< 1ページ. 微分方程式 >

解答 (1) 1階微分方程式

(2) 2階微分方程式

(3) 3階微分方程式

＜ 2ページ. 微分方程式の解1 ＞

解答 (1) $C = 4$

$y = 4e^{2x}$

(2) $C = 0$

$y = 0$

＜ 3 ページ. 微分方程式の解 2 ＞

解答 (1) $y = \int (4x+3)dx = 2x^2 + 3x + C$

(C は任意定数)

(2) $y' = \int 6x dx = 3x^2 + C_1$

$$y = \int (3x^2 + C_1)dx = x^3 + C_1 x + C_2$$

(C_1, C_2 は任意定数)

＜ 4ページ. 微分方程式の解 2 ＞

解答 (1) $y = 2x^2 + 3x + C$

$x = 0$ のとき $y = C = 5$

$\underline{y = 2x^2 + 3x + 5}$

(2) $y' = 3x^2 + C_1 = 3x^2 + 8$

$y = x^3 + C_1 x + C_2 = x^3 + 8x + 7$

$\underline{y = x^3 + 8x + 7}$

＜ 5 ページ. 微積分の記号計算 ＞

解答 (1) $\displaystyle\int e^y \frac{dy}{dx} dx$

$$= \int e^y dy = e^y + C$$

(2) $$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y} + C$$

(3) $$\int \sin(y)\frac{dy}{dx}dx = \int \sin y dy = -\cos y + C$$

$<$ 6ページ. 求積法 $>$

解答 (1) $y = ax^3 + C$

(2) $y = \log|x| + C$

＜ 7ページ. 変数分離系１ ＞

解答　(1) $y = Ce^{4x}$

(2) $y = Ce^{-2x}$

(3) $y = Ce^{ax}$

＜ 8ページ. 変数分離系 2 ＞

解答　(1) $y = Ce^{x^2+x}$

(2) $y = Ce^{x^3}$

＜ 9ページ.1階線形微分方程式1 ＞

解答　問1 (1) $y = Ce^{-3x}$

(2) $y = Ce^{4x}$

(3) $y = Ce^{-2x^3}$

問2　$y = Ce^{-\int p(x)dx}$

＜ 10 ページ.1 階線形微分方程式 2 ＞

解答 (1) $y = \dfrac{8}{5} + Ce^{-5x}$

(2) $y = \dfrac{b}{a} + Ce^{-ax}$

＜ 11 ページ.1 階線形微分方程式 3 ＞

解答 (1) $y = C(x)e^{-2x}$

$$y' + 2y = C'(x)e^{-2x} = e^{3x}$$

$$C'(x) = e^{5x}$$

$$C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$y = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}$$

(2) $y = C(x)e^{2x}$

$$C'(x)e^{2x} = e^{3x}$$

$$C(x) = e^{x} + C$$

$$y = (e^{x} + C)e^{2x}$$

$$= e^{3x} + Ce^{2x}$$

(3) $y = C(x)e^{2x}$

$$C'(x)e^{2x} = e^{2x}$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C$$

$$y = (x + C)e^{2x}$$

$$= xe^{2x} + Ce^{2x}$$

＜ 12 ページ.1 階線形微分方程式 4 ＞

解答　問 1 (1) $y' = C(x)e^{ax}$

$$C'(x)e^{ax} = e^{bx}$$

$$C'(x) = e^{(b-a)x}$$

$$C(x) = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)x}$$

$$y = \left(\frac{1}{b-a}e^{(b-a)x} + C\right)e^{ax}$$

$$= \frac{1}{b-a}e^{bx} + Ce^{ax}$$

(2) $y = xe^{ax} + Ce^{ax}$

問 2　$y = \left\{\int q(x)e^{ax}dx + C\right\}e^{-ax}$

＜ 13ページ.1階線形微分方程式5 ＞

解答　(1) $$y = \left\{ \int K\cos(bx)e^{ax}dx + C \right\} e^{-ax}$$
$$= \left(\frac{Ke^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx) + b\sin(bx)\} + C \right) e^{-ax}$$
$$= \frac{K}{a^2+b^2}\{a\cos(bx) + b\sin(bx)\} + Ce^{-ax}$$

