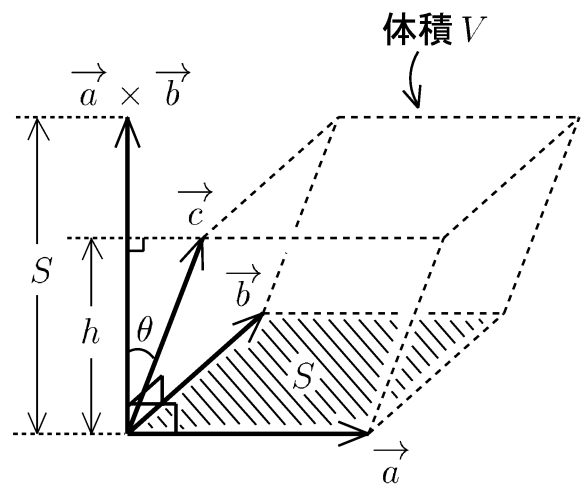


高知工科大学  
基礎数学ワークブック  
(2000年度版)

# 11

## 内容

- ◎ スカラー三重積
- ◎ 行列
- ◎ 行列式
- ◎ 連立一次方程式
- ◎ 固有値



電子・光システム工学科  
井上 昌昭 著

## < 正規直交系 1 >

直交系のベクトル  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  がすべて単位ベクトル (大きさ 1) すなわち  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$  であるとき  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  を正規直交系という。

例 ワークブック 10、40 ページの例で、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

は直交系であった。これに対し、

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 6^2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  は正規直交系である。

たとえば

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{1} = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{14}} + 0 \times \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{-2}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{70}} - \frac{2}{\sqrt{70}} = 0$$

問 上の  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  に対し、次を計算せよ。

$$|\vec{e}_2| = \quad \quad \quad |\vec{e}_3| =$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \quad \quad \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 =$$

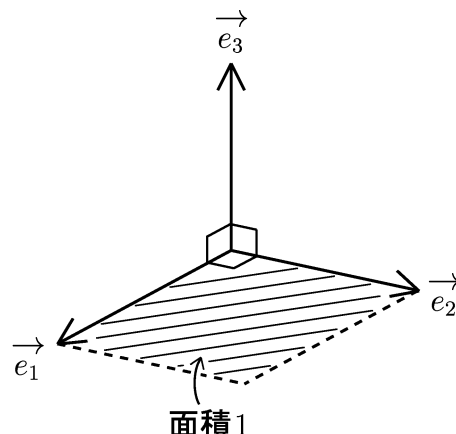
## < 正規直交系 2 >

正規直交系  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  が右図の

ような位置関係にあるとき、右手系と  
いうことにする。正規直交系であるから

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$$

より  $\vec{e}_1$  と  $\vec{e}_2$  のつくる平行四辺形 (= 一辺の  
長さ 1 の正方形) の面積は 1 になる。



よって外積の幾何学的意味より  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$  となる。

同様にして、 $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$  が成り立つ。

例 前ページの例の正規直交系

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

は右手系である。 $\vec{e}_1$  と  $\vec{e}_2$  との外積は

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - 0 \times \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

問 例と同じ  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  に対し、例のようにして、次の外積の成分を  
計算せよ。

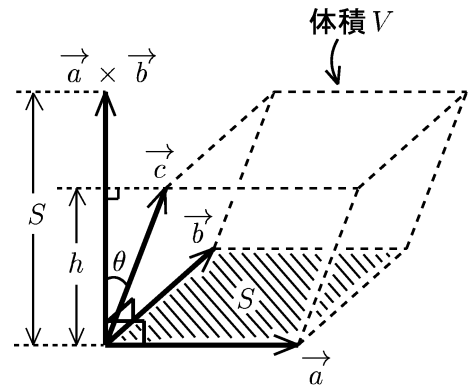
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 =$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 =$$

### < 平行六面体の体積 >

例  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

であるとき、右図のような平行六面体の体積  $V$  を求めたい。 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が  
つくる平行四辺形の面積を  $S$ 、  
平行六面体の高さを  $h$  とすると、



$$V = Sh, \quad S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

である。一方、 $\vec{c}$  と  $\vec{a} \times \vec{b}$  のつくる角を  $\theta$  とすると

$$h = |\vec{c}| \cos \theta$$

であるから、

$$V = Sh = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \theta = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (\vec{a} \times \vec{b} \text{ と } \vec{c} \text{ の内積})$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \times (-1) + (-4) \times 3 + 32 \times 7 = 206$$

