高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

10

内容

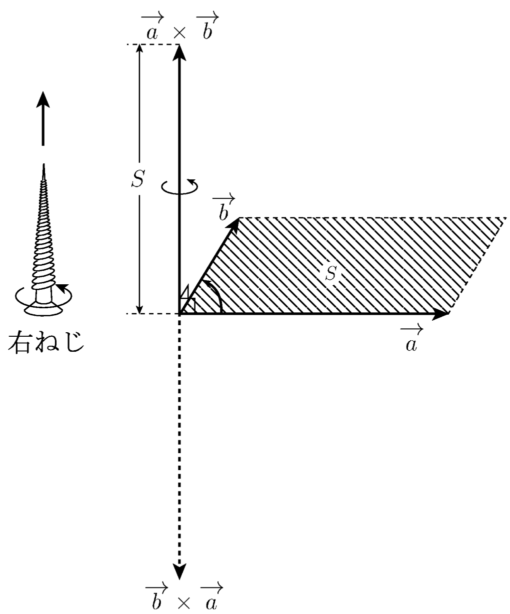
◎ 平面のベクトル

◎ 内積

◎ 2次の行列式と面積

◎ 空間のベクトル

◎ 外積



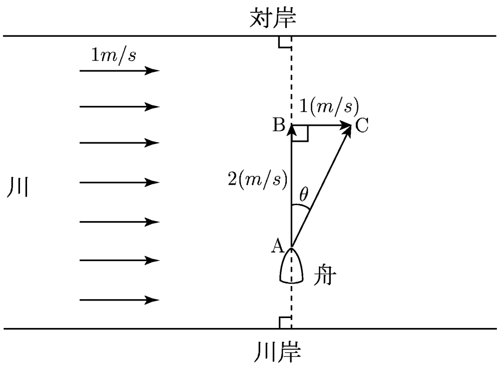
電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

＜速度の合成＞

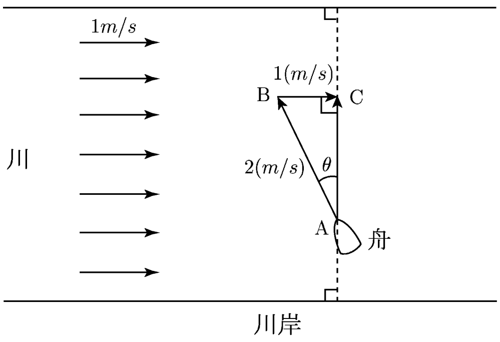
例1　静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まですすむはずであるが、かわのながれのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを 2(=舟の速さ)、BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より　AC= $\sqrt{5}$ となるから、

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$

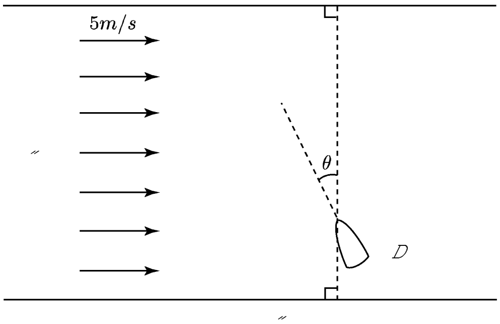


例2　例 1 と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。例 1 と同様に、舟の速度を矢線 AB(長さ 2)、川の速度を矢線 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$

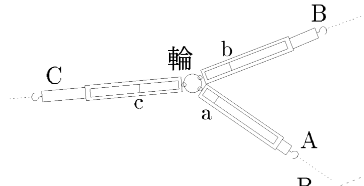


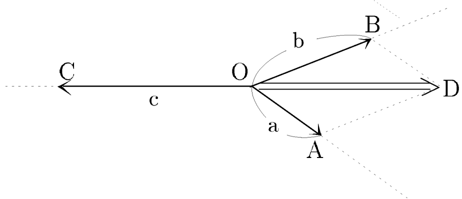
問　静水中を 13m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 5m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



＜力の合成＞

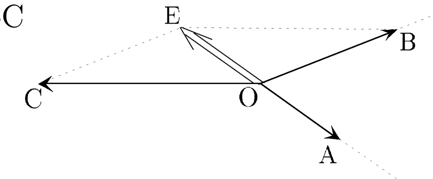
例　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, ３本のばね秤 A, B,C をひっかける。A,B,C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a,b,c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ矢線をひき, その矢線の先を A,B,C とする。



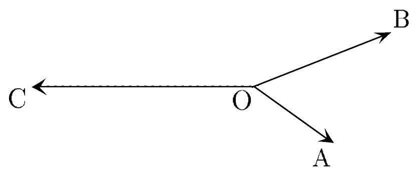


次に OA,OB を２辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 矢線 OD と矢線 OC は方向が同じ（矢印の向きは逆）で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を矢線 ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$) で表すと, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ との合力が $\overrightarrow{OD}$ であり, $\overrightarrow{OC}$ とつりあっていることがわかる。

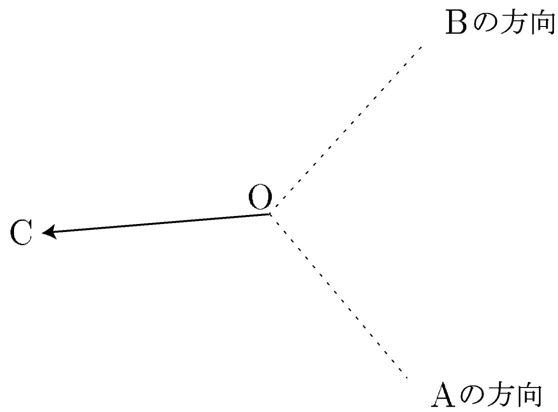
同様にして OB,OC を２辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 矢線 OE と OA は方向が同じ（向きが逆）で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の合力が $\overrightarrow{OE}$ であり, $\overrightarrow{OA}$ とつりあっている。



問１　右図に $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ との合力 $\overrightarrow{OF}$ を作図せよ。



問２　ばねの方向と,C の目盛りだけは記録したが, A,B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の矢線の長さがわからない。$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ がつりあうように, 右図に矢線 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を作図せよ。



＜平面上のベクトル1＞

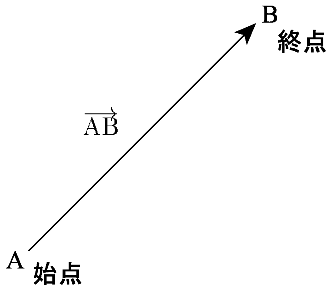
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を矢印（矢線）で示し、その大きさは矢線の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変らないときは、一本の矢線で流れの速度を表すことができる。このように、矢線で、向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの矢線 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい、B を**終点**という。ベクトルは $\overrightarrow{a}$ のような記号で表したり、太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする（ワークブックでは $\overrightarrow{a}$ と書くことにする）。



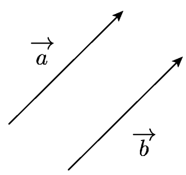
ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ について、向きが同じで、大きさが等しいとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**等しい**といい、

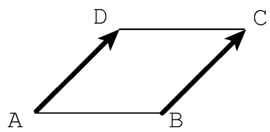
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



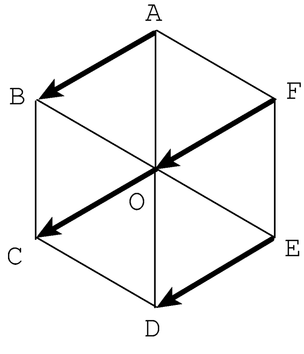


例　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

である。

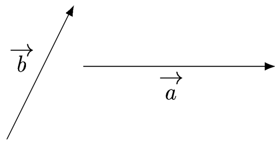
問　右の正六角形で、$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。



