高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

9

内容

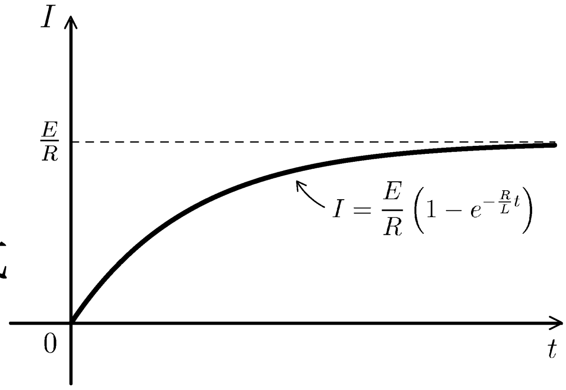
◎ 微分方程式と解

◎ 変数分離形

◎ 1階線形微分方程式

◎ 定数係数2階微分方程式

◎ 微分方程式の応用



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< 微分方程式 >

微分方程式 $(differentinal\ equation)$ とは、独立変数とその未知関数、未知関数の導関数を含む方程式のことである。たとえば変数 x の関数 y に関する微分方程式の例として

$$(1) \qquad y' = 2x$$

$$(2) \qquad y' = 2xy$$

$$(3) \qquad y' + 3y = e^{4x}$$

等がある。これらは全て 1 階導関数 y' を含む微分方程式なので
1 階微分方程式という。これに対し、2 階導関数を含む微分方程式の例として

$$(4) \qquad y'' = -10$$

$$(5) \qquad y'' = -y$$

$$(6) \qquad y'' - y' - y = 0$$

$$(7) \qquad y'' - y' - 6y = 3x$$

等がある。(4)〜(7) の例のように 2 階導関数 y'' を含み、3 階以上の導関数を含まない微分方程式を **2 階微分方程式**という。一般に
n 階導関数を含み、$n+1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を
n 階微分方程式という。

問　次の微分方程式は何階微分方程式か？

(1) $y' = 2y$　　(2) $y'' = -4y$　　(3) $y''' + y'' + x^4 = 0$

$<$ 微分方程式の解1 $>$

例 (1) $y = e^{2x}$ は $y' = 2e^{2x} = 2y$ より微分方程式

$$\boxed{y' = 2y} \cdots (*)$$

を満たす。

(2) $y = 3e^{2x}$ は $y' = 6e^{2x} = 2 \times 3e^{2x} = 2y$ より微分方程式 $(*)$ を満たす。

(3) 任意定数 C に対し $y = Ce^{2x}$ は

$$y' = 2Ce^{2x} = 2y$$

より微分方程式 $(*)$ を満たす。逆に $(*)$ を満たす関数 y は全て

$$\boxed{y = Ce^{2x}} \cdots (**) \qquad (C\text{ は任意の定数})$$

の形をしている。

$(**)$ の形の関数を微分方程式 $(*)$ の**一般解**という。

(1) や (2) の関数は $(**)$ の特別の場合といえる。すなわち

$C = 1$ のとき　$y = e^{2x}$ $\cdots$ 関数 (1)

$C = 3$ のとき　$y = 3e^{2x}$ $\cdots$ 関数 (2)

である。このように C に具体的な値を与えた関数を $(*)$ の**特殊解**という。一般解 $(**)$ の定数 C が決まるような条件として例えば

$$\boxed{x = 0 \text{ のとき } y = 3} \cdots (***)$$

という条件があれば C が定まる。つまり

$x = 0$ のとき $y = Ce^{2x} = Ce^0 = C$ より $C = 3$

となる。$(***)$ のような条件を**初期条件**という。

問 例の一般解 $(**)$ に対し、以下の初期条件を満たす C を求め、特殊解 y を決定せよ。

(1) $x = 0$ のとき $y = 4$　　　　(2) $x = 0$ のとき $y = 0$

< 微分方程式の解2 >

例1　微分方程式

(1)　$\boxed{y' = 2y}$

の一般解は前ページより

$\boxed{y = Ce^{2x}}$ (C は任意定数)

である。

例2　微分方程式

(2)　$\boxed{y' = 2x}$

は両辺を x で微分すると $y = \int y'dx = \int 2xdx = x^2 + C$ より

$\boxed{y = x^2 + C}$ (C は任意定数)

が一般解である。

例3　微分方程式

(3)　$\boxed{y'' = 2}$

は両辺を x で積分すると

$$y' = \int y''dx = \int 2dx = 2x + C_1$$

$$y = \int y'dx = \int (2x + C_1)dx = x^2 + C_1x + C_2$$

より

$\boxed{y = x^2 + C_1x + C_2}$ (C_1，C_2 は任意定数)

が一般解である。

例 1、例 2 のように 1 階微分方程式の一般解は任意定数が 1 個であるが、例 3 のように 2 階微分方程式の一般解は任意定数が 2 個である。微分方程式の一般解を求めることを「**微分方程式を解く**」という。例 2、例 3 のように積分によって一般解を求める方法を「**求積法**」という。