一般に  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  の作る平行六面体の体積  $V$  は

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \text{ の絶対値}$$

問  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が以下の場合に、 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  を求めよ。

(1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$       (2)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

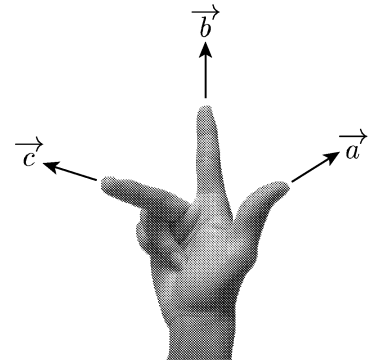
## < スカラー三重積 1 >

3つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  に対し

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

を  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  のスカラー三重積という。

又3つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が右図のような位置関係にあるとき右手系といい、そうでないとき左手系という。このとき次の事が成り立つ。



$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ が右手系} \iff (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ が左手系} \iff (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$$

例  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  のとき  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

は左手系である。実際

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 1 + (-3) \times 2 = -6 \end{aligned}$$

問 上の場合に、次のスカラー三重積を求めよ。

(1)  $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

(2)  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$

(3)  $(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$

(4)  $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

## < スカラー三重積 2 >

3つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  に対し、 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  が右手系ならば前ページの絵の位置関係から  $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$  と  $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$  も右手系である。この場合、そのスカラー三重積は  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  の作る平行六面体の体積  $V$  を表すので

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \dots (1)$$

がなりたつ。又前ページの絵から  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  が右手系なら  $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ ,  $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$ ,  $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$  は左手系なのでスカラー三重積は  $-V$  を表すことから

$$-V = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} \dots (2)$$

がなりたつ。(1) と (2) を比較すると

$$\begin{aligned} (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} &= -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, & (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} &= -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} &= -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \end{aligned} \dots (3)$$

となり、スカラー三重積のかける順番を1つ入れかえれば符号が逆になる。又内積・外積の性質から

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} \dots (4)$$

$$(\vec{a} \times k\vec{b}) \cdot \vec{c} = k((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) \quad (k \text{ は定数}) \dots (5)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \dots (6)$$

等がわかる。(6) は  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$  から出る。

例  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3$  のとき

$$(\vec{a} \times 2\vec{c}) \cdot \vec{b} = 2((\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}) = 2(-(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = 2 \times (-3) = -6$$

$$(\vec{a} \times (\vec{b} + 2\vec{c})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + 2(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} = 3 + 2 \times 0 = 3$$

問 例の場合に次の値を求めよ。

(1)  $(\vec{c} \times 3\vec{a}) \cdot \vec{b}$

(2)  $((2\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{b})) \cdot \vec{a}$

## < 行列 >

自然数  $n$  と  $m$  に対して、 $n \times m$  個の数を縦に  $n$  個、横に  $m$  個の長方形に並べて書いたものを  $n$  行  $m$  列の行列 (*matrix*)、または  $(n, m)$  型の行列、 $(n, m)$  行列などという。一つの行列を構成する  $n, m$  個の数をその行列の成分という。また同じ横線上に並んでいる  $n$  個の数の組をその行列の行、同じ縦線上に並んでいる  $m$  個の数の組をその行列の列という。第  $i$  行と第  $j$  列の交叉点にある成分をその行列の  $(i, j)$  成分という。

例 1 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  は 2 行 3 列の行列 ( (2,3) 型行列 ) で、

第 1 行は (1, 3, 5)、第 2 行は (2, 4, 6)、第 1 列は  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、

第 2 列は  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 、第 3 列は  $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  である。また (1, 2) 成分は

1 行 2 列の成分だから 3 であり、(2, 3) 成分は 6 である。

問 1 行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$  の型 (何行、何列) と第 1 行、第 2 列を

書き、(1, 4) 成分と (2, 3) 成分を求めよ。

行列を表すのに  $A, B, C \dots, X, Y \dots$  等の大文字の斜体を用いる。

行列の型が特別の場合、 $(n, m)$  型行列の代わりに別名で呼ぶ。

$n = m$  の場合は  $n$  次の正方行列という。 $(n, 1)$  型行列

を  $n$  次の列ベクトル、 $(1, m)$  型行列を  $m$  次の行ベクトルという。

例 2  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = (1 \ 4 \ 6)$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の場合、 $A$  は 2 次の正方行列、 $B$  は 3 次の行ベクトル、 $C$  は 2 次の列ベクトル、 $D$  は 3 次の正方行列、 $E$  は 3 次の列ベクトルである。