＜平面上のベクトル２＞

　１ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、２ページでやった２つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

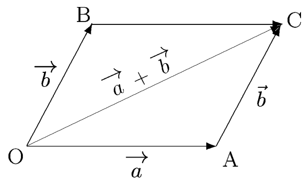
　２つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が与えられているとする。



　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A、B とし、OA、OB を２辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が決まる。これを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**和**といい、

$$\vec{a}+\vec{b}$$

と書く。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が２つの力であれば $\vec{a}+\vec{b}$ はその合力を表す。又、$\vec{a}$、$\vec{b}$ が２つの速度であれば、$\vec{a}+\vec{b}$ はその合成速度を表す。



$$\overrightarrow{\boxed{\mathrm{O}}\mathrm{A}}+\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\mathrm{C}}}=\overrightarrow{\boxed{\mathrm{OC}}}$$

　ここで、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから、

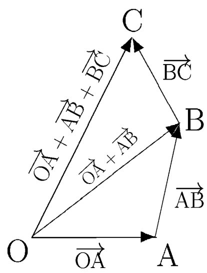
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと、A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最初の到着点 C に行くベクトルになる。

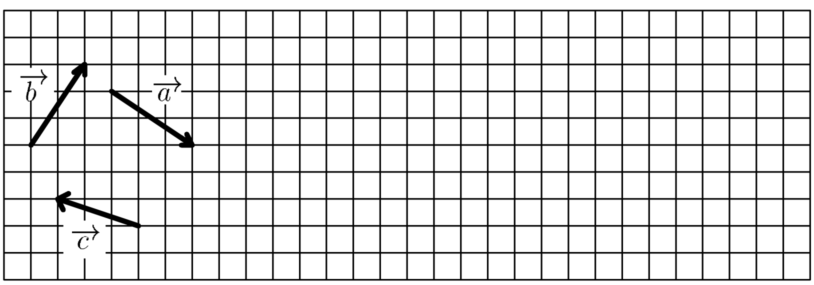
　同様にして、４点 O、A、B、C に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。



問　ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、が下図の場合に、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を作図せよ。

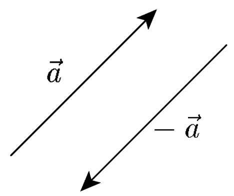


＜平面上のベクトル3＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。
これを**零ベクトル**といい、$\overrightarrow{0}$ で表す。つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して、大きさが同じで、
向きが反対であるベクトルを、$\overrightarrow{a}$ の
逆ベクトルといい、$-\overrightarrow{a}$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき、$-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。

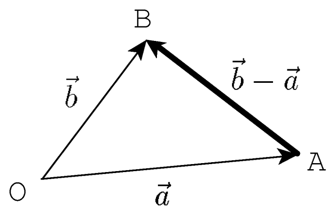


$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

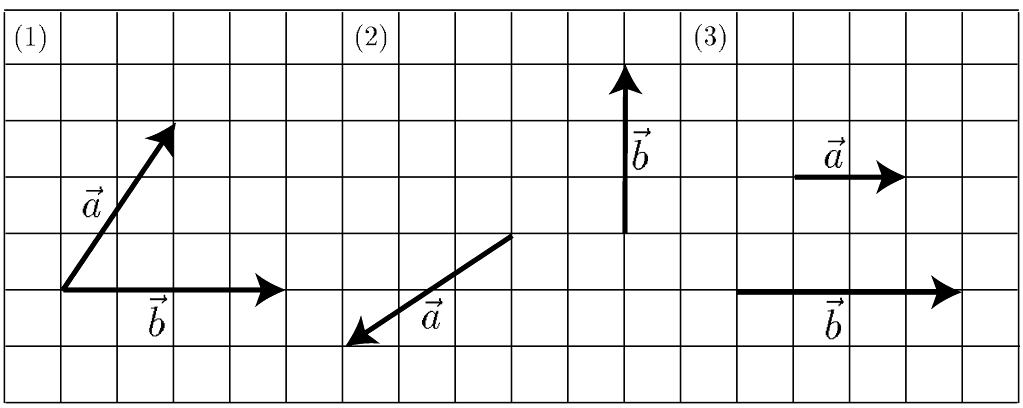
だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ の**差**といい、



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$

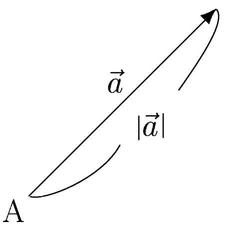
と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には
「終点 (B)− 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問　$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が次のように与えられている場合に $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ を図示せよ。



＜平面上のベクトル４＞

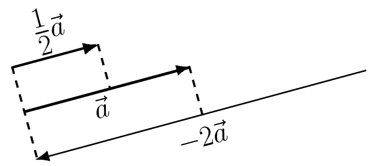
ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを $|\overrightarrow{a}|$ で表す。
$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは、$|\overrightarrow{a}|$ は線分 AB の長さである。



大きさが 1 であるベクトルを **単位ベクトル** という。

$\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{a}$ と整数 k に対して

(1) $k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル
(2) $-k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

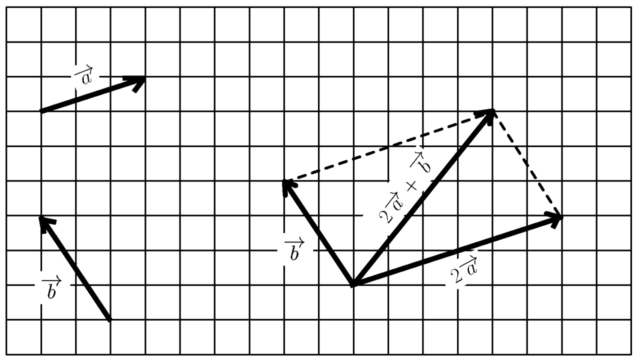


と定める。このようなベクトルを $\overrightarrow{a}$ の**実数倍** (又は**スカラー積**) という。

例　ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が右図の様に与えられているとき

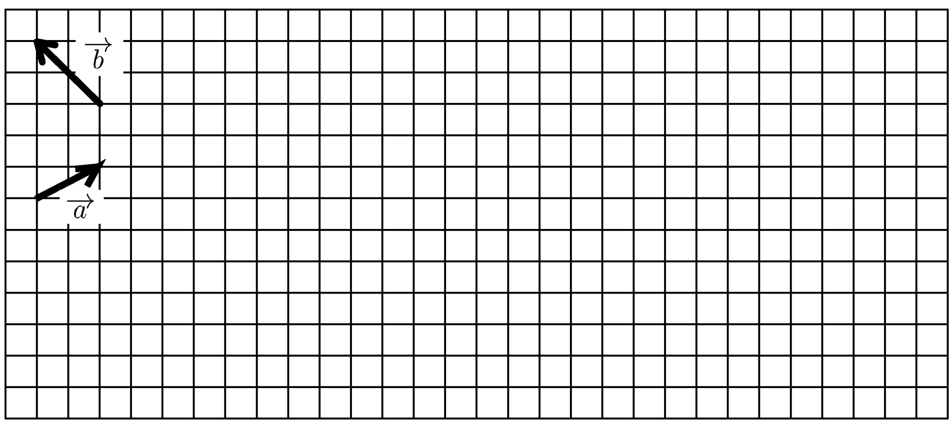
$$2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$$

