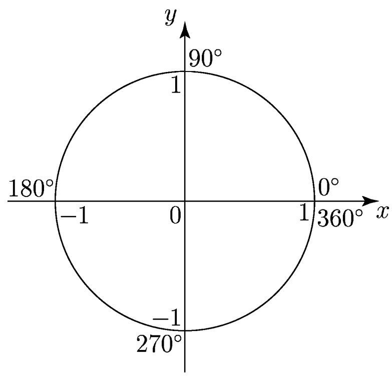
例１　$\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから、このときは $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0\ ,\quad \cos 0^\circ = 1\ ,\quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

例２　$\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0$, $Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1\ ,\quad \cos 90^\circ = 0$$

であるが、このとき $\tan 90^\circ$ は求まらない。(分母に０がくるので計算できない。)



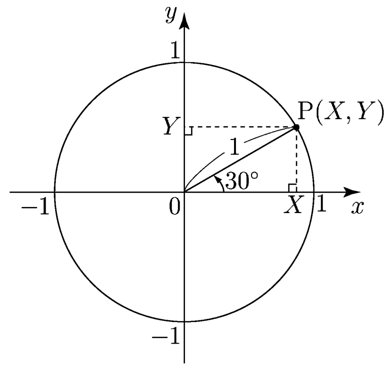
問　次の値を求めよ。

(1) $\sin 180^\circ =$　　　　　　, $\cos 180^\circ =$　　　　　　, $\tan 180^\circ =$

(2) $\sin 270^\circ =$　　　　　　, $\cos 270^\circ =$

＜三角関数の値1＞

問1 右図の点Pの座標 (X,Y) を求めることにより、次の値を求めよ。(24ページ参照)

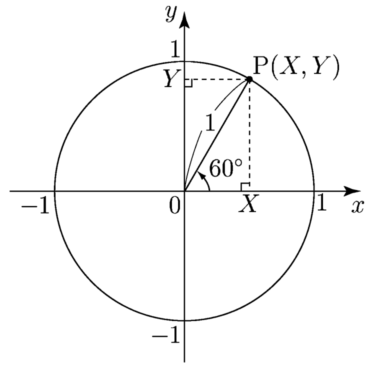


(1) $\cos 30^\circ =$

(2) $\sin 30^\circ =$

(3) $\tan 30^\circ =$

問2 右図の点Pの座標 (X,Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

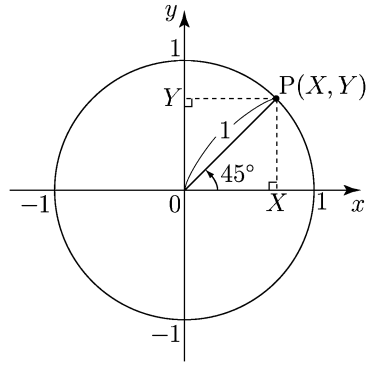


(1) $\cos 60^\circ =$

(2) $\sin 60^\circ =$

(3) $\tan 60^\circ =$

問3 右図の点Pの座標 (X,Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

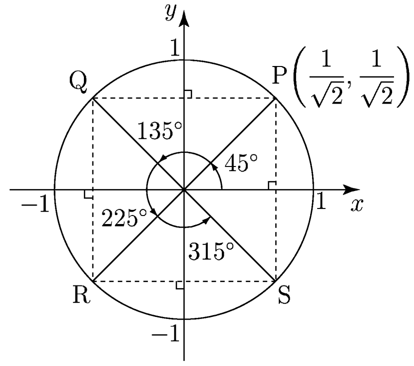


(1) $\cos 45^\circ =$

(2) $\sin 45^\circ =$

(3) $\tan 45^\circ =$

問4 右図で、点Q,R,Sの座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



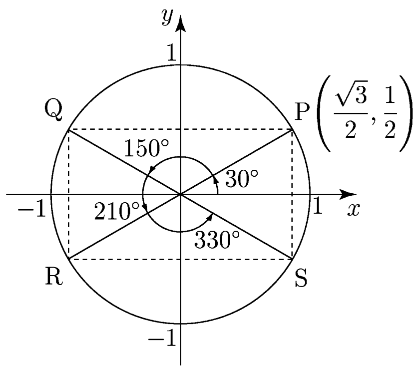
(1) $\cos 135^\circ =$ 　　　, $\sin 135^\circ =$ 　　　, $\tan 135^\circ =$