問 2 4 次の行ベクトル、3 次の列ベクトル、2 次の正方行列の例を上げよ。

## < 行列の計算 1 >

一般の  $(n, m)$  型行列を表すのに

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

のように一つの小文字  $a$  に二重の添字をつけて表す。このように行列  $A$  の型がはっきり分かっている、 $A$  の  $(i, j)$  成分が  $a_{ij}$  で表されるとき、 $A = (a_{ij})$  と略記する。

二つの行列  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  は型が同じで、かつ対応する成分が等しい ( $a_{ij} = b_{ij}$ ) とき、そのときに限って  $A$  と  $B$  は等しいといい、 $A = B$  と書く。また同じ型の行列に対し、ベクトルの場合と同様にして、和、差、実数倍が定められる。

共に  $(m, n)$  型行列  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  に対し、

$$\begin{aligned} \text{和:} & \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \\ \text{差:} & \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij}) \\ \text{実数倍:} & \quad kA = (ka_{ij}) \quad (k \text{ は実数}) \end{aligned}$$

と定める。

$$\text{例 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (3) \quad 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$(3) \quad -2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

## <行列の計算2>

行列の和・差実数倍はベクトルの場合とまったく同じである。その際零ベクトルに相当するものはすべての成分が0(ゼロ)である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であり、アルファベットのOの大文字の斜体で表し、零行列という。

例題  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  のとき

$$3(X - 2A) + 2(B + X) = O$$

をみたす行列  $X$  を求めよ。

解 上の式から

$$5X - 6A + 2B = O$$

より

$$X = \frac{1}{5}(6A - 2B)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ 6 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

問 例題の行列  $A, B$  に対し、次式をみたす行列  $X$  を求めよ。

$$(1) 3A + 5X - 2B = 0$$

$$(2) 3(2B - 4X) = -2(X - 5A)$$

## < 行列の積 1 >

$m$  次行ベクトル  $A$  と  $m$  次列ベクトル  $B$  が

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

であるとき  $A$  と  $B$  の積を

$$AB = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$$

と定める。

例 (1)  $(3 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$

(2)  $(3 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 12 + 20 + 6 = 38$

(3)  $(3 \ 2 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 + (-1) \times 7 = 31$

注) (1) は平面のベクトルの内積, (2) は空間ベクトルの内積を表していると考えてもよい。

問 次のベクトルの積を求めよ。

(1)  $(7 \ 5) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ , (2)  $(5 \ 0 \ -6) \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$   
=

(3)  $(1 \ 8 \ -7 \ 5) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

## <行列の積2>

$$n \text{ 行 } m \text{ 列の行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{と}$$

$$m \text{ 行 } \ell \text{ 列の行列 } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} \quad \text{に対して、積を}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

と定める。

$$\text{例 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 & 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$$

問 次の行列の積を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

### < 行列の積 3 >

例 (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 6 + (-1) \times 7 \\ 2 \times 5 + 0 \times 6 + 4 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 38 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 3 \times 9 + (-1) \times 10 \\ 2 \times 8 + 0 \times 9 + 4 \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 56 \end{pmatrix}$

(3) (1) と (2) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 38 & 56 \end{pmatrix}$$

(注) 行列  $A, B$  に対して, 左の行列  $A$  の列の数と右の行列  $B$  の行の数が同じでないと積  $AB$  はできない。

行列の積の定義から, 次のことがわかる。

$(n, m)$ 行列 $\times (m, \ell)$ 行列 $= (n, \ell)$ 行列
--

問 次の行列の積を求めよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(3)  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

(4)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

## <行列の積 4>

行列  $A$ 、 $B$  が共に  $n$  次の正方行列の場合は、その積として  $AB$  と  $BA$  が共に定義されるが、 $AB$  と  $BA$  が等しいことはまれである。(このことを「交換法則がなりたない」という。)

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ のとき、}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times (-3) & 1 \times (-1) + 2 \times 6 \\ 3 \times 4 + 5 \times (-3) & 3 \times (-1) + 5 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & 27 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + (-1) \times 3 & 4 \times 2 + (-1) \times 5 \\ (-3) \times 1 + 6 \times 3 & (-3) \times 2 + 6 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

であり、 $AB \neq BA$  となる。

問 行列  $A$ 、 $B$  が以下の場合に積  $AB$  と  $BA$  を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