問　次の微分方程式を解け。

(1) $y' = 4x + 3$　　(2) $y'' = 6x$

$<$ 微分方程式の解3 $>$

例題　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} y' = 2x \\ x = 0 \text{ のとき } y = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y'' = 2 \\ x = 0 \text{ のとき } y = 3 \\ x = 0 \text{ のとき } y' = 4 \end{cases}$

(解) (1) 微分方程式 $y' = 2x$ の一般解は前ページより

$$\boxed{y = x^2 + C} \ (\text{一般解})$$

である。ここで初期条件「$x = 0$ のとき $y = 3$」を満たす C は

$x = 0$ のとき $y = x^2 + C = 0^2 + C = C$ より

$$\boxed{C = 3}$$

よって (1) の (特殊) 解は

$$\boxed{y = x^2 + 3} \cdots (1) \text{ の解}$$

(2) 微分方程式 $y'' = 2$ の一般解は前ページより

$$\boxed{y = x^2 + C_1 x + C_2} \ (\text{一般解})$$

である。初期条件「$x = 0$ のとき $y = 3$」より

$$\boxed{C_2 = 3}$$

また

$$y' = 2x + C_1$$

である。初期条件「$x = 0$ のとき $y' = 4$」より

$$\boxed{C_1 = 4}$$

よって (2) の (特殊) 解は

$$\boxed{y = x^2 + 4x + 3} \cdots (2) \text{ の解}$$

問　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} y' = 4x + 3 \\ x = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y'' = 6x \\ x = 0 \text{ のとき } y = 7 \\ x = 0 \text{ のとき } y' = 8 \end{cases}$

< 微積分の記号計算 >

例 1　$y = ax^2 + b$ のように式の中に 2 つ以上のもじが使われている場合、

変数 x で微分することを強調するために $\dfrac{d}{dx}$ という微分記号を使う。

$y = ax^2 + b$ を x について微分すると

$$\frac{d}{dx}y = (ax^2 + b)' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,y}{d\,x} = 2ax$$

この変数で微分している

というふうに書く。

同様に 2 回微分は微分記号 $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2$ を使う。この場合は

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y = (ax^2 + b)'' \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2a$$

というふうに書く。

問 1　y が以下の場合に $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $y = ax^2 + bx + c$

$\dfrac{dy}{dx} =$ 　　　　　　, $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

(2) $y = e^{-kx}$

$\dfrac{dy}{dx} =$ 　　　　　　, $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

例 2　置換積分の公式 $\boxed{\displaystyle\int \boxed{}\, \frac{dy}{dx}dx = \int \boxed{}\ dy}$ を使うと以下のように

形式的に dx を約分することによって積分が求まる。

$$(1)\ \int y^n \frac{dy}{dx}dx = \int y^n dy = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$(2)\ \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{y}dy = \log|y| + C$$

$$(3)\ \int \frac{dy}{dx}dx = \int dy = \int 1dy = y + C$$

(注) $\dfrac{dy}{dx}dx = dy$ と考えてよい。

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^y \frac{dy}{dx}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin(y)\frac{dy}{dx}dx$

< 求積法 >

例題　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = 2ax$ の一般解を求めよ。

(解)　両辺を x で積分すると

①　$$\int \frac{dy}{dx} = \int 2ax$$

ここで両辺とも不定積分するので任意定数 C_1, C_2 が必要となる。

また左辺は形式的に dx を約分して

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int dy$$

と書くことができる。したがって①は

$$\int dy = \int 2axdx$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y + C_1 = ax^2 + C_2$$

$$y = ax^2 + C_2 - C_1$$

このままでも正解だが、$C_2 - C_1$ は C_1, C_2 ともに変数 x のついていない定数であるから

5	−	3	=	2
(定数)	−	(定数)	=	(定数)
C_2	−	C_1	=	(定数)

ということがわかるだろう。つまり $C_2 - C_1$ を 1 つの任意定数 C にまとめることができるのである。よって求める一般解は

$$y = ax^2 + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 3ax^2$　　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

< 変数分離形１ >

例題　微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = 3y}$$

の一般解を求めよ。

(解)　両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3$$

両辺を x で積分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int 3dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 3dx$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = 3x + C_2 \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = 3x + C_0 \qquad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{3x+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{3x+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{3x}$$

$$\Downarrow$$

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^{3x}} \qquad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0})$$

ここで C_0 がどんな数でも e^{C_0} は 0(ゼロ) にならないから
$C \neq 0$ である。一方 $(**)$ 式で $C = 0$ のとき $y = 0$ となるが、
$y = 0$ は $(*)$ の解であるから、$C = 0$ も含めて $(*)$ の一般解は

(答) $y = Ce^{3x}$　(C は任意の定数)

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 4y$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = -2y$　　(3) $\dfrac{dy}{dx} = ay$

< 変数分離形 2 >

例題　微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = 2xy}$$

の一般解を求めよ。

(解)　両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$$

両辺を x で積分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int 2xdx$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = x^2 + C_2 \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = x^2 + C_0 \qquad (C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{x^2+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{x^2+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^{x^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