を図示すると、右の様になる。



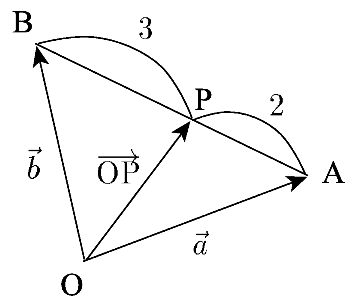
問　ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

(1) $-3\overrightarrow{a}$、 (2) $\dfrac{5}{2}\overrightarrow{b}$、 (3) $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$、 (4) $2\overrightarrow{a}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{b}$



＜平面上のベクトル5＞

例題 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で、線分 AB を $2:3$ に内分する点を P とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ で表せ。



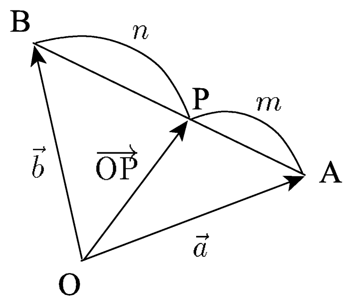
（解） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{2+3}\overrightarrow{\mathrm{AB}},$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

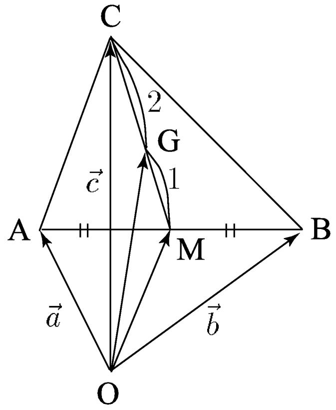
より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=\frac{3}{5}\overrightarrow{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{b}$$

問1 線分 AB を $m\ :\ n$ に内分する点を P とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{a}\left(=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ と $\overrightarrow{b}\left(=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ で表せ。



問2 三角形ABCに対し、ABの中点をM, MCを$1:2$に内分する点をG, $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とする。

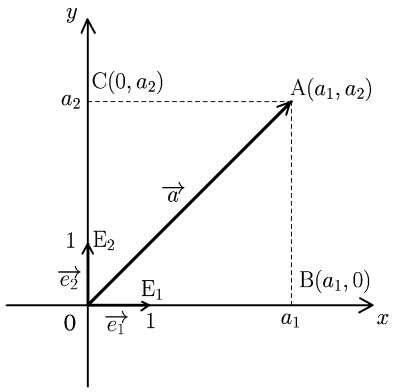


(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

＜ベクトルの成分1＞



O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{E}_1(1,0)$、$\mathrm{E}_2(0,1)$ に対して、
$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}$ 、$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}$
を **基本ベクトル** という。

平面上の任意の点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$ に対し、2 点 $\mathrm{B}(a_1,0)$、$\mathrm{C}(0,a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a_1\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a_2\overrightarrow{e_2}$ だから、$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

と表す事が出来る。この a_1、a_2 を $\overrightarrow{a}$ の **成分** といい、a_1 を x 成分、a_2 を y 成分という。このとき $\overrightarrow{a}$ を成分を使って

$$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

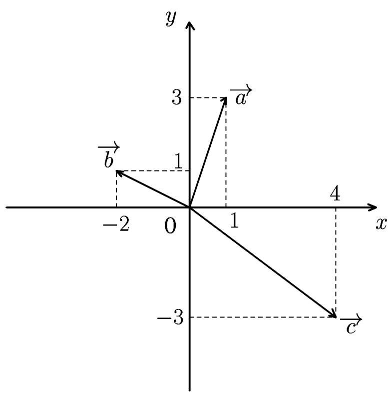
と表す。(このように成分を縦に並べる表し方を縦ベクトル表示といい、$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$ の様に横に並べる表し方を横ベクトル表示という。本書では、縦ベクトル表示を使う。)

例1　$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、$\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、$\overrightarrow{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots$ 零ベクトル

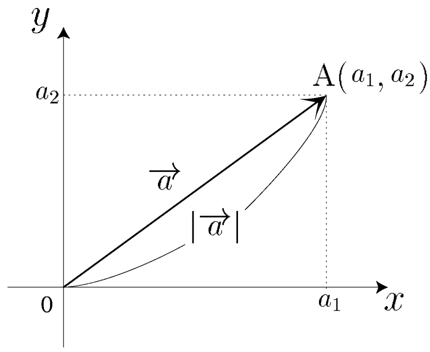
例2　2 点 A(2,3)、B(4,−1) に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}、\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

問　右図のベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ を成分で表せ。



＜ベクトルの成分2＞



右図のように $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ は,

線分 OA の長さと一致するから

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

例題　2点 A$(3,1)$, B$(4,5)$ が与えられたとき,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように

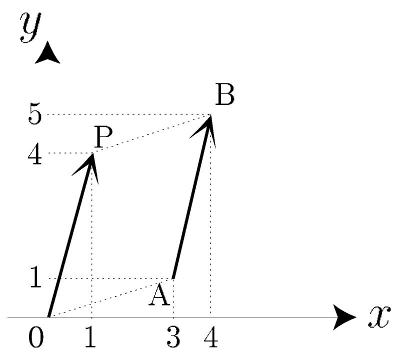
x 軸方向に -3
y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に
なるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$



(別解)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots(\text{終点} - \text{始点}) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問　次の2点 A,B に対し, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し, その大きさを求めよ。

(1)　A $(5,2)$,　B $(7,3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2)　A $(4,-1)$,　B $(3,1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

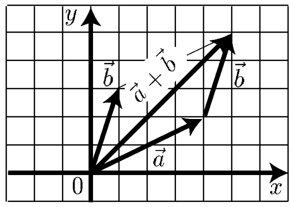
＜ベクトルの成分3＞

例題　$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$, (2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, (3) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$, (4) $2\overrightarrow{b}$

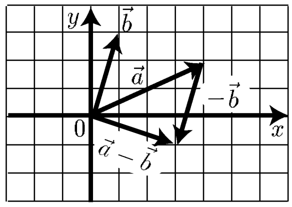
（解）　(1) 右図より

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$



(2) 右図より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}&=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})\\&=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

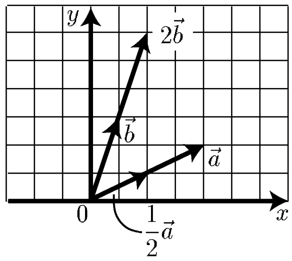


(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(4) 右図より

$$2\overrightarrow{b}=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$



問1　$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

（k は定数）

(1) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(2) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(3) $k\overrightarrow{a}=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=$

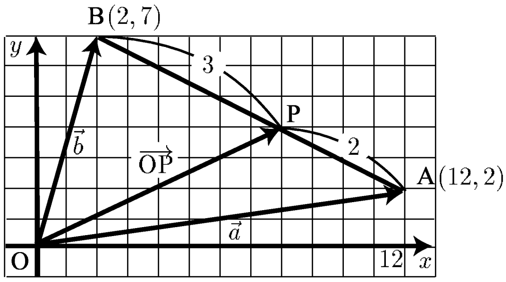
問2　$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}=$　　　　(2) $-\overrightarrow{b}=$

(3) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=$　　　　(4) $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=$