## < 行列の積 5 >

行列の乘法に関しては、交換法則は成り立たないが、それ以外は数の計算と同様にできる。 $A, B, C$  を行列、 $k$  を実数とすると

$$\text{実数倍} \quad (kA)B = A(kB) = k(AB)$$

$$\text{結合法則} \quad (AB)C = A(BC)$$

$$\text{分配法則} \quad (A+B)C = AC + BC \quad \cdots (1)$$

$$C(A+B) = CA + CB \quad \cdots (2)$$

が成り立つ。ただし、交換法則が成り立たないので、

(1) と (2) は等しくない。

例  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  のとき

$$\begin{aligned} AC+BC &= (A+B)C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 上の  $A, B, C$  に対し、以下の計算をせよ。

$$(1) C(B+A) =$$

$$(2) BC - AC =$$

$$(3) AA + AC =$$

## < 行列の積 6 >

3つの行列  $A$ 、 $B$ 、 $C$  の積  $(AB)C = A(BC)$  を単に  $ABC$  と書く。又、 $AA = A^2$ 、 $AAA = A^3$ 、 $AAAA = A^4$  と表す。

例  $A$ 、 $B$  を同じ型の正方行列とすると、分配法則より

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

であるが、交換法則が成り立たないので

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

である。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A(A-B) + B(A-B)$$

$$= (A+B)(A-B)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

問 上の行列  $A$ 、 $B$  に対し、次式を計算せよ。

(1)  $A^2 - B^2$

=

(2)  $A^2 - BA + AB - B^2$

=

## <2 次の行列式 1 >

2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  に対し

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

を行列  $A$  の行列式 (*determinant*) という。この定義より次の性質がわかる。

- [ ] 行と列を入れ替えても行列式の値は同じ  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$
- [ ] 二つの列(又は行)をいれかえると符号が反対になる。  $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- [ ] 1つの列(又は行)を定数倍した行列式の値は元の行列式の値の定数倍になる。  $\begin{vmatrix} k a_1 & b_1 \\ k a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (k \text{ は定数})$
- [ ] 分配法則が成り立つ  $\begin{vmatrix} (a_1 + c_1) & b_1 \\ (a_2 + c_2) & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- [ ] 2つの列(又は行)が一致すれば行列式の値は0  $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$

例1  $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times (8 - 5) = 18$

例2 2つの実数  $x, y$  に対し

$$k_1 = 2x + 5y, \quad k_2 = x + 4y$$

とおくと

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2x + 5y) & 5 \\ (x + 4y) & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3x$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & (2x + 5y) \\ 1 & (x + 4y) \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3y$$

問 2つの実数  $x, y$  に対し

$$k_1 = 3x + 2y, \quad k_2 = x - y$$

とおくとき次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} k_1 & 2 \\ k_2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix}$$

= \qquad \qquad \qquad =

## <2 次の行列式 2 >

例  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 23 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 41 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 20 & 23 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} = 20 \times 16 - 23 \times 13 = 21$$

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 14 & 41 \\ 7 & 22 \end{vmatrix} = 14 \times 22 - 41 \times 7 = 21$$

(注) 一般に  $AB \neq BA$  であるが、 $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)$  が成立する。

問 行列  $A, B$  が以下の場合に、 $AB, BA, \det(A), \det(B), \det(AB), \det(BA)$  を求めよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB =$$

$$BA =$$

$$\det(A) =$$

$$\det(B) =$$

$$\det(AB) =$$

$$\det(BA) =$$

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix}$

$$AB =$$

$$BA =$$

$$\det(A) =$$

$$\det(B) =$$

$$\det(AB) =$$

$$\det(BA) =$$

### <3 次の行列式 1 >

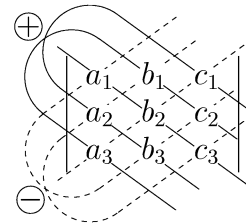
3 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$  に対し

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

を行列  $A$  の行列式という。上の式の右辺を展開すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

となる。この計算規則を覚えるためには、右図のように考えるとよい。右図では実線はプラスの項であり、点線はマイナスの項である。この方法をサラスの方法という。



例

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7 = 0$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(3)  $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

## < 3 次の行列式 2 >

サラスの方法において、行列式の行と列を入れかえた行列式を元の行列式と比較すると、



プラスの項（実線）は両方とも  $a_1b_2c_3$  ,  $a_2b_3c_1$  ,  $a_3b_1c_2$  で等しい。同様にマイナスの項（点線）も両方同じであるから、2つの行列式は等しい。従って