ここで $e^{C_0} \neq 0$ であるから $C \neq 0$ である。一方 $(**)$ 式で $C = 0$ のとき $y = 0$ となるが $y = 0$ は $(*)$ の解であるから、$C = 0$ も含めて $(*)$ の一般解は

(答) $\boldsymbol{y = Ce^{x^2}}$　**(C は任意の定数)**

(注) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = (x \text{ の関数}) \times (y \text{ の関数})}$ の形の微分方程式を**変数分離形**といい、例題と同じやり方で解ける。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = (2x+1)y$　　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$

＜１階線形微分方程式１＞

y が変数 x の関数であることが明らかなとき、x に関する導関数を今後

$$\frac{dy}{dx} = y' \qquad , \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

と略記する。x の関数 $p(x)$ と $q(x)$ が与えられたとき、未知関数 y に関する次の形の微分方程式

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \cdots (1)$$

を **1 階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 y とその導関数 y' に関する一次式であることを意味する。$\big(y^3$ や $(y')^2$ などがある微分方程式は非線形という。$\big)$ 特に $q(x) = 0$ の場合、

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \cdots (2)$$

の形の微分方程式を **1 階線形同次微分方程式**という。

例　同次微分方程式

$$y' + 2xy = 0$$

は移行すると

$$y' = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

となって変数分離形であるから前ページと同様にして

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-2x) dx$$

より一般解は

$$\boldsymbol{y = Ce^{-x^2}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は任意定数)}$$

問 1　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' + 3y = 0$　　(2) $y' - 4y = 0$　　(3) $y' + 6x^2y = 0$

問 2　微分方程式 $y' + p(x)y = 0$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(x)dx$ を用いて表せ。

< 1 階線形微分方程式 2 >

例　微分方程式

$$y' + 3y = 5 \cdots \ (1)$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{5}{3}$$

とおくと y_1 は定数だから $y_1' = 0$ となり (1) 式を満たす。すなわち $y_1 = \dfrac{5}{3}$ は (1) の解の 1 つである。(1) に対し、同次微分方程式

$$y' + 3y = 0 \cdots \ (2)$$

の一般解を y_0 とおくと前ページより

$$y_0 = Ce^{-3x} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y = y_1 + y_0 = \frac{5}{3} + Ce^{-3x}$$

とおくと

$$\begin{aligned} y' + 3y &= \left(\frac{5}{3} + Ce^{-3x}\right)' + 3\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3x}\right) \\ &= 0 - 3Ce^{-3x} + 5 + 3Ce^{-3x} = 5 \end{aligned}$$

より y は (1) 式をみたす。つまり (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = \frac{5}{3} + Ce^{-3x} \qquad (C \textbf{ は任意定数})}$$

一般に関数 y_1 が 1 階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \cdots (*)_1$$

の解の 1 つであれば、同次方程式

$$y' + p(x)y = 0 \qquad \cdots (*)_2$$

の一般解 y_0 を求めて、

$$y = y_1 + y_0 \cdots (*)_1 \text{ の一般解}$$

が $(*)_1$ の一般解である。

問　次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a \neq 0$)

(1) $y' + 5y = 8$　　　(2) $y' + ay = b$

＜１階線形微分方程式３＞

例 微分方程式

$$y' + 3y = e^{4x} \quad \cdots\cdot \quad (1)$$

を考える。

$$y_1 = \frac{1}{7}e^{4x}$$

とおくと

$$y_1' + 3y_1 = \frac{4}{7}e^{4x} + \frac{3}{7}e^{4x} = e^{4x}$$

より y_1 は (1) の解の 1 つである。同次方程式 $y' + 3y = 0$ の一般解は

$$y_0 = Ce^{-3x} \quad \cdots\cdot \quad (2)$$

より (1) の一般解は

＜ (1) の一般解 ＞ $\boldsymbol{y = \frac{1}{7}e^{4x} + Ce^{-3x}}$ **(C は任意定数)**

(別解) ＜ (1) の解 y_1 を見つける方法 ＞

Step1 同次方程式の解 (2) の定数 C を関数 $C(x)$ におきかえる。

$$y = C(x)e^{-3x} \quad \cdots\cdot \quad (3)$$

とおく。

Step2 (3) を (1) 式に代入して $C(x)$ を決定する。

$$\begin{aligned} y' + 3y &= \left(C(x)e^{-3x}\right)' + 3\left(C(x)e^{-3x}\right) \\ &= C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} \\ &= C'(x)e^{-3x} \end{aligned}$$

(1) より

$$C'(x)e^{-3x} = e^{4x}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(両辺に } e^{3x} \text{をかける)}$$

$$C'(x) = e^{7x}$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = \int e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x} + C \ \cdots \ (4)$$

Step3 (4) を (3) に代入

(**答**) $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{7}e^{7x} + C\right)e^{-3x} = \frac{1}{7}e^{4x} + Ce^{-3x}}$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y' + 2y = e^{3x}$, (2) $y' - 2y = e^{3x}$, (3) $y' - 2y = e^{2x}$