＜内分点＞

例題　平面上の２点 A$(12,2)$, B$(2,7)$ に対し、線分 AB を $2:3$ に内分する点 P の座標を求めよ。



（解）　原点を O とし、

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

とおくと、7 ページの例題より、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

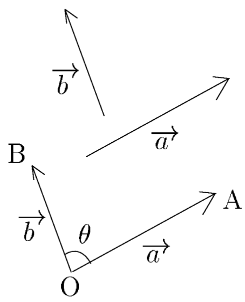
$$=\begin{pmatrix}\frac{36}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{14}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{5}\\\frac{20}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$

よって、P の座標は $(8,4)$ である。

問１　平面上の２点 A(a_1,a_2) , B(b_1,b_2) に対し、線分 AB を $1:2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

問２　平面上の２点 A(a_1,a_2) , B(b_1,b_2) に対し、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標を（7 ページの問１を参考にして）求めよ。

＜ベクトルの内積1＞



$\overrightarrow{0}$ でない2つのベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ に対し, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき, 終点をそれぞれ A,B とするとき, $\angle$ AOB の大きさ θ は, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ によってきまる。この角 θ をベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角という。

　ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角が θ のとき

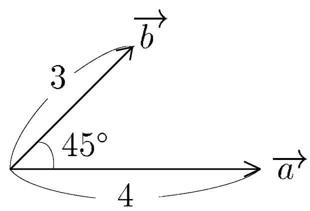
$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

を, ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の**内積**といい, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta} \quad \text{(内積の定義)}$$

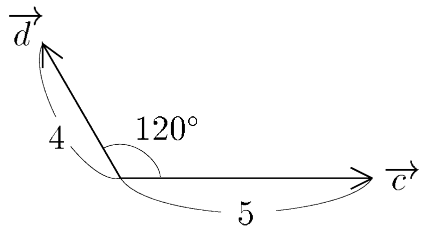
例 (1) $|\overrightarrow{a}| = 4, |\overrightarrow{b}| = 3$ で
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のつくる角が 45° のとき

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 4\times 3\times\cos 45^\circ$$
$$= 4\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$



(2) $|\overrightarrow{c}| = 5, |\overrightarrow{d}| = 4$ で
$\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ のつくる角が 120° のとき

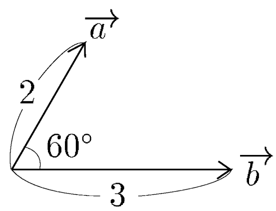
$$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} = 5\times 4\times\cos 120^\circ$$
$$= 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -10$$

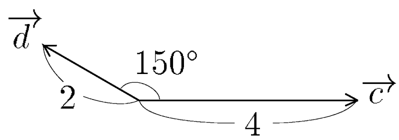


問　$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ が右図の場合に
内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}$ を求めよ。

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} =$





＜ベクトルの内積2＞

内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で、$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ のときは、$\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ だから

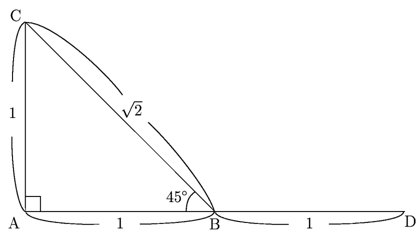
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2 \text{ つまり、} |\overrightarrow{a}|=\sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}}$$

又、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ のなす角が 90° のとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は **垂直** であるといい、$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ と書く。$\cos 90^\circ=0$ であるから、次が成り立つ。

$\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$、$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$ のとき
$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$$

(ベクトルの垂直と内積)

例　右図の直角二等辺三角形において

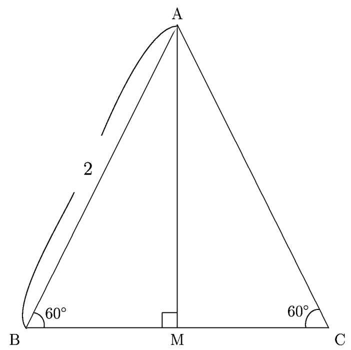


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1\times\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-1$

問　右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

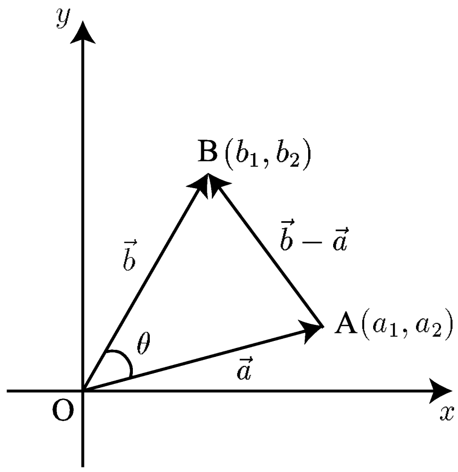
(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}=$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

(5) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=$

＜内積の成分表示1＞



座標平面上の2点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ と原点Oに対し、2点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

問1　$(*)$ 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問2　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問1の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

＜内積の成分表示2＞

前ページの結果より

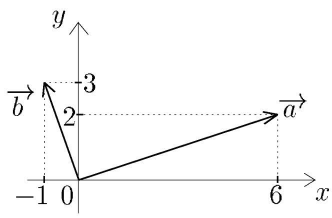
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である。

例 1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき　内積 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 6 \times (-1) + 2 \times 3 = 0$$

であるから, $\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{b}$ は垂直 ($\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$) である。



問 1 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直である場合は $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ と書け。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

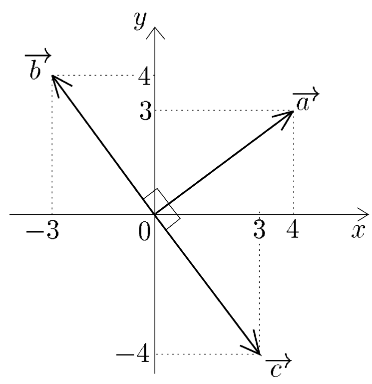
例 2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

のとき

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

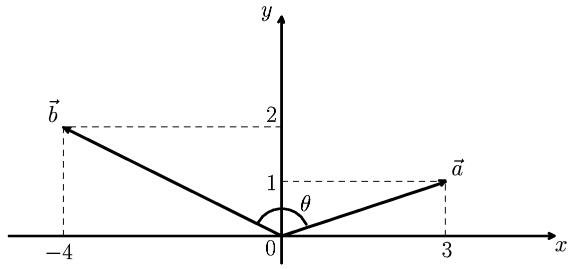
より $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c}$ である。



問 2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直なベクトルの例を 2 つあげよ。

<ベクトルのなす角>

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。



内積の定義から

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \dfrac{3}{4}\pi \ (= 135^\circ)$ である。

問 1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。上の例にならって、$\cos\theta$ の値を a_1,a_2,b_1,b_2 で表せ。

$$\cos\theta =$$

問 2 以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ。

(1) $|\overrightarrow{a}| = 1$ 、$|\overrightarrow{b}| = 2$ 、$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

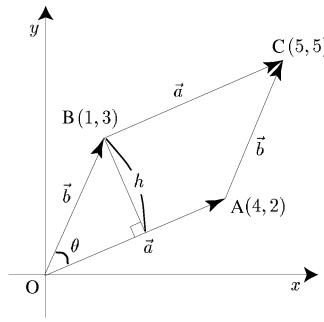
(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

＜平行四辺形の面積1＞

例　平面上の2つのベクトル

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ の始点を

原点Oにもってくると、終点はA$(4,2)$, B$(1,3)$ となる。このとき $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形OACBの面積を求めたい。



$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角を θ、平行四辺形の高さを h とすると

$$\frac{h}{\mathrm{OB}} = \sin\theta \quad \text{より} \quad h = \mathrm{OB} \times \sin\theta$$