(2) $\cos 225^\circ =$ 　　　, $\sin 225^\circ =$ 　　　, $\tan 225^\circ =$

(3) $\cos 315^\circ =$ 　　　, $\sin 315^\circ =$ 　　　, $\tan 315^\circ =$

＜三角関数の値2＞

問1 右図で、点Q,R,Sの座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。

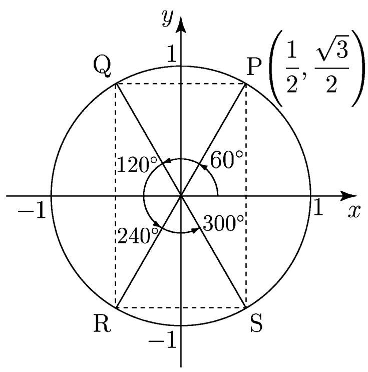


(1) $\cos 150^\circ =$　　　　, $\sin 150^\circ =$　　　　, $\tan 150^\circ =$

(2) $\cos 210^\circ =$　　　　, $\sin 210^\circ =$　　　　, $\tan 210^\circ =$

(3) $\cos 330^\circ =$　　　　, $\sin 330^\circ =$　　　　, $\tan 330^\circ =$

問2 右図で、点Q,R,Sの座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



(1) $\cos 120^\circ =$　　　　, $\sin 120^\circ =$　　　　, $\tan 120^\circ =$

(2) $\cos 240^\circ =$　　　　, $\sin 240^\circ =$　　　　, $\tan 240^\circ =$

(3) $\cos 300^\circ =$　　　　, $\sin 300^\circ =$　　　　, $\tan 300^\circ =$

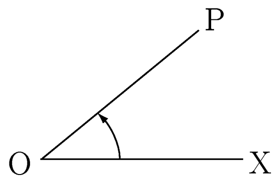
問3 次の表を完成せよ。

角度 θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin\theta$	0				1			
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$					
$\tan\theta$								$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

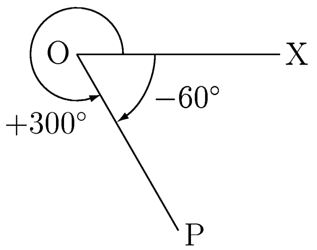
180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$-\frac{1}{2}$							
				0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
		1						0

＜一般角＞

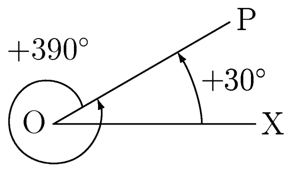
OX を固定した線とし、点 O を中心に、OP が回転する。OX を始線と言い、OP を動径という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



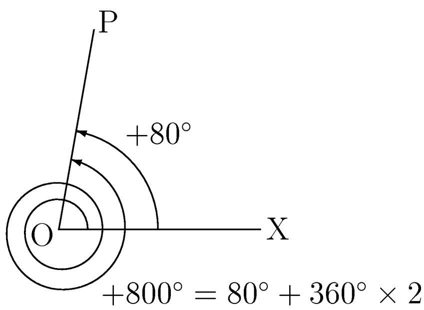
例 1 (1)



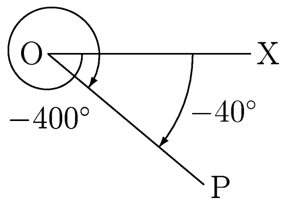
(2)



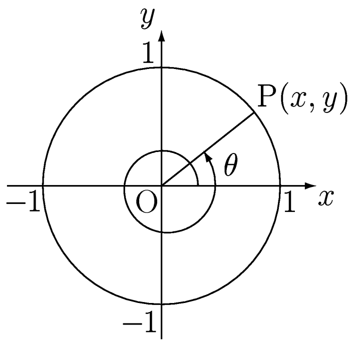
(3)