＜１階線形微分方程式４＞

前ページの別解のような解き方を**定数変化法**と言う。１階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

問１ 次の微分方程式の一般解を求めよ。（ただし $a \neq b$）

(1) $y' - ay = e^{bx}$　　　　(2) $y' - ay = e^{ax}$

一般の１階線形微分方程式

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \cdots (*)_1$$

の一般解を求めるため, 同次方程式

$$y' + p(x)y = 0$$

の一般解 $y_0 = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ の定数 C を $C(x)$ におきかえて

$$\boxed{y = C(x)e^{-\int p(x)dx}} \cdots (*)_2$$

とおいて $(*)_1$ に代入すると

$$\boxed{y' + p(x)y = C'(x)e^{-\int p(x)dx}} \cdots (*)_3$$

となる。$(*)_1$ と $(*)_3$ を比較すると

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Downarrow$$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = \int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right) dx + C$$

より $(*)_2$ に代入すると $(*)_1$ の一般解は

$$\boxed{y = \left\{\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right) dx + C\right\} e^{-\int p(x)dx}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{一階線形微分方程式} \\ (*)_1 \text{ の一般解の公式}\end{array}\right)$$

問２ 微分方程式

$$y' + ay = q(x)$$

の一般解を $\Big($上の公式で $\int p(x)dx = ax$ とおくことによって$\Big)$ 求めよ。

＜１階線形微分方程式５＞

前ページの問より

$$y' + ay = q(x)$$

の一般解は

$$\boxed{y = \left\{ \int q(x)e^{ax}dx + C \right\} e^{-ax}}$$

である。

例題 定数 K に対し, 微分方程式

(1) $\quad y' + 3y = K\cos(4x)$

(2) $\quad y' + 3y = K\sin(4x)$

の一般解を求めよ。

(解) 上の公式より

(1) の一般解は
$$\begin{aligned} y &= \left\{ \int K\cos(4x)e^{3x}dx + C \right\} e^{-3x} \\ &= \left\{ \frac{Ke^{3x}}{25}\big(3\cos(4x) + 4\sin(4x)\big) + C \right\} e^{-3x} \\ &= \frac{K}{25}\big(3\cos(4x) + 4\sin(4x)\big) + Ce^{-3x} \end{aligned}$$

(2) の一般解は
$$\begin{aligned} y &= \left\{ \int K\sin(4x)e^{3x}dx + C \right\} e^{-3x} \\ &= \left\{ \frac{Ke^{3x}}{25}\big(-4\cos(4x) + 3\sin(4x)\big) + C \right\} e^{-3x} \\ &= \frac{K}{25}\big(-4\cos(4x) + 3\sin(4x)\big) + Ce^{-3x} \end{aligned}$$

(注) ここで

$$\boxed{\begin{aligned} \int e^{ax}\cos(bx)dx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx) + b\sin(bx)\} + C \\ \int e^{ax}\sin(bx)dx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{-b\cos(bx) + a\sin(bx)\} + C \end{aligned}}$$

を使った。(ワークブック８の 34 ページを参照)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a,\ b,\ K$ は定数)

(1) $y' + ay = K\cos(bx)$ $\qquad$ (2) $y' + ay = K\sin(bx)$

＜複素係数微分方程式＞

実数 a に対し, x の関数 y に関する微分方程式

$$y' = ay \ \cdots \ (1)$$

の一般解は

$$y = Ce^{ax} \qquad (C \text{ は任意の実数定数})$$

である。この a のかわりに複素数 $a+bi$ (a と b は実数) を用いた複素数値関数 $Z(x)$ に関する微分方程式

$$\boxed{Z'(x) = (a+bi)Z(x)} \ \cdots \ (2)$$

を考える。ワークブック 8 の 35 ページより

$$\frac{d}{dx}e^{(a+bi)x} = (a+bi)e^{(a+bi)x}$$

であるから (2) の一般解は

$$\boxed{Z(x) = Ce^{(a+bi)x}} \ (C \text{ は任意の複素数定数})$$

となる。ここで任意定数 C は複素数であることに注意せよ。

例 (1) 微分方程式

$$Z'(x) = (-2+15i)Z(x)$$

の一般解は

$$Z(x) = Ce^{(-2+15i)x} \qquad (C \text{ は任意の複素数定数})$$

(2) 微分方程式

$$Z'(x) = 4\pi i Z(x)$$

の一般解は

$$Z(x) = Ce^{4\pi i x} \qquad (C \text{ は任意の複素数定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $Z'(x) = (1+2i)Z(x)$　　(2) $Z'(x) = (3-4i)Z(x)$

(3) $Z'(x) = -2iZ(x)$　　(4) $Z'(x) = -(3+5i)Z(x)$

＜1階微分方程式の初期値問題＞

例題 次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 6xy \\ x = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y' - 2y = 5\cos(3x) \\ x = 0 \text{ のとき } y = 1 \end{cases}$