だから、面積 S は、$S = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \sin\theta$ である。よって

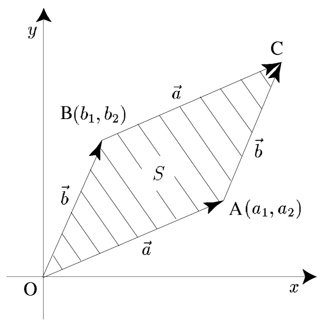
$$\begin{aligned} S^2 &= \mathrm{OA}^2 \times \mathrm{OB}^2 \times \sin^2\theta = |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 \times (1-\cos^2\theta) \\ &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - (|\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta)^2 \\ &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \\ &= (4^2+2^2) \times (1^2+3^2) - (4\times1+2\times3)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

よって　$S = 10$　である。

問　平面上の2つのベクトル

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ に対し、

A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(a_1+b_1, a_2+b_2) をとると、四角形OACBは平行四辺形となる。この平行四辺形の面積 S を求めたい。



(1) S^2 を $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2) S^2 を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

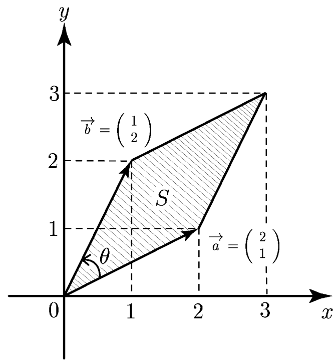
(3) S を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

< 平行四辺形の面積2 >

平面上の2つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は、前ページの結果より $S^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$ だから

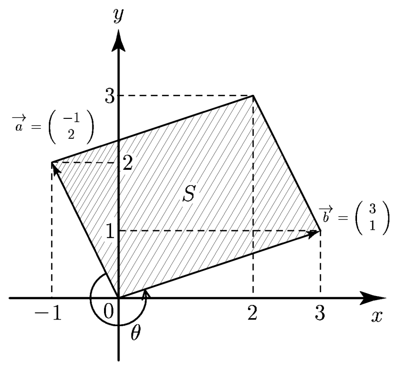
$$\boxed{S = (a_1b_2 - a_2b_1) \text{ の絶対値}}$$

である。



例1 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は

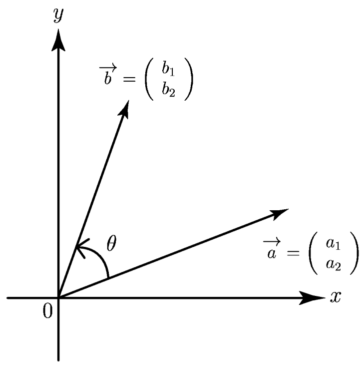
$S = |2 \times 2 - 1 \times 1| = |3| = 3$



例2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は

$S = |(-1) \times 1 - 2 \times 3|$

$\quad = |-7| = 7$



一般に2つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を右図のように ($\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ に向かって反時計回りに) 計ると

$$\boxed{a_1b_2 - a_2b_1 = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \sin\theta}$$

となる。例1の場合は $\sin\theta > 0$ より $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ であるが例2の場合は $\sin\theta < 0$ より $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$ となる。

問 次の2つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S =$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S =$

＜ 2次の行列式 ＞

平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して、$a_1b_2 - a_2b_1$ の値を $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の作る**行列式**といい、

$$\boxed{a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

という記号で表す。

例 1 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 3 \times 1 = 5$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) - 7 \times 2 = -19$

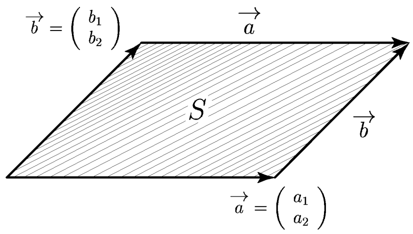
問 1 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の作る平行四辺形の面積 S は

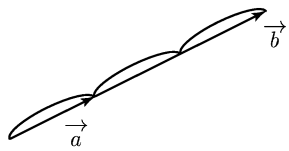
$$\boxed{S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{の絶対値}}$$

である。



例 2 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 6 = 0$



より 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形の面積は 0(ゼロ) になる。

これは $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a}$ より $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の作る平行四辺形は線分になるからである。

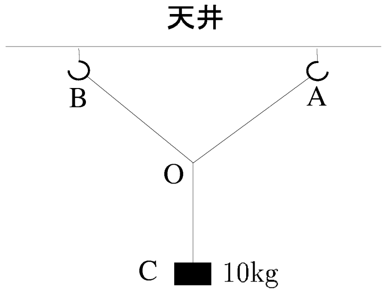
一般に $\overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}$ の実数倍 $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$ (k は実数) になっているとき、$\overrightarrow{b} /\!/ \overrightarrow{a}$ と書き、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**平行**であるという。

問 2 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行であるかどちらか判定せよ。
もし平行であれば $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{a}$ の形に書け。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ (2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

＜ベクトルの均衡＞

例　天井の2ヶ所A,Bからひもをつけて、点Oで結び、Oから別のひもをのばして、おもりCをつける。Cが10kgのとき、支点A,Bにどのくらいの力がかかるだろうか？



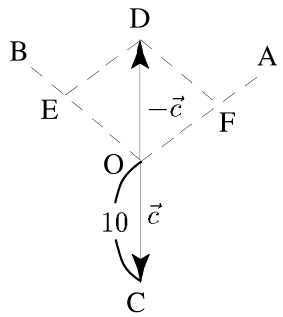
このような問題では、平面に図を書き、おもりの力をベクトル$\vec{c}$(長さを10にする)で表す。OAとOBの方向を点線で書き、$\vec{c}$の逆ベクトル$-\vec{c}$をOを始点に書く。$-\vec{c}$の終点をDとする。Dに対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}//\overrightarrow{\mathrm{ED}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}//\overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

となるように点E,Fをとると、OFの長さが支点Aにかかる力(kg)で、OEの長さが支点Bにかかる力(kg)になっている。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\overrightarrow{c}$$

となる。



問　右図のように3点A$(2,2)$, B$(-1,2)$, C$(0,-1.5)$がある(1目もり0.25)。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$とするとき

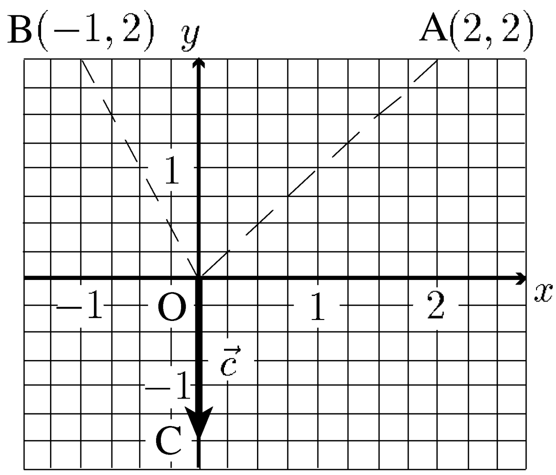
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\overrightarrow{c}$となるような点Dの座標を求めよ。

(2)　OA上に点Fをとり、OB上に点Eをとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

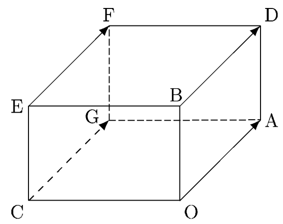
となるように、右図にEとFを作図せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となるような定数$k_1$と$k_2$を求めよ。