<p>[ ] 行列式の行と列を入れかえても、行列式の値は同じ。</p>	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
-------------------------------------	---

となる。行列式の定義

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$	(列展開)
--	-------

を列展開という。[ ] の性質から

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$	(行展開)
--	-------

がなりたつ。この式を行展開という。

例 
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-4 + 3) - 3 \times (-5 + 2) + 0 = -2 + 9 = 7$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	(2) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	(3) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
---	--	--

### < 3 次の行列式 3 >

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

が成り立つ。(最後の式は 25 ページの (1) 式からわかる) これによって、  
3 次の行列式は空間ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  のスカラー三重積により

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

と表されることがわかった。スカラー三重積の性質 (25 ページ (3) 式) より

$$(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

であるから、行列式の二つの列を入れかえると符号が逆になる。

前ページの [ ] より、

$$[ ] \text{ 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。}$$

がなりたつ。

$$\text{例 (1)} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \left\{ 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right\} = 5$$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

## < 3 次の行列式 4 >

3 次の行列式は空間ベクトルのスカラー三重積であった。スカラー三重積の性質 (25 ページ (4) ~ (6)) より、次の性質がわかる。

[ ] 1 つの列 (または行) を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。

例 1  $k$  を定数とすると

$$k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

[ ] 分配法則がなりたつ。

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1 + d_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2 + d_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3 + d_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2 - a'_2) & (b_2 - b'_2) & (c_2 - c'_2) \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[ ] 2 つの列 (または行) が一致すれば行列式の値は 0。

例 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

例 4

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+3) & 1 \\ 2 & (2+3) & 1 \\ 3 & (3+3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (4-1) \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= - \left\{ 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = -1$$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



## <4 次の行列式 1>

3 次の行列式と同様に、4 次の行列式を列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad (\text{列展開})$$

で定義する。証明は略すが、3 次の行列式と同様な以下の性質が 4 次の行列式に対しても成立する。

- [ ] 行列式の行と列を入れかえても行列式の値は同じ。
- [ ] 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。
- [ ] 1 つの列 (または行) を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。
- [ ] 分配法則が成り立つ。
- [ ] 2 つの列 (または行) が一致すれば行列式の値は 0。
- [ ] 1 つの列 (または行) を定数倍して他の列 (または行) に加える (または引く) ことによって行列式の値は変わらない。

性質 [ ] より、4 次の行列式を行展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \quad (\text{行展開})$$

によっても計算できる。

例

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 3 \times 3 - 0 = 9$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 1 = -2$$

(注) (1) は列展開、(2) は行展開によって計算してある。

問 次の行列式を計算せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$



## < 高次の行列式 >

4 次の行列式と同様に、5 次の行列式も列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \\
 + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}$$

(列展開)

によって定義する。6 次以上の行列式も一つ次数の低い行列式による列展開によって同様に定義される。このように定義すると、42 ページの性質 [ ] ~ [ ] が成り立つ。従って実際に行列式の計算を行うときは、43 ページのように [ ] の性質を使い基本変形によって次数の低い行列式になおして計算する。

問 1 42 ページの行展開と同様にして、5 次の行列式の行展開の式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} =$$

問 2 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

## <2元連立一次方程式1>

例 与えられた数  $k_1, k_2$  に対して、連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + 5y = k_1 \\ x + 4y = k_2 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

をみたく解  $x, y$  を求めたい。15 ページ例 2 より

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + 5y & 5 \\ x + 4y & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2x + 5y \\ 1 & x + 4y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \text{ より } x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(4k_1 - 5k_2) \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) \text{ より } y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(2k_2 - k_1) \dots\dots\dots (5)$$

が求まる。このようにして連立方程式 (1) の解を求める方法を  
クラメルの方法という。

問 1 与えられた数  $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$  は  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  とする。

連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

の解  $x, y$  に対し、例の (2), (3) のように

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = \qquad \qquad \qquad \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} =$$

を  $x$  と  $y$  で表すことにより、例の (4), (5) のように、解  $x, y$  を  
 $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$  を用いた行列式で表せ。

$$x = \qquad \qquad \qquad y =$$

問 2 問 1 の式をクラメルの公式という。次の連立方程式をクラメルの  
公式で解け。

$$(1) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 5y = k_1 \\ x + 2y = k_2 \end{cases}$$

## <2元連立一次方程式2>

2元連立一次方程式で右辺が0の場合

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

を考える。もし係数行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  ならば、クラメルの公式より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