(解)

(1) は変数分離形であるから 8 ページと同様にして

$$y = Ce^{3x^2} \quad \cdots \quad ①$$

が一般解である。この関数で $x = 0$ のときは

$$x = 0 \text{ のとき } y = Ce^0 = C$$

であるから初期条件より

$$C = 5$$

これを①に代入すると

$$\textbf{(答)} \quad \boldsymbol{y = 5e^{3x^2}}$$

(2) は 13 ページ問の (1) と同じ形の微分方程式である。(2) は

$$a = -2\ ,\ b = 3\ ,\ K = 5$$

の場合であるから

$$\begin{aligned} y &= \frac{K}{a^2 + b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big) + Ce^{-ax} \\ &= \frac{5}{13}\big(-2\cos(3x) + 3\sin(3x)\big) + Ce^{2x} \quad \cdots \quad ② \end{aligned}$$

が一般解である。ここで $x = 0$ のとき $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $e^0 = 1$ より

$$x = 0 \text{ のとき } y = -\frac{10}{13} + C$$

となり初期条件より

$$-\frac{10}{13} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{23}{13}$$

これを②に代入すると

$$\textbf{(答)} \quad \boldsymbol{y = \frac{5}{13}\big(-2\cos(3x) + 3\sin(3x)\big) + \frac{23}{13}e^{2x}}$$

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} y' - 4xy = 0 \\ x = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ x = 0 \text{ のとき } y = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y' + 3y = e^{3x} \\ x = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y' - 2y = 4\sin(3x) \\ x = 0 \text{ のとき } y = 1 \end{cases}$

＜ 2 階線形微分方程式 1 ＞

与えられた関数 $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ に対し, 未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \ \cdots \ (*)_1}$$

を **2 階線形微分方程式**という。1 階線形微分方程式の場合は 12 ページのような一般解を求める公式があるが, 2 階以上の場合は解の公式が存在しない。場合に応じて一般解の形がちがうが, 共通して次の基本定理が成り立つ。

＜基本定理＞

任意の点 x_0 と定数 α , β に対して

$$y(x_0) = \alpha_1 \quad , \quad y'(x_0) = \beta \quad \cdots \quad (*)_2$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y(x)$ がただ1つ存在する。

通常は $x_0 = 0$ の場合を考えるので, 条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

例 微分方程式

(1) $$\boxed{y'' = -10}$$

を考える。 x について積分すると

$$y' = \int y'' dx = \int (-10) dx = -10x + C_1$$

$$y = \int y' dx = \int (-10x + C_1) dx = -5x^2 + C_1 x + C_2$$

より

$$\boxed{y = -5x^2 + C_1 x + C_2} \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

が (1) の一般解である。ここで初期条件として

(2) $$\boxed{y(0) = 3\ ,\ y'(0) = 4} \qquad (\text{初期条件})$$

があれば

$$y(0) = 3 \Rightarrow x = 0 \text{ のとき } y = 3 \Rightarrow C_2 = 3$$

$$y'(0) = 4 \Rightarrow x = 0 \text{ のとき } y' = 4 \Rightarrow C_1 = 4$$

より

$$\boxed{y = -5x^2 + 4x + 3} \cdots \text{ (2) を満たす (1) の解}$$

が (2) を満たす (1) の解である。

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $\begin{cases} y'' = 8 \\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'' = 6x + 2 \\ y(0) = 5\ ,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

＜ 2階線形微分方程式 2 ＞

例 x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$\boxed{y'' = -9y} \cdots (1)$$

を考える。今

$$y_1(x) = \cos(3x) \quad , \quad y_2(x) = \sin(3x)$$

とおくと

$$y_1'' = \big(\cos(3x)\big)'' = \big(-3\sin(3x)\big)' = -9\cos(3x) = -9y_1$$

$$y_2'' = \big(\sin(3x)\big)'' = \big(3\cos(3x)\big)' = -9\sin(3x) = -9y_2$$

より y_1 と y_2 は共に (1) の解である。さらに定数 C_1 と C_2 に対して

$$\boxed{y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)} \cdots (2)$$

とおくと

$$\begin{aligned} y'' &= C_1y_1'' + C_2y_2'' = C_1(-9y_1) + C_2(-9y_2) \\ &= -9\{C_1y_1 + C_2y_2\} = -9y \end{aligned}$$

より $y(x)$ もまた (1) の解である。次のページで説明するが,(1) の解は全て (2) の形をしている。ここで初期条件が

$$\boxed{y(0) = 4 \quad , \quad y'(0) = 5} \cdots (3)$$

であるとき (2) 式より

$$4 = y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1$$

である。また

$$y'(x) = -3C_1\sin 0 + 3C_2\cos(3x)$$

より

$$5 = y'(0) = -3C_1\sin 0 + 3C_2\cos 0 = 3C_2$$

であるから $C_2 = \dfrac{5}{3}$ となる。よって初期条件 (3) をみたす (1) の解は

$$\boxed{y = 4\cos(3x) + \frac{5}{3}\sin(3x)} \cdots \text{(3) をみたす (1) の解}$$

問 次の初期条件をみたす (1) の解 y を求めよ。

① $y(0) = 6$, $y'(0) = 8$　　② $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$