(2) $$y = \left\{ \int K\sin(bx)e^{ax}dx + C \right\} e^{-ax}$$
$$= \left\{ \frac{Ke^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos(bx) + a\sin(bx)) + C \right\} e^{-ax}$$
$$= \frac{K}{a^2+b^2}\{-b\cos(bx) + a\sin(bx)\} + Ce^{-ax}$$

$<$ 14ページ. 複素係数微分方程式 $>$

解答 (1) $Z(x) = Ce^{(1+2i)x}$

(2) $Z(x) = Ce^{(3-4i)x}$

(3) $Z(x) = Ce^{-2ix}$

(4) $Z(x) = Ce^{-(3+5i)x}$

＜ 15 ページ.1 階微分方程式の初期値問題 ＞

解答 (1) $y = 5e^{2x^2}$

(2) $y = \dfrac{3}{2} + Ce^{-2x}$

$$\frac{3}{2} + C = 1 \ \Rightarrow \ C = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

(3) $y = \left\{ \displaystyle\int e^{3x} dx + C \right\} e^{-3x}$

$$= \left(\frac{1}{6}e^{6x} + C \right) e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{6}e^{3x} + Ce^{-3x}$$

$$\frac{1}{6} + C = 4 \ \Rightarrow \ C = \frac{23}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{23}{6}e^{-3x}$$

(4) $y = \dfrac{4}{(-2)^2 + 3^2} \{-3\cos(3x) - 2\sin(3x)\} + Ce^{2x}$

$$= -\frac{4}{13}\big(3\cos(3x) + 2\sin(3x)\big) + Ce^{2x}$$

$$1 = -\frac{4}{13} \times 3 + C \ \Rightarrow \ C = \frac{25}{13}$$

$$y = -\frac{4}{13}\big(3\cos(3x) + 2\sin(3x)\big) + \frac{25}{13}e^{2x}$$

＜ 16 ページ.2 階線形微分方程式１ ＞

解答　(1) $y = 4x^2 + C_1 x + C_2$

$y' = 8x + C_1$

$C_1 = 5$ ， $C_2 = 2$

$y = 4x^2 + 5x + 2$

(2) $y' = 3x^2 + 2x + C_1$

$y = x^3 + x^2 + C_1 x + C_2$

$C_1 = 7$ ， $C_2 = 5$

$y = x^3 + x^2 + 7x + 5$

＜ 17ページ.2 階線形微分方程式 2 ＞

解答　① $y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$

$y' = -3C_1\sin(3x) + 3C_2\cos(3x)$

$x = 0$のとき$y = 6 = C_1$

$$y' = 8 = 3C_2 \ \Rightarrow\ C_2 = \frac{8}{3}$$

$$y = 6\cos(3x) + \frac{8}{3}\sin(3x)$$

② $x = 0$のとき$y = \alpha = C_1$

$$y' = \beta = 3C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\beta}{3}$$

$$y = \alpha\cos(3x) + \frac{\beta}{3}\sin(3x)$$

$<$ 18ページ.2階線形同次微分方程式1 $>$

解答　$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$

< 19ページ.2階線形同次微分方程式2 >

解答　$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

$<$ 20ページ. 微分演算子 D $>$

解答　問1 (1) $(D+5)y=0$

(2) $(D^2-10D+25)y=0$

問2 (1) $y=Ce^{2x}$

(2) $y=Ce^{ax}$

(3) $y=xe^{2x}+Ce^{2x}$

(4) $y=xe^{ax}+Ce^{ax}$

＜ 21 ページ. 定数係数 2 階同次微分方程式 1 ＞

解答　問 1 (1) $y''-5y'+6y = 4e^{2x} - 5 \times 2e^{2x} + 6 \times e^{2x}$

$$= (4 - 10 + 6)e^{2x}$$

$$= 0$$

(2) $y''-5y'+6y = 9e^{3x} - 5 \times 3e^{3x} + 6e^{3x}$

$$= (9 - 15 + 6)e^{3x}$$

$$= 0$$

問 2 (1) $(D^2 - 2D - 3)y = 0$

$(D-3)(D+1)y = 0$

$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$

(2) $(D^2 + D - 6)y = 0$

$(D-2)(D+3)y = 0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$

＜ 22 ページ. 定数係数 2 階同次微分方程式 2 ＞

解答 (1) $(D^2 - 8D + 16)y = 0$

$(D-4)^2 y = 0$

$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

(2) $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

(3) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

(4) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

$<$ 23 ページ. 定数係数 2 階同次微分方程式 3 $>$

解答　(1) $y = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$

(2) $y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

$<$ 24 ページ. 定数係数 2 階同次微分方程式 4 $>$

解答 (1) $D^2 + 4D + 13$

$= (D+2)^2 + 9 = 0$

$D = -2 \pm 3i$

$y = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-2x} \sin(3x)$

(2) $D^2 - 2D + 6$

$= (D-1)^2 + 5 = 0$

$D = 1 \pm \sqrt{5} i$

$y = C_1 e^{x} \cos\left(\sqrt{5}x\right) + C_2 e^{x} \sin\left(\sqrt{5}x\right)$