より、解は  $x = y = 0$  だけである。しかし  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$  の場合は  $x = y = 0$  以外にも解がある。

例 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 & \dots\dots\dots (2) \\ 8x - 12y = 0 & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

を考える。このとき係数行列式は

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$$

になる。(3) 式を4で割ると(2)式と同じ式になる。従って(2)式をみたま  $x$  と  $y$  の組は全て(2)と(3)の解である。たとえば

$$x = 3, \quad y = 2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

は解である。一般に任意の実数  $t$  に対し

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

は(2)・(3)の解である。逆に(2)と(3)の全ての解は(5)の形をしている。

一般に(1)式において、 $x = y = 0$  以外の解をもつための必要十分条件は係数行列式が0になることである。

$$(1) \text{ 式が } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 以外の解をもつ } \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

問 次の連立方程式をみたま  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  以外の解  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を求め、(5)式のように表せ。

$$(1) \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 10x - 25y = 0 \end{cases}$$

## <3元連立一次方程式>

例 次の3元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

をみたく解  $x, y, z$  を求めたい。ただし

$$\text{係数行列式} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \dots\dots\dots (2)$$

をみたくとする。この条件があれば25ページと同様に求められる。

3次の行列式の性質 [ ], [ ], [ ] (20ページ) より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

が求まる。これもクラメルの公式という。

問1 例の場合に(3)式のように

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

を  $y$  と  $z$  で表すことにより、(1)の解  $y, z$  を(4)式のように表せ。

$$y =$$

$$z =$$

問2 クラメルの公式を用いて、次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y - z = 2 \\ 3x + 2z = -1 \\ -2x - 5y = -3 \end{cases}$$

$$x =$$

$$, y =$$

$$, z =$$

$$x =$$

$$, y =$$

$$, z =$$

## < 単位行列 >

$n$  次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の成分で、 $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$  を対角成分という。 $n$  次の正方行列  $A$  の対角成分以外の成分が全て 0 であるとき、 $A$  を  $n$  次の対角行列といい、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と略記する。

問 1  $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$  に対し、積  $AB$  と  $BA$  を計算せよ。

$$AB =$$

$$BA =$$

$n$  次の対角行列の対角成分が全て 1 である行列を  $n$  次の単位行列といい、 $I$  で表す。

例  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は 2 次の単位行列

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  は 3 次の単位行列

問 2 以下の場合に積  $AI$  と  $IA$  を計算せよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AI =$$

$$IA =$$

(2)  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AI =$$

$$IA =$$

## < 零因子 >

$n$  次の正方行列  $A, B$  と零行列  $O$  に対し、

$$AO = OA = O$$

が成り立つが、

「 $AB = BA = O$  であっても  $A \neq O, B \neq O$  の場合がある」

例  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$  のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $A \neq O$  かつ  $B \neq O$  にもかかわらず  $AB = O$  となる。

このような行列  $A, B$  を零因子という。

問 1 次の行列の積を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  のとき、

次の積を求めよ。

$$(1) AB =$$

$$(2) AC =$$

$$(3) A(B - C) =$$

問 3  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$  のとき、次の行列の積を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

## < 正則行列 >

$n$  次の正方行列  $A$  と  $n$  次の単位行列  $I$  に対し、ある  $n$  次正方行列  $X$  が存在して、

$$AX = XA = I$$

となるとき、行列  $A$  を正則行列という。この行列  $X$  は  $A$  に対し一意的に定まる。 $X$  を  $A$  の逆行列といい

$$X = A^{-1}$$

と書く。

**例 1**  $n$  次の単位行列  $I$  は任意の  $n$  次正方行列  $A$  に対して

$$AI = IA = A$$

である。特に  $A = I$  の場合は

$$II = II = I$$

より、単位行列  $I$  は正則行列であり、 $I^{-1} = I$  となる。

**例 2**  $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  とすると  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

より  $A^{-1} = B$ ,  $B^{-1} = A$  である。

**問 1**  $A, B$  が以下の場合に、積  $AB$  と  $BA$  を計算せよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

$$AB =$$

$$BA =$$

**例 3** 零行列  $O$  は正則行列でない。もし逆行列  $X$  が存在すれば  $XO = OX = I$  となるはずが、零行列  $O$  との積はやはり零行列  $O$  になり、 $O = I$  となって矛盾が生じる。

**例 4**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  に対し、積は  $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$A$  は正則行列でない。もし  $A$  が正則行列であると仮定すれば逆行列  $A^{-1}$  が存在して