＜２階線形同次微分方程式１＞

与えられた関数 $p_1(x)$, $p_2(x)$ に対し, 未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0}$$

を**２階線形同次微分方程式**という。これは２階線形微分方程式 (16 ページ $(*)_1$ 式) で $q(x) = 0$ の場合である。

例 $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 9$ の場合の同次微分方程式

$$\boxed{y'' + 9y = 0} \cdots \ (1)$$

を考える。これは

$$y'' = -9y$$

と書けるから, 前ページの例より

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)} \cdots \ (2)$$

は (1) の解である。実は (1) の解は全て (2) の形をしている。(2) を微分方程式 (1) の**一般解**といい, $\cos(3x)$ と $\sin(3x)$ を (1) の**基本解**という。

(注) ＜ (1) の解が全て (2) の形をしている理由 ＞

(1) の任意の解を $y_1(x)$ とおき, この初期値を

$$\boxed{y_1(0) = \alpha \ , \ y_1'(0) = \beta} \cdots \ (3)$$

とおく。一方

$$y_2(x) = \alpha \cos(3x) + \frac{\beta}{3} \sin(3x)$$

とおくと $y_2(x)$ は (1) の解であり,

$$y_2(0) = \alpha \quad , \quad y_2'(0) = \beta$$

をみたす。16 ページの基本定理より初期条件 (3) をみたす (1) の解はただ１つであるから

$$y_1(x) = y_2(x)$$

である。従って $y_1(x) = \alpha \cos(3x) + \dfrac{\beta}{3} \sin(3x)$ であるから (2) の形をしている。

問 $y(x) = \cos(2x)$ は微分方程式

$$y'' + 4y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解を求め, この微分方程式の一般解を求めよ。

＜2階線形同次微分方程式2＞

一般の2階線形同次微分方程式

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \ \cdots \ (*)_1$$

を考える。もし2つの異なる関数 $y_1(x)$ と $y_2(x)$ が $(*)_1$ の解ならば任意の定数 C_1 と C_2 に対し

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \ \cdots \ (*)_2$$

とおくと $(*)_2$ も $(*)_1$ の解である。逆に $(*)_1$ の全ての解は $(*)_2$ の形をしている。 $(*)_1$ の**一般解**といい, $y_1(x) = y_2(x)$ を $(*)_1$ の**基本解**という。

例 微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \ \cdots \ (1)$$

を考える。今

$$y_1(x) = e^{3x} \quad , \quad y_2(x) = xe^{3x}$$

とおく。

$$y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 9e^{3x} - 6 \times 3e^{3x} + 9e^{3x} = 0$$

より $y_1(x)$ は(1)の解である。一方 $y_2(x)$ を微分すると

$$y_2'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} \quad , \quad y_2''(x) = 6e^{3x} + 9xe^{3x}$$

であるから

$$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = (6e^{3x} + 9xe^{3x}) - 6(e^{3x} + 3xe^{3x}) + 9xe^{3x} = 0$$

より $y_2(x)$ も(1)の解である。つまり $y_1(x)$ と $y_2(x)$ は(1)の基本解であるから(1)の一般解は

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}} \ \cdots \ (1)\text{の一般解}$$

問 $y = xe^{5x}$ は微分方程式

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解をみつけ, この微分方程式の一般解を求めよ。

$<$ 微分演算子 D $>$

x の関数 $y=y(x)$ に対し, 微分記号を

$$\boxed{y'(x)=\frac{d}{dx}y(x)=Dy(x) \quad , \quad y''(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y(x)=D^2y(x)}$$

と書くことにする。この記号 D を**微分演算子**または**微分作用素**という。

例 1 微分方程式

$$y'-3y=0$$

を D を用いて書くと

$$y'-3y=Dy-3y=(D-3)y$$

より

$$(D-3)y=0$$

となる。

例 2 微分方程式

$$y''-5y'+6y=0$$

を D を用いて書くと

$$y''-5y'+6y=D^2y-5Dy+6y=(D^2-5D+6)y$$

より

$$(D^2-5D+6)y=0$$

となる。

問 1 次の微分方程式を D を用いて表せ。

(1) $y'+5y=0$ (2) $y''-10y'+25y=0$

例 3 微分方程式

$$(D-3)y=e^{3x}$$

を考える。これを D を使わずに書くと

$$y'-3y=e^{3x}$$

となる。12 ページより, この微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y=xe^{3x}+Ce^{3x}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $(D-2)y=0$ (2) $(D-a)y=0$

(3) $(D-2)y=e^{2x}$ (4) $(D-a)y=e^{ax}$

< 定数係数2階同次微分方程式1 >

定数 a, b に対し x の関数 y に関する微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \cdots (*)_1$$