＜空間のベクトル1＞

速度や力などのように、方向と大きさをもつベクトルは、平面上だけでなく空間においても同様に扱える。



例 1 右図の直方体の頂点を始点、終点とするベクトルのうちで、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しいものは

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

である。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ である。

問 1 例 1 で、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に等しいものと $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に等しいものを全て書け。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ 　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$

空間のベクトルについても、和・差、実数倍は平面のベクトルと同様である。

例 2 例 1 の直方体で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

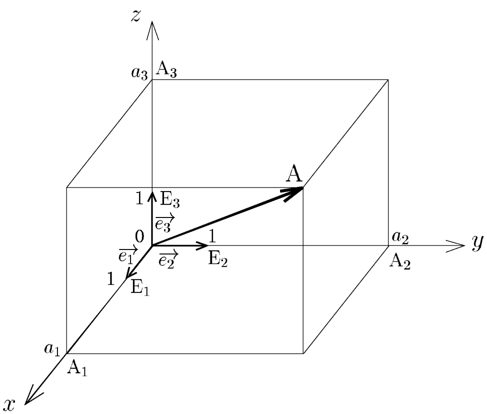
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

問 2 例 1 の直方体で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とするとき、次のベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$ 　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=$ 　　　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=$ 　　　　(5) $\overrightarrow{\mathrm{FB}}=$ 　　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=$

＜空間のベクトル2＞



O を原点とする空間における座標軸上の
3 点 $\mathrm{E}_1(1, 0, 0)$, $\mathrm{E}_2(0, 1, 0)$, $\mathrm{E}_3(0, 0, 1)$
に対し、

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_1}\,,\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_2}\,,\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{OE}_3}$$

を**基本ベクトル**という。

空間における任意のベクトル $\overrightarrow{a}$ の始点を
原点にもっていき、$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき、
$\mathrm{A}_1(a_1, 0, 0)$, $\mathrm{A}_2(0, a_2, 0)$, $\mathrm{A}_3(0, 0, a_3)$ とおくと、

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$$

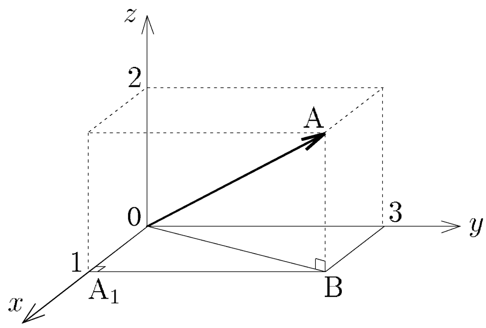
となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = a_1\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = a_2\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = a_3\overrightarrow{e_3}$ より

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

と表される。この a_1, a_2, a_3 を $\overrightarrow{a}$ の**成分**といい、$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と表す。

とくに $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

問 1 上図で、$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$ を成分で表せ。



例 $\mathrm{A}(1, 3, 2)$ に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
である。ここで、$\mathrm{A}_1(1,0,0)$, $\mathrm{B}(1,3,0)$
とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{OA}^2 &= \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AB}^2 \\ &= \left(\mathrm{OA_1}^2 + \mathrm{A_1B}^2\right) + \mathrm{AB}^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14 \end{aligned}$$

より、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{14}$ である。

問 2 $\overrightarrow{a}$ の成分が以下の場合に、ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ を求めよ。

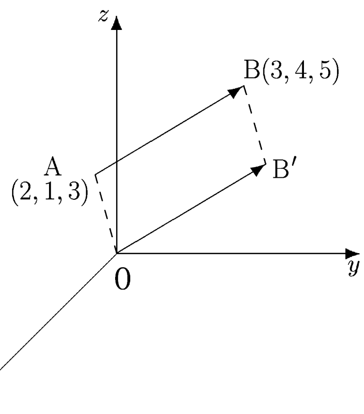
(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{a}| =$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{a}| =$

＜空間のベクトル３＞



例 空間座標上の２点 A(2,1,3)、B(3,4,5) に対し、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めたい。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動し、始点を原点 O にもっていくとすると、点 A が原点 O に移動するから

x 軸方向に -2
y 軸方向に -1
z 軸方向に -3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B′ に (同じ様に) 平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となったとすると、B′ の座標は

$$\mathrm{B'}(3-2\,,\,4-1\,,\,5-3) = (1,3,2)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

（別解）次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 空間の２点 A、B の座標が以下の場合に、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

(1) A(3, 2, 4)、B(2, 1, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(2) A(a_1, a_2, a_3)、B(b_1, b_2, b_3)

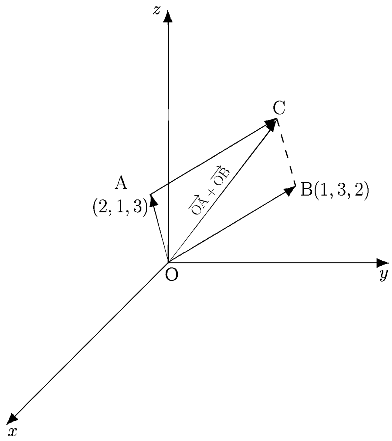
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

＜空間のベクトル４＞

例　空間の２点 A(2,1,3)、B(1,3,2) と原点 O に対し、ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の成分を求めたい。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を平行移動し、始点が A になるようすると、O が A に移動するから、



x 軸方向に +2
y 軸方向に +1
z 軸方向に +3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同じ様に平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となったとすると、C の座標は

$$\mathrm{C}(1+2, 3+1, 2+3)=(3,4,5)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

（別解）次の様に計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1+3\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

問　２点 A、B の座標が次の様な場合に、以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) A(3,2,4)、B(2,1,3)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

(2) A(a_1,a_2,a_3)、B(b_1,b_2,b_3)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

＜空間のベクトル５＞

問１ $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき前ページの結果から類推して、次のベクトルの成分を求めよ。（ただし、k は実数）

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} =$　　　(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$　　　(3) $k\overrightarrow{a} =$

例　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ の成分は

$$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+0 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

22 ページの結果より、このベクトルの大きさは

$$\left|3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

問２　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} =$　　　(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$

$\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| =$　　　$\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| =$

(3) $3\overrightarrow{a} =$　　　(4) $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} =$

$\left|3\overrightarrow{a}\right| =$　　　$\left|\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}\right| =$

< 空間座標と距離 >

例1 空間上の 2 点 A$(1,2,3)$, B $(8,7,9)$ 間の距離 AB を求めたい。AB はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさであるから、原点を O とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{7^2+5^2+6^2} = \sqrt{110}$$

問1 2 点 A,B の座標が以下の場合に、2 点間の距離 AB を求めよ。

(1)A$(3,-2,-1)$, B$(1,2,-1)$ 　　, (2)A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3)

AB= 　　　　　　　　AB=

例2 点 A(x_0,y_0,z_0) を中心とし、半径 r の球面上に点 P(x,y,z) があるとすると、AP= r より

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$$

が成り立つ。両辺を 2 乗した式

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2} \quad \text{(球面の方程式)}$$

を中心 (x_0,y_0,z_0), 半径 r の球面の方程式という。$z=$ の形にした式をそれぞれ上半球面、下半球面の方程式という。

$$z = z_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \qquad \text{(上半球面)}$$
$$z = z_0 - \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \qquad \text{(下半球面)}$$