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O$$

となって  $B = O$  となり矛盾する。

**問 2** 例 4 の場合に  $B$  が正則行列でないことを示せ。

## < 逆行列 1 >

**例題** 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  は正則行列である。逆行列  $A^{-1}$  を求め、 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  を確かめよ。

(解) 逆行列を  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$  とおくと

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y & 2z+5w \\ x+4y & z+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+4y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z+5w=0 \\ z+4w=1 \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式を解くと、

$$x = \frac{4}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{5}{3}, w = \frac{2}{3}$$

より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より  $A^{-1}$  が  $A$  の逆行列であることがわかる。

**問** 行列  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  は正則行列である。逆行列  $A^{-1}$  を求め、 $A^{-1}A = I$  を確かめよ。

## < 逆行列 2 >

問題 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対し、

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

であれば、行列  $A$  は正則行列となる。このとき、  
 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求め、 $A^{-1}A = I$  を確かめよ。

### < 逆行列 3 >

2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して、

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

であれば  $A$  は正則行列であり、前ページの結果より、逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。実は  $\det(A) = 0$  であれば、正則行列でないことがわかっている。

例  $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  に対し、

$$\det(A) = 8 \times 3 - 10 \times 2 = 4 \neq 0$$

より  $A$  は正則行列で

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

となる。実際

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{4} - \frac{10}{2} & \frac{40}{2} + 20 \\ \frac{6}{4} - \frac{3}{2} & -\frac{10}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{4} - \frac{10}{2} & \frac{30}{4} - \frac{15}{2} \\ -\frac{8}{2} + 4 & -\frac{10}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 行列  $A$  が以下の場合に、 $A$  が正則行列かどうかを判定し、正則行列ならば逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(3)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

(4)  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$



## <固有値 2>

一般に  $n$  次の正方行列  $A$  に対し

$$Ax = \lambda x$$

をみたく零ベクトルでない縦ベクトル  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  と定数  $\lambda$  が存在す

るとき、 $\lambda$  を ( $A$  の) 固有値、 $x$  を ( $\lambda$  に対する) 固有ベクトルという。  
2 次の場合には、固有値  $\lambda$  を求めるために、前ページの (3) 式をみたく  $\lambda$  を求めれば良い。一般の場合にも同様なことが成り立つ。

$n$  次の正方行列  $A$  の固有値  $\lambda$  は、 $\det(A - \lambda I) = 0$  の解である。

ここで  $I$  は  $n$  次の単位行列である。 $n$  次方程式  $\det(A - \lambda I) = 0$  を固有方程式という。

例 3 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値を求めたい。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda) \{(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\} = -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3)$$

であるから

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3) = 0 \iff \lambda = 1, 0, 3$$

よって  $A$  の固有値は  $\lambda = 0$ 、 $\lambda = 1$ 、 $\lambda = 3$  である。

問 行列  $A$  が以下の場合に  $A$  の固有値を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (4) A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

## <固有ベクトル>

例 34 ページの例より、行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値は  $\lambda = 2$  と  $\lambda = 5$  であった。

この固有値に対する固有ベクトルを求めたい。固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は

連立方程式

$$(*) \begin{cases} (3 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (4 - \lambda)y = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  以外の解である。

(1)  $\lambda = 2$  のとき、連立方程式 (\*) は

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

より  $x + 2y = 0$  であれば何でも良い。この1つの解として

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  をとれば、それが固有値  $\lambda = 2$  に対する固有ベクトル

である。実際  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  となる。

(2)  $\lambda = 5$  のとき、連立方程式 (\*) は

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

より、 $x - y = 0$  であれば何でも良い。この1つの解として

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  をとれば、それが固有値  $\lambda = 5$  に対する固有ベクトルで

ある。実際  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  となる。

以上をまとめると

固有値  $\lambda = 2$  に対する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値  $\lambda = 5$  に対する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問 行列  $A$  が以下の場合に、各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

## < 行列の対角化 >

例 前ページの例より、行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値は  $\lambda = 2$  と  $\lambda = 5$  であり、固有値  $\lambda = 2$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 、固有値  $\lambda = 5$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  であった。この固有ベクトル  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を並べた行列を

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $\det(P) = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3$  より逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで  $P^{-1}AP$  を計算すると、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、対角行列になる。このとき対角成分の 2 と 5 が行列  $A$  の固有値となっている。このような行列  $P$  をえらび  $P^{-1}AP$  が対角行列になるようにすることを行列の対角化という。