を**定数係数 2 階同次微分方程式**という。この形の微分方程式を解くためには前ページの微分演算子 D を用いると便利である。
$(*)_1$ 式を D を用いて書きなおすと

$$(D^2 + aD + b)y = 0 \qquad \cdots (*)_2$$

となる。

例 微分方程式

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad \cdots (1)$$

の一般解を求めたい。この式を D を用いて表すと

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。D に関する 2 次方程式を因数分解すると

$$(D-2)(D-3)y = 0$$

となるから

$$(D-2)y = 0 \quad \text{または} \quad (D-3)y = 0$$

となり、前ページの結果から

$$y = C_1e^{2x} \quad \text{または} \quad y = C_2e^{3x} \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意定数})$$

が導かれる。これが (1) 式の基本解であるから、求める一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は任意定数})}$$

である。

問 1 以下の関数 y に対し、$y'' - 5y' + 6y$ を計算せよ。

(1) $y = e^{2x}$, $y'' - 5y' + 6y =$

(2) $y = e^{3x}$, $y'' - 5y' + 6y =$

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' - 2y' - 3y = 0$

(2) $y'' + y' - 6y = 0$

< 定数係数２階同次微分方程式２ >

例 微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad \cdots(1)$$

を考える。微分演算子 D を用いると

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

より

$$(D-3)(D-3)y = 0$$

である。ここで

$$(D-3)y = 0 \quad \text{ならば} \quad (D-3)(D-3)y = (D-3)0 = 0$$
$$(D-3)y = e^{3x} \quad \text{ならば} \quad (D-3)(D-3)y = (D-3)e^{3x} = 0$$

である。20 ページの結果より

$$y_1 = e^{3x} \quad \text{は} \quad (D-3)y_1 = 0 \quad \text{の解}$$
$$y_2 = xe^{3x} \quad \text{は} \quad (D-3)y_2 = e^{3x} \quad \text{の解}$$

であるから y_1, y_2 が (1) の基本解である。よって (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} \quad (C_1\ ,\ C_2\ \text{は任意定数})}$$

である。

例 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' - 8y' + 16y = 0$

(2) $y'' - 10y' + 25y = 0$

(3) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(4) $y'' + 6y' + 9y = 0$

$<$ 定数係数2階同次微分方程式3 $>$

例 微分方程式

$$y'' + 9y = 0 \qquad \cdots (1)$$

を考える。17, 18 ページで $\cos(3x)$ と $\sin(3x)$ が (1) の基本解であることがわかった。この基本解を見つけるには微分演算子 D を用いて以下のように考える。
(1) を D を用いて表すと

$$(D^2 + 9)y = 0$$

であるから $D^2 + 9$ を複素数の範囲で因数分解すると

$$(D + 3i)(D - 3i)y = 0 \qquad \cdots (2)$$

となる。よって y を複素数値関数と考えると

$$e^{3ix} \quad \text{と} \quad e^{-3ix}$$

が (2) の基本解であるから

$$y = K_1 e^{3ix} + K_2 e^{-3ix} \qquad (K_1, K_2 \text{ は任意の複素数定数 })$$

となる。これが複素数値関数としての (2) の一般解である。この中に (1) の基本解が含まれている。

[I] $K_1 = K_2 = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}e^{3ix} + \frac{1}{2}e^{-3ix} &= \frac{1}{2}\{\cos(3x) + i\sin(3x)\} + \frac{1}{2}\{\cos(-3x) + i\sin(-3x)\} \\ &= \cos(3x) \end{aligned}$$

[II] $K_1 = -\dfrac{i}{2} \quad , \quad K_2 = \dfrac{i}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} y = -\frac{i}{2}e^{3ix} + \frac{i}{2}e^{-3ix} &= -\frac{i}{2}\{\cos(3x) + i\sin(3x)\} + \frac{i}{2}\{\cos(-3x) + i\sin(-3x)\} \\ &= \sin(3x) \end{aligned}$$

よって $\cos(3x)$ と $\sin(3x)$ が (1) の基本解であることがわかる。
従って (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の実数定数 })}$$

問 次の微分方程式の一般解 (= 実数解) を求めよ。(ω は実数定数)

(1) $y'' + 16y = 0$ (2) $y'' + \omega^2 y = 0$

＜定数係数2階同次微分方程式4＞

例 微分方程式

$$y'' + 4y' + 229y = 0 \qquad \cdots (1)$$

を考える。D を用いて表すと

$$(D^2 + 4D + 229)y = 0 \qquad \cdots (2)$$

となる。ここで2次方程式

$$D^2 + 4D + 229 = 0$$

の解は

$$D = -2 \pm 15i$$

であるから D の2次式は

$$D^2 + 4D + 229 = \bigl(D - (-2 + 15i)\bigr)\bigl(D - (-2 - 15i)\bigr)$$

のように因数分解される。従って (2) の複素数解は

$$y = K_1 e^{(-2+15i)x} + K_2 e^{(-2-15i)x} \qquad (K_1, K_2 \text{ は任意の複素数})$$

となる。この中に (1) の (実数値) 基本解 y_1, y_2 が含まれている。

[I] $K_1 = K_2 = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}e^{(-2+15i)x} + \frac{1}{2}e^{(-2-15i)x} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2x}\bigl(\cos(15x) + i\sin(15x)\bigr) + \frac{1}{2}e^{-2x}\bigl(\cos(-15x) + i\sin(-15x)\bigr) = e^{-2x}\cos(15x) \end{aligned}$$