＜ 25 ページ. 定数係数 2 階同次微分方程式 5 ＞

解答 (1) $(D^2 - 4D - 5)y = 0$

$(D-5)(D+1)y = 0$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$

(2) $(D^2 + 8D + 16)y = 0$

$y = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$

(3) $y = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x)$

(4) $y = C_1 e^{3x} \cos(\sqrt{5}x) + C_2 e^{3x} \sin(\sqrt{5}x)$

＜ 26ページ. 定数係数２階非同次微分方程式１ ＞

解答 (1) $(D^2 + D - 2)y = 5$

$(D+2)(D-1)y = 5$

$y = -\dfrac{5}{2} + C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

(2) $D^2 - 3D - 4 = (D-4)(D+1)$

$y = -\dfrac{7}{4} + C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

＜ 27 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 2 ＞

解答　(1) $y = \dfrac{9}{16} + C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)$

(2) $y = 2 + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

(3) $y = \dfrac{4}{3} + C_1 e^{x} \cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^{x} \sin(\sqrt{2}x)$

＜ 28 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 3 ＞

解答 (1) $y_1 = Ax + B$

$y_1'' + 5y' + 4y' = 5A + 4Ax + 4B = x$

$4A = 1\ ,\ 5A + 4B = 0 \qquad \Rightarrow B = -\dfrac{5}{4}A$

$A = \dfrac{1}{4}\ ,\ B = -\dfrac{5}{16}$

$y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{16} + C_1e^{-4x} + C_2e^{-x}$

(2) $y_1 = Ax + B$

$y_1'' - 3y_1' + 4y_1 = -3A - 4Ax - 4B = 5x$

$-4A = 5\ ,\ -3A - 4B = 0 \qquad \Rightarrow B = -\dfrac{3}{4}A$

$A = -\dfrac{5}{4}\ ,\ B = -\dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{15}{16}$

$D^2 - 3D - 4 = (D-4)(D+1)$

$y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{15}{16} + C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$

＜ 30ページ. 定数係数２階非同次微分方程式５ ＞

解答　問１ $y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = \frac{16}{30}e^{4x} + \frac{3 \times 4}{30}e^{4x} + \frac{2}{30}e^{4x}$

$$= \frac{16 + 12 + 2}{30}e^{4x}$$

$$= e^{4x}$$

問２ (1) $\varphi_1 = e^{-x} \quad , \quad \varphi_2 = e^{-3x}$

$$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = e^{-x}(-3e^{-3x}) - (-e^{-x})e^{-3x}$$

$$W = -3e^{-4x} + e^{-4x} = -2e^{-4x}$$

$$u_1' = -\frac{\varphi_2 q}{W} = -\frac{e^{-3x}e^{5x}}{-2e^{-4x}} = \frac{1}{2}e^{6x} \qquad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{12}e^{6x}$$

$$u_2' = \frac{\varphi_1 q}{W} = \frac{e^{-x}e^{5x}}{-2e^{-4x}} = -\frac{1}{2}e^{8x} \qquad \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{16}e^{8x}$$

$$y_1 = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 = \frac{1}{16}e^{6x}e^{-x} - \frac{1}{16}e^{8x}e^{-3x}$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right)e^{5x} = \frac{1}{48}e^{5x}$$

$$y = \frac{1}{48}e^{5x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$$

(2) $y = -e^{-3x} + C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$

＜ 31 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 6 ＞

解答　(1) $y = \dfrac{1}{25}e^{7x} + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{3x} + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

$<$ 32 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 7 $>$

解答 $y = -\dfrac{5}{6}x\cos(3x) + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$

＜ 33 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 8 ＞

解答　問 1 $W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = e^{\alpha x}\beta e^{\beta x} - \alpha e^{\alpha x}e^{\beta x} = (\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)x}$