問 行列  $A$  が以下の場合に、例のように固有ベクトルを並べた行列  $P$  を作り、 $P$  の逆行列  $P^{-1}$  を求め、 $P^{-1}AP$  が対角行列になるようにせよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

(3)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P =$

$P^{-1} =$

$P^{-1}AP =$

## < 行列の $n$ 乗 >

2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対し、固有方程式

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

が重根をもつ場合は行列  $A$  を対角化できない。しかし固有方程式が異なる 2 根を持つ場合は前ページのようにして行列  $A$  を対角化できる。この場合には  $A$  の  $n$  乗  $A^n$  を次のようにして求めることができる。

例 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  の  $n$  乗  $A^n$  を求めたい。前ページの例から  $A$  を対角化して  $B$  になったとすると

$$P^{-1}AP = B$$

ただし

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。ここで  $B$  は対角行列であるから

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$$

より

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \cdots (1)$$

となる。一方

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A)(PP^{-1})(AP) = (P^{-1}A)I(AP) = P^{-1}A^2P$$

$$B^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^2)(PP^{-1})(AP) = P^{-1}A^3P$$

より帰納的に

$$B^n = P^{-1}A^nP \cdots (2)$$

がわかる。(1) = (2) より

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

より

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 5^n \\ -2^n & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}+5^n}{3} & \frac{-2^{n+1}+2 \times 5^n}{3} \\ \frac{-2^n+5^n}{3} & \frac{2^n+2 \times 5^n}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 以下の場合に  $A^n$  を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^n =$$

$$A^n =$$

$$A^n =$$

## < 平面の一次変換 1 >

座標平面上の任意の点  $(x, y)$  を点  $(x', y')$  に移す変換が、  
 $a, b, c, d$  を定数として、 $x, y$  の一次式

$$(1) \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

で表されている場合に、一次変換という。(1) を行列で表すと

$$(2) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、一次変換(1)を(2)式、又は単に行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  で表す。

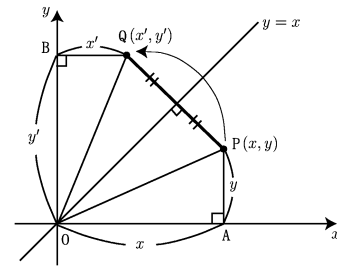
**例1** 直線  $y = x$  に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移動したとすれば、右図より  $\triangle OAP$  と  $\triangle OBQ$  は合同だから

$$x' = y, \quad y' = x$$

となる。よって

$$\begin{cases} x' = 0 \times x + 1 \times y \\ y' = 1 \times x + 0 \times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  である。



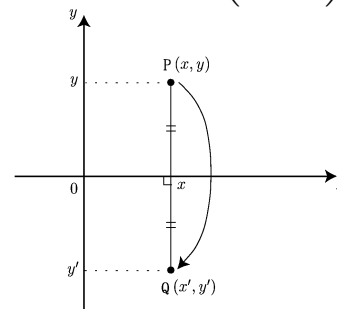
**例2**  $x$  軸に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移動したとすると  
 右図より

$$x' = x, \quad y' = -y$$

であるから

$$\begin{cases} x' = 1 \times x + 0 \times y \\ y' = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  である。



**問** 平面上の点を  $y$  軸に関して対称に移動する一次変換を  $A$  とする。 $A$  を表す行列を求めよ。

## < 平面の一次変換 2 >

例 平面上の点を原点を中心として反時計まわりに角度  $30^\circ$  だけ回転移動する変換を考える。この変換によって(右上図のように)点  $P(x, y)$  が点  $Q(x', y')$  に移動したとする。 $(x', y')$  を  $(x, y)$  で表したい。この問題は右下図のように、複素平面でも同じである。点  $P$  を表す複素数が  $z = x + iy$  であり、点  $Q$  を表す複素数が  $z' = x' + iy'$  である。複素数の性質(ワークブック 5)より、 $z'$  は  $z$  に偏角  $30^\circ$ 、絶対値 1 の複素数をかけたものであるから

$$z' = z \times (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

となる。従って

$$x' + iy' = (x + iy) \times (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = (x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ) + i(x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ)$$

であるから

$$\begin{cases} x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ \\ y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり一次変換である。この一次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問 次の一次変換を表す行列を求めよ。(回転は全て反時計まわりとする)

- (1) 原点中心、 $45^\circ$  回転                      (2) 原点中心、 $60^\circ$  回転

- (3) 原点中心、 $90^\circ$  回転                      (4) 原点中心、 $\theta$  回転