問2 以下の球面の方程式が表す球の中心と半径を書け。

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

中心 (　, 　, 　) , 半径 =

(2) $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=3$

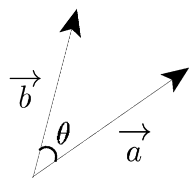
中心 (　, 　, 　) , 半径 =

(3) $x^2+y^2+z^2=16$

中心 (　, 　, 　) , 半径 =

＜ベクトルの内積１＞

平面上のベクトルと同じように、空間の $\overrightarrow{0}$ でない2つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ を定めることができる。($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$)



そして、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を

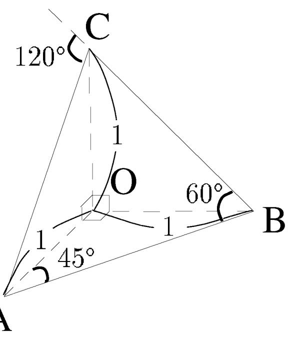
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \cos\theta$$

と定める。（どちらか一方が $\vec{0}$ のときは、内積は0とする。）

例　右図のような立体OABCを考える。
ここで OA=OB=OC= 1,

OA⊥OB, OB⊥OC, OC⊥OA

とする。このとき

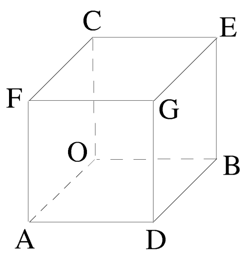


$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| \times \cos 120^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問　右の図は、1辺の長さが1の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} =$　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}} =$　　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} =$

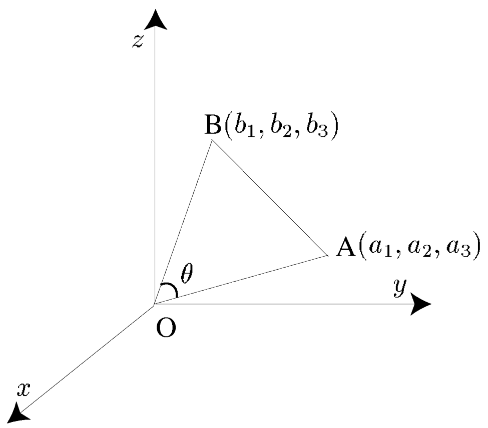
(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} =$　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}} =$

＜ベクトルの内積２＞

空間の２点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ と原点 O に対し、$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より、

$$(*)\ \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\}$$

となる。



問１　OA,OB,AB の長さの２乗を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ で表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　　　$, \mathrm{OB}^2 =$

$\mathrm{AB}^2 =$

問２　$(*)$ 式の右辺を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問３　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

問２の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

＜ベクトルの内積3＞

2つのベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積は、前ページの結果より

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3} \quad \text{（内積の成分表示）}$$

となる。

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のつくる角を θ とすれば、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ だから、$\theta = 120^\circ$ となる。

問 以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

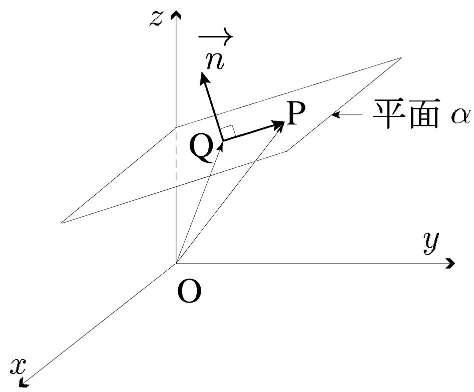
(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜平面の方程式 1＞

例 空間の点 $\mathrm{Q}(3,4,5)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ に垂直な平面を α とする。平面 α 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対し、$\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は直交するから $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ との内積は $\cos 90^\circ = 0$ より



$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$$

となる。一方、

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix} = -4 \times (x-3) + (-3) \times (y-4) + 12 \times (z-5) = 0$$

これを整理すると、

$$-4x - 3y + 12z - 36 = 0 \qquad \text{（平面の方程式）}$$

となる。これが平面 α を表す方程式である。このとき $\overrightarrow{n}$ を平面 α の**法線ベクトル**という。

問 ベクトル $\overrightarrow{n}$ と点 Q が以下の場合に、点 Q を通って $\overrightarrow{n}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Q}(1,-5,3)$

(2) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathrm{Q}(q_1,q_2,q_3)$

＜平面の方程式2＞

点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は

$$a(x-q_1)+b(y-q_2)+c(z-q_3)=0$$

となる。

例1 $2x+4y+3z=0$ は原点 $(0,0,0)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例2 $3x+5y+2z=8$ を変形すると

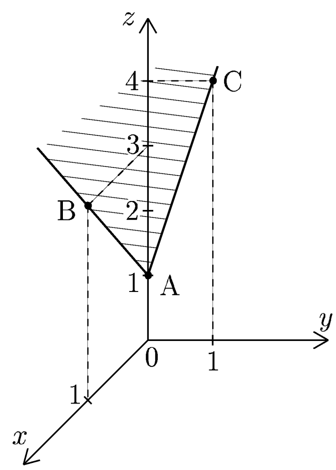
$$3x+5y+2(z-4)=0$$

となるから、点 $(0,0,4)$ を通り、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例3 $z=2x+3y+1$ を変形すると

$$2x+3y-(z-1)=0$$

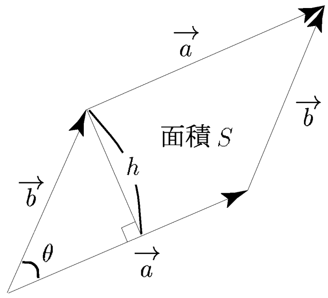
となるから、点 $(0,0,1)$ をとおり、$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。この平面は点 $\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{B}(1,0,3)$, $\mathrm{C}(0,1,4)$ を通る右図のような平面である。



問 次の方程式はどんな平面を表すか。

(1) $x-y+2z=0$　　(2) $3x+2y-z=5$　　(3) $z=\dfrac{23-5x-7y}{11}$

＜空間の平行四辺形 1＞



例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対し、

右図のように、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ がつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角を θ、平行四辺形の高さを h とすれば、

$$S = |\overrightarrow{a}| \times h \ , \ h = |\overrightarrow{b}| \times \sin\theta$$

より

$$\begin{aligned} S^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 \times \sin^2\theta = |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 \times (1 - \cos^2\theta) \\ &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 \times \cos^2\theta = |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \\ &= (1^2 + 6^2 + 3^2) \times \left((-2)^2 + 4^2 + 5^2\right) - \left(1 \times (-2) + 6 \times 4 + 3 \times 5\right)^2 \\ &= 701 \end{aligned}$$

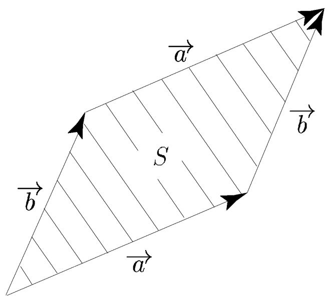
よって $S = \sqrt{701}$ となる。

問 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜空間の平行四辺形２＞



一般のベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

に対して、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。
前ページと同様に考えると、

$$\begin{aligned} S^2 &= |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 \\ &= \left\{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right\} \times \left\{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2\right\} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_1)^2(b_1)^2 + (a_1)^2(b_2)^2 + (a_1)^2(b_3)^2 + (a_2)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 \\ &\quad +(a_2)^2(b_3)^2 + (a_3)^2(b_1)^2 + (a_3)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 \\ &\quad -\left\{(a_1)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_1b_1a_3b_3\right\} \\ &= \left\{(a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2\right\} + \left\{(a_2b_3)^2 - 2(a_2b_3)(a_3b_2) + (a_3b_2)^2\right\} \\ &\quad +\left\{(a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1)(a_1b_3) + (a_1b_3)^2\right\} \end{aligned}$$