問 2 $u_1'(x) = -\dfrac{\varphi_2 q}{W} = -\dfrac{\kappa}{(\beta-\alpha)}e^{(\lambda-\alpha)x}$,

$$u_2'(x) = \frac{\varphi_1 q}{W} = \frac{\kappa}{(\beta-\alpha)}e^{(\lambda-\beta)x}$$

$$u_1(x) = -\frac{\kappa}{(\beta-\alpha)(\lambda-\alpha)}e^{(\lambda-\alpha)x} ,$$

$$u_2(x) = \frac{\kappa}{(\beta-\alpha)(\lambda-\beta)}e^{(\lambda-\beta)x}$$

問 3 $y_1(x) = \dfrac{\kappa}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}e^{\lambda x}$

問 4 $y = \dfrac{\kappa}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}e^{\lambda x} + C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$

＜ 34 ページ. 定数係数 2 階非同次微分方程式 9 ＞

解答　(1) $\alpha = 2i \quad , \quad \beta = -2i$

$$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = \lambda^2 + 4$$

$$y = \frac{\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2 + 4} + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

(2) $$y = \frac{\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2} + C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$$

＜35ページ. 定数係数2階非同次微分方程式10＞

解答 $3\sin(5x) = \dfrac{3}{2i}\left(e^{5xi} - e^{-5xi}\right)$

$$y_1'' + \omega^2 y_1 = \frac{3}{2i}e^{5ix} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = \frac{\frac{3}{2i}e^{5ix}}{(5i)^2 + \omega^2} = \frac{3e^{5ix}}{2i(\omega^2 - 25)}$$

$$y_2'' + \omega^2 y_2 = -\frac{3}{2i}e^{-5ix} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = \frac{-\frac{3}{2i}e^{-5ix}}{(-5i)^2 + \omega^2} = -\frac{3e^{-5ix}}{2i(\omega^2 - 25)}$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{3}{\omega^2 - 25} \times \frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} = \frac{3}{\omega^2 - 25}\sin(5x)$$

$$y = \frac{3}{\omega^2 - 25}\sin(5x) + C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)$$

＜ 36 ページ. 微分方程式の応用１ ＞

解答 (1) $y(t) = 3e^{2t}$

(2) $y(t) = -2t^2 + C_1 + C_2$

$y' = -4t + C_1$

$y = -2t^2 + 6t + 5$

(3) $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$

$y' = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$

$y(0) = C_1 = 5 \quad , \quad y'(0) = 2C_2 = 12$

$y = 5\cos(2t) + 6\sin(2t)$

(4) $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \quad , \quad y(0) = C_1 + C_2 = 8 \quad \cdots$ ①

$y' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} \quad , \quad y'(0) = C_1 + 2C_2 = 13 \quad \cdots$ ②

② − ①より　$C_2 = 5 \quad , \quad C_1 = 3$

$y = 3e^t + 5e^{2t}$

＜ 37ページ. 微分方程式の応用 2 ＞

解答 $\dfrac{dv}{dt}+kv=g$ の一般解は $v=\dfrac{g}{k}+Ce^{-kt}$

$t=0$ のとき $v=\dfrac{g}{k}+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-\dfrac{g}{k}$

$\therefore\ v=\dfrac{g}{k}-\dfrac{g}{k}e^{-kt}=\dfrac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$

$<$ 38ページ. 微分方程式の応用3 $>$

解答　$x(t) = e^{-at} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$

＜ 39 ページ. 微分方程式の応用 4 ＞

解答 (1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\dfrac{k}{2}e^{\beta ti} \quad \Rightarrow \quad x_1=\dfrac{\frac{k}{2}e^{\beta ti}}{(\beta i)^2+\omega^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\frac{k}{2}e^{-\beta ti} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{\frac{k}{2}e^{-\beta ti}}{(-\beta i)^2+\omega^2}$$

$$x_*=\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)$$

$$x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)$$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=k\sin(\beta t)=\dfrac{k}{2i}\left(e^{\beta ti}-e^{-\beta ti}\right)$

$$x_*=\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\left(\frac{e^{\beta ti}-e^{-\beta ti}}{2i}\right)=\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$$

$$x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)+\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$$

$<$ 40 ページ. 微分方程式の応用 5 $>$

解答 $x(t) = \dfrac{kt}{2\omega}\sin(\omega t) + C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$