[II] $K_1 = -\dfrac{i}{2}$, $K_2 = \dfrac{i}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{i}{2}e^{(-2+15i)x} + \frac{i}{2}e^{(-2-15i)x} \\ &= -\frac{i}{2}e^{-2x}\bigl(\cos(15x) + i\sin(15x)\bigr) + \frac{i}{2}e^{-2x}\bigl(\cos(-15x) + i\sin(-15x)\bigr) = e^{-2x}\sin(15x) \end{aligned}$$

よって $y_1 = e^{-2x}\cos(15x)$ と $y_2 = e^{-2x}\sin(15x)$ が (1) の基本解である。

従って (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{-2x}\cos(15x) + C_2 e^{-2x}\sin(15x)} \qquad \boldsymbol{(C_1, C_2} \textbf{ は任意の実数}\boldsymbol{)}$$

問 次の微分方程式の一般解 (= 実数解) を求めよ。

(1) $y'' + 4y' + 13y = 0$ (2) $y'' - 2y' + 6y = 0$

$<$ 定数係数2階同次微分方程式5 $>$

一般の定数係数2階同次微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \cdots (1)$$

の一般解の求め方をまとめる。

Step1. 微分演算子 D に関する2次方程式

$$D^2 + aD + b = 0 \qquad \cdots (2)$$

を解く。

Step2. 2次方程式 (2) の解が以下のどの場合かを考える。

[I] $a^2 - 4b > 0$ のとき (2) は2つの実数解 α,β をもつ。
このとき (2) は $D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$ と因数分解されるから
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}} \qquad (\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数})$$

[II] $a^2 - 4b = 0$ のとき (2) はただ1つの解 α(α は実数) をもつ。
このとき (2) は $D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \alpha)$ と因数分解されるから
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}} \qquad (\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数})$$

[III] $a^2 - 4b < 0$ のとき (2) は2つの複素数解 α,β をもつ。今

$$\alpha = \mu + \nu i \quad , \quad \beta = \mu - \nu i$$

であれば (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\mu x} \cos(\nu x) + C_2 e^{\mu x} \sin(\nu x)} \qquad (\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' - 4y' - 5y = 0$

(2) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(3) $y'' + 25y = 0$

(4) $y'' - 6y' + 14y = 0$

＜定数係数２階非同次微分方程式１＞

例 x の関数 y に関する微分方程式

$$y'' - 5y + 6y = 7 \qquad \cdots (1)$$

を考える。定数 k に対して $y_1(x) = k$ とおくと定数を微分すると 0 だから

$$y_1' = (k)' = 0 \quad , \quad y_1'' = 0$$

より y_1 を (1) に代入すると

$$y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 0 - 0 + 6k = 7$$

である。もし $k = \dfrac{7}{6}$ であれば (1) 式をみたす。従って

$$y_1(x) = \frac{7}{6} \qquad \cdots (2)$$

は (1) の解である。これを (1) の**特殊解**または**特解**という。
(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を $y(x)$ とし、

$$y_0(x) = y(x) - \frac{7}{6} \qquad \cdots (3)$$

とおくと

$$\begin{aligned} &y_0'' - 5y_0' + 6y_0 \\ &= y'' - 5y' + 6y - 7 = 0 \end{aligned}$$

より y_0 は同次方程式

$$y_0'' - 5y_0' + 6y_0 = 0 \qquad \cdots (4)$$

の解である。(4) は D を用いて

$$\left(D^2 - 5D + 6\right) y_0 = (D-2)(D-3)\,y_0 = 0$$

と表されるから (4) の一般解は

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

である。よって (1) の一般解は (3) より

$$\boldsymbol{y\left(= y_0 + \frac{7}{6}\right) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{7}{6}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + y' - 2y = 5$　　　　(2) $y'' - 3y' - 4y = 7$

< 定数係数2階非同次微分方程式2 >

一般の2階線形微分方程式

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = q(x)$$

において、$q(x) \neq 0$ のとき**非同次方程式**という。前ページのように (1) 式をみたす解 (特殊解)$y_1(x)$ が1つみつかれば、(1) の一般解 $y(x)$ は

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$$

と表される。ここで $y_0(x)$ は同次方程式

$$y_0'' + p_1(x)\,y_0' + p_2(x)\,y_0 = 0$$

の一般解である。特に $p_1(x)$,$p_2(x)$,$q(x)$ が定数 a,b,q のとき、微分方程式

$$y'' + ay' + by = q$$

の特殊解 $y_1(x)$ は $y_1(x) = \dfrac{q}{b}$ である。

例 微分方程式

$$y'' + 4y = 5 \qquad \cdots(