となる。

問１ S^2 を$\{\quad\}^2 + \{\quad\}^2 + \{\quad\}^2$ の形にせよ。

$S^2 =$

問２ 行列式の記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ を用いて、S^2 を表せ。

$S^2 =$

問３ S を行列式の記号を用いて表せ。

$S =$

＜外積１＞

空間のベクトル $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \qquad (\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ の外積})$$

を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の**外積**という。外積の大きさは

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^2}$$

であるから、前ページの結果より、$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の

つくる平行四辺形の面積 S に等しい。

（注）　今後、２つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の間に積の記号 $\times$ がある

場合は必ず外積を意味し、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ と区別する。

例　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、外積は

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \\ 6 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり、内積は $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ である。

問　$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合に、外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$　　　(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜外積２＞

例１ $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、前ページの例より

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ であった。このとき

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 1 + 6 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ は直交している $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a}$。又

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 6 \times 5 + (-3) \times 6 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}$ も直交している $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$。

問１ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合に、$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a}$ と $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。

(1) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

例２ $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

より $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ は直交している。

問２ 例２の場合に、$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。

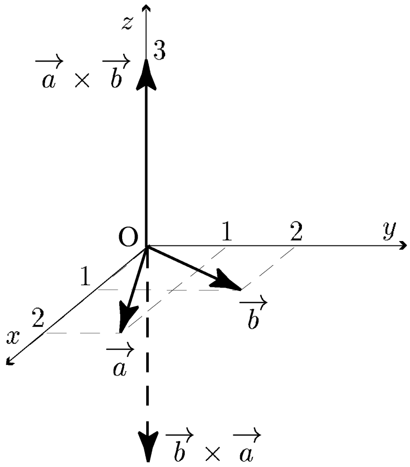
＜外積3＞

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ との外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ $\left(\text{および}\ \overrightarrow{b}\right)$ と直行していて、その大きさは $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しい。

例１ $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ のとき、

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

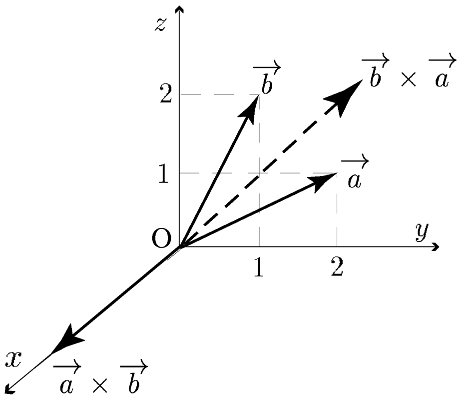
より $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ となる。



例２ $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき、

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

より $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ となる。

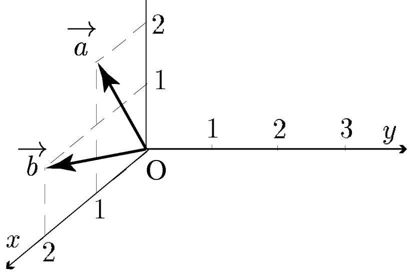


問 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき、

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ の成分を求め、
右にを $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 作図せよ。

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$

$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=$

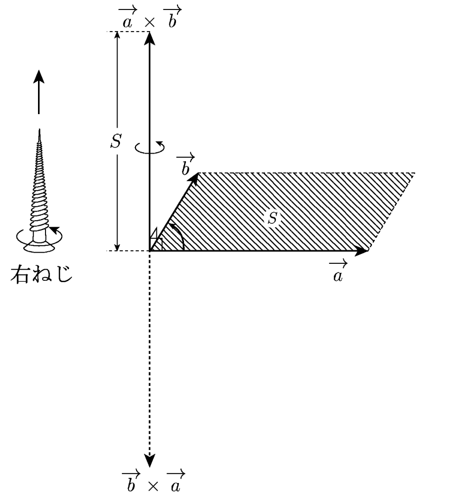


＜外積４＞

２つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ に垂直なベクトルであり、大きさは $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S に等しい。又 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ の向きは $\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ に、向かって回転するときに、右ねじの進む方向である。従って $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ はその反対向きであり

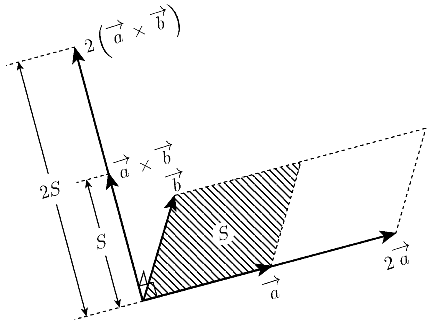
$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a} = -\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$$

が成り立つ。



例１ $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ のとき

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\3&4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&4\\1&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}$$ である。



次に $(2\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$ を計算したい。右図から明らかに

$$(2\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}=2(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=2\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-14\\4\end{pmatrix}$$

である。

例２ $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ のとき $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}$

問 $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ のとき、次の外積の成分を求めよ。

(ただし k は定数とする。)

(1) $(3\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$　, (2) $(-\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$　, (3) $(k\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$　, (4) $\overrightarrow{a}\times(k\overrightarrow{a})$

＜外積の計算１＞

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積の定義

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

より

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(k\overrightarrow{a}\right) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(k\overrightarrow{b}\right) = k\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \qquad (k \text{ は定数}) \\ \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = -\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \quad , \quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \end{array}}$$

等の性質が分かる。

例　$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ に対し、

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ -11 \\ \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ \\ 8 \\ \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \\ -3 \\ \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ \\ 0 \\ \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ \\ 6 \\ \\ 7 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 6 \\ \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \\ -3 \\ \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ がわかる。

問　上の例で $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)$ を計算せよ。

＜外積の計算２＞

前ページの結果より、外積に関する計算法則

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}&=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\\ \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}&=\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})\end{aligned}}$$

が分かる。

例　$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$,　$(k\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$

等の性質も使うと、次のような計算もできる。

$$2(\vec{b}\times\vec{a})+3(\vec{a}\times\vec{c})=-2(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=\vec{a}\times(-2\vec{b})+\vec{a}\times(3\vec{c})=\vec{a}\times(-2\vec{b}+3\vec{c})$$

たとえば

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ の場合は

$$2(\vec{b}\times\vec{a})+3(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=\vec{a}\times(-2\vec{b}+3\vec{c})=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\left\{-2\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6+3\\-8-6\\-10-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-14\\-19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&-14\\0&-19\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&-19\\1&-3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&-3\\-1&-14\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\19\\-17\end{pmatrix}$$

問　上の例の $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ に対し、

$$-(\vec{a}\times\vec{c})-2\vec{c}\times\vec{b}$$

を計算せよ。

＜ 直交系 ＞

空間の $\overrightarrow{0}$ でない 3 個のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が互いに垂直 $(\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a})$ であるとき $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ を **直交系** という。

例 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times (-2) = 0$$

より $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ である。この $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ をもとにして、直交系を作るには

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおけばよい。外積の性質から $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$ となるからである。実際

$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = (-3) \times 2 + 5 \times 0 + 6 \times 1 = 0$$
$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = (-3) \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times (-2) = 0$$

よりわかる。

問 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し、次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。

(2) $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$ となる $\overrightarrow{c}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}$ を計算せよ。