(4)



[一般角の三角関数]



一般角 θ に対する三角関数を $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の場合と同様に、点 P の座標 (x, y) で

$$\cos\theta = x\ ,\quad \sin\theta = y\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して、

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 570^\circ =$ (2) $\cos(-45^\circ) =$ (3) $\tan 765^\circ =$

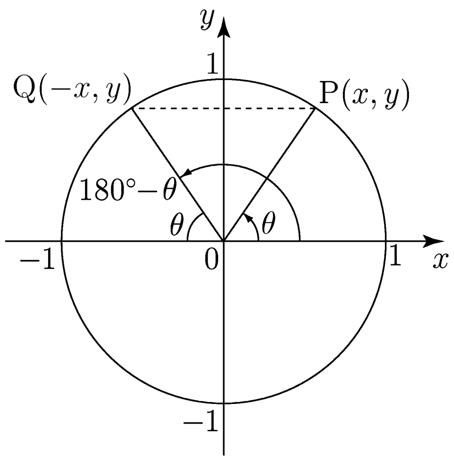
＜三角関数の性質１＞

例　$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ のとき、点 $\mathrm{P}(x, y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-x, y)$ は角 $180^\circ - \theta$ を表す点である。従って

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -x\\ \sin(180^\circ - \theta) &= y\\ \tan(180^\circ - \theta) &= \frac{y}{-x}\end{aligned}$$

となる。これを $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ で表すと

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -\cos\theta\\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin\theta\\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

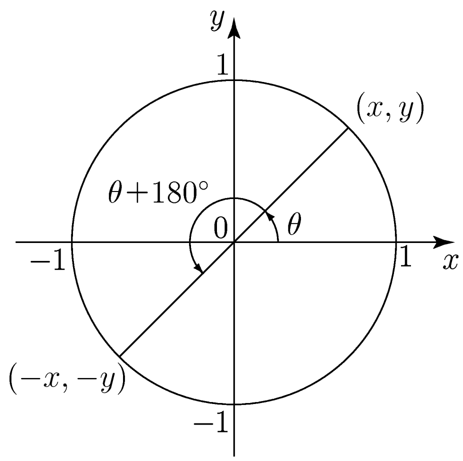


問１　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 180^\circ)\ =$

(2) $\cos(\theta + 180^\circ)\ =$

(3) $\tan(\theta + 180^\circ)\ =$

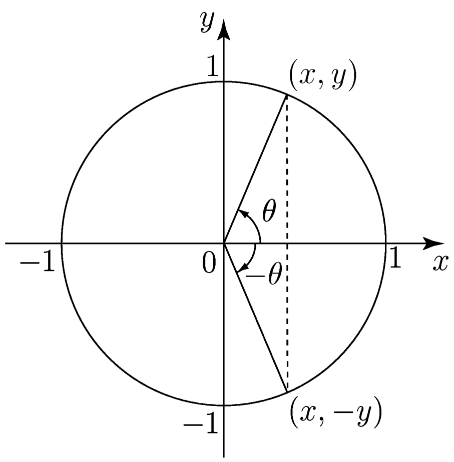


問２　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(-\theta) =$

(2) $\cos(-\theta) =$

(3) $\tan(-\theta) =$

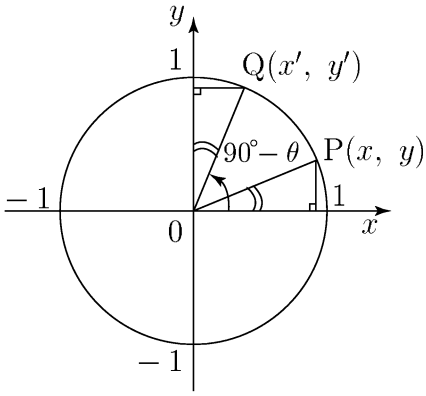


＜三角関数の性質２＞

問１　右図のように角度 θ を表す点を P $(x,\ y)$, 角度 $90^\circ-\theta$ を表す点を Q $(x',\ y')$ とすると

$$x'=y \quad , \quad y'=x$$

の関係がある。これを参考にして次の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。



(1)　$\sin(90^\circ-\theta)=$　　　　(2)　$\cos(90^\circ-\theta)=$

例　$\sin 20^\circ=\ 0.342,\ \ \cos 20^\circ=\ 0.9397,\ \ \tan 20^\circ=\ 0.364$ である。これは三角比の表で調べるわけだが，この表には 0° から 90° までしか書いていない。前ページの例を参考にすると

$$\sin(160^\circ)=\ \sin(180^\circ-20^\circ)=\ \sin 20^\circ=\ 0.342$$
$$\cos(160^\circ)=\ \cos(180^\circ-20^\circ)=\ -\cos 20^\circ=\ -0.9397$$
$$\tan(160^\circ)=\ \tan(180^\circ-20^\circ)=\ -\tan 20^\circ=\ -0.364$$

がわかる。

問２　上の例と前のページの問等を参考にして、次の値をもとめる。

(1)　$\sin 200^\circ=$　　　$\cos 200^\circ=$　　　$\tan 200^\circ=$

(2)　$\sin(-20^\circ)=$　　　$\cos(-20^\circ)=$　　　$\tan(-20^\circ)=$

(3)　$\sin 70^\circ=$　　　$\cos 70^\circ=$

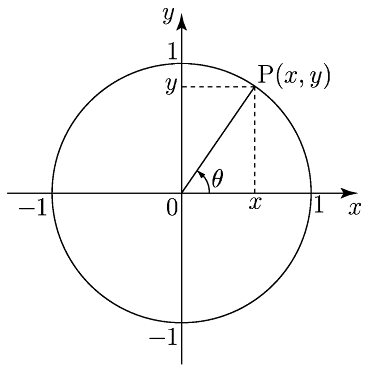
(4)　$\sin 110^\circ=$

<三角関数の性質3>

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると、三角関数の定義から

$$\sin\theta = y\ ,\quad \cos\theta = x\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である。ここで点 P は原点を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の点だから



$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

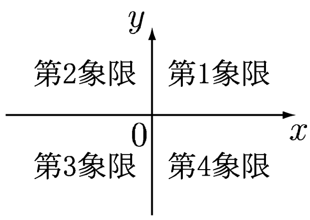
が成り立つ。

注) 記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta) \times (\cos\theta)$ の意味であり、$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)\ ,\quad \sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$$

問 1 $\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2 三角関数の定義から、sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



θ	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

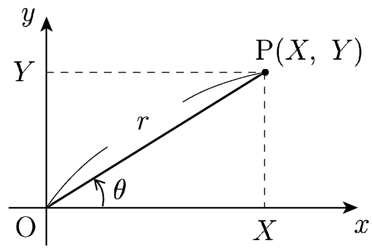
例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ である。このとき

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ だから $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

よって $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3 角度 θ は -90° から 90° までの間の角で、$\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

＜極座標＞



(図1)

座標平面上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

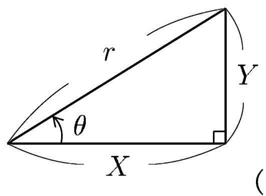
$$\frac{X}{r} = \cos\theta\ ,\quad \frac{Y}{r} = \sin\theta$$

だから

$$X = r\cos\theta\ ,\quad Y = r\sin\theta$$

より

$$\boxed{(X,\ Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}$$ (極座標表示)



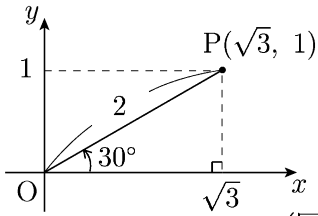
(図2)

と表される。$(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ を点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の**極座標**という。

例 (1) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1) = (2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ)$$

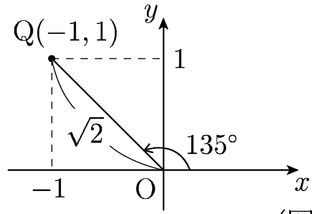
となる。



(図3)

(2) 点 $\mathrm{Q}(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1) = (\sqrt{2}\cos 135^\circ\ ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)$$



(図4)

＜検算＞例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $(2\cos 30^\circ\ ,\ 2\sin 30^\circ) = \left(2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\times\dfrac{1}{2}\right) = (\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ) = \left(\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\dfrac{2}{2},\ \dfrac{2}{2}\right) = (-1,\ 1)$

問 次の座標を極座標になおせ。

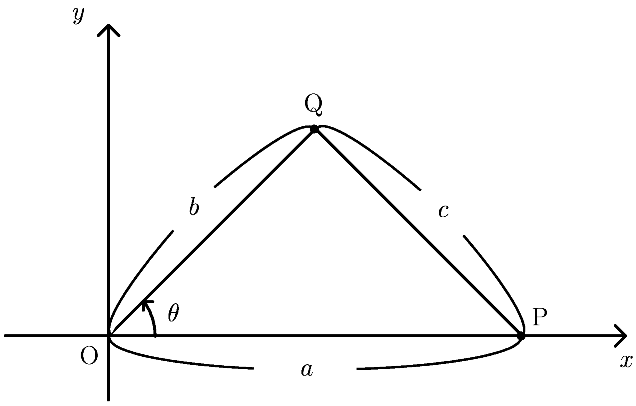
(1) $(2,\ 2)$

(2) $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

(3) $(-\sqrt{3},\ 1)$

(4) $(2\sqrt{3},\ -2)$

＜余弦定理1＞



問 (1) 右図の点 P と Q の座標を a と b および角度 θ で表せ。

P(　　　,　　　)

Q(　　　,　　　)

(2) 平面上の２点間の距離の公式（25 ページ）を使って、PQ^2 を a と b と θ を用いて表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

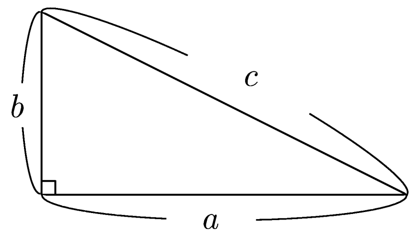
(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いることによって PQ^2 を簡単にせよ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

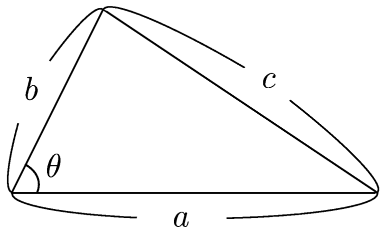
(4) (3) の結果を用いて、c^2 を a と b と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

$c^2 =$

＜余弦定理２＞



（図１）



（図２）

図１のように直角三角形の場合はピタゴラスの定理より

$c^2 = a^2 + b^2$

によって斜辺の長さ c を

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

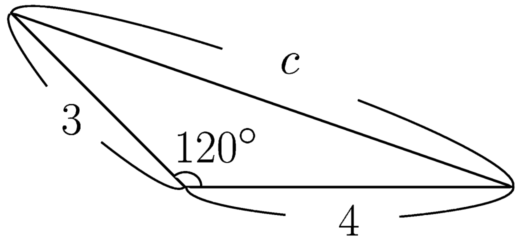
として求まるが、図２のように θ が $90°$ 以外の場合はそうはならない。

問１ 前ページの結果を用いて、c^2 を a と b と θ で表せ。

$c^2 =$

（注）この式を**余弦定理**という

例 右図の場合に



$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120°$

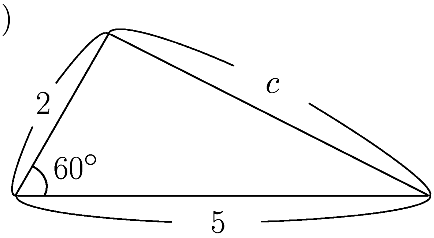
が成り立つ。ここで $\cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ より

$$c^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 12 = 37$$

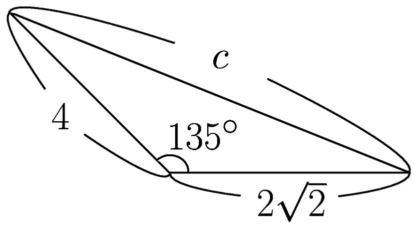
であるから $c = \sqrt{37}$。

問２ 三角形が以下の場合に c を求めよ。

(1)

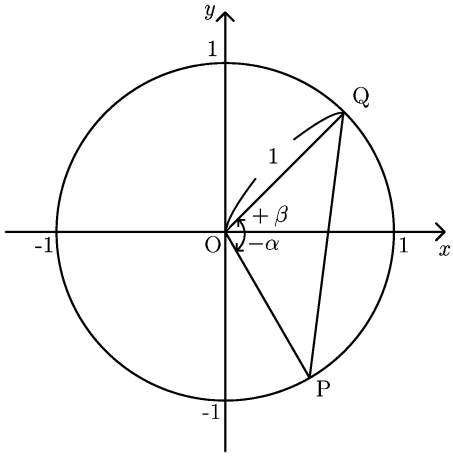


(2)



＜加法定理１＞

問



(1) 右図において点 Q の座標を
を極座標表示せよ。

Q(　　　　,　　　　)

(2) 右図において点 P の座標を
極座標表示すると $\mathrm{P}\big(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\big)$
となるが、31 ページ問 2 の性質を用いて、P の座標を $\cos\alpha$
と $\sin\alpha$ で表せ。

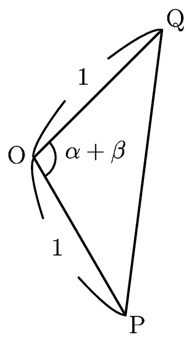
P(　　　　,　　　　)

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式 (25 ページ) を使って、
PQ^2 を α と β で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$\mathrm{PQ}^2 =$



(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理
を使って、PQ^2 を $\alpha+\beta$ で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha+\beta)$ を
$\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

＜加法定理２＞

前ページの結果より

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が成立することが分かった。これをコサインの**加法定理**という。

例 75° は 45° と 30° の和であるから、

(1) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ$ は $\cos^2(75^\circ)+\sin^2(75^\circ)=1$ から計算してもできないことはないが２重根号 $\left(\sqrt{}\right.$ の中に $\sqrt{}$ がある$\left.\right)$ がでてくる。それをさけるために31、32 ページで導いた三角関数の性質

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を使って、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned}
\sin 75^\circ &= \cos(90^\circ-75^\circ)=\cos\bigl((90^\circ-45^\circ)+(-30^\circ)\bigr)\\
&=\cos(90^\circ-45^\circ)\cos(-30^\circ)-\sin(90^\circ-45^\circ)\sin(-30^\circ)\\
&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ(-\sin 30^\circ)\\
&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問 165° は 120° と 45° の和であることを利用して、次の値を求めよ。

$\cos 165^\circ =$

$\sin 165^\circ =$

＜加法定理３＞

問１　前ページの例の (2) を参考にして、$\sin(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

$\sin(\alpha+\beta) =$

注）　この式をサインの加法定理という。

問２　前ページの例の結果を使って次の値を求めよ。

(1) $\cos 195^\circ =$

(2) $\sin 195^\circ =$

例 15° は 45° から 30° を引いた角度である。三角関数の性質

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

とサイン、コサインの加法定理を使うと、次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \cos 45^\circ \cos(-30^\circ) - \sin 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \sin 45^\circ \cos(-30^\circ) + \cos 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問３　例を参考にして、次式を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

(1) $\cos(\alpha-\beta) =$

(2) $\sin(\alpha-\beta) =$

＜加法定理４＞

例 38 ページの例より $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで分母の有理化をするために分母と分子に $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ をかけると

$$\tan 75^\circ = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

（別解） $\cos 75^\circ$ と $\sin 75^\circ$ の一方しかわかっていない場合は次のように考える。

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}}{\frac{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}{1 - \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

問１ $\tan 165^\circ$ を求めよ。

問２ 上の別解を参考にして $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha+\beta) =$

この式をタンジェントの加法定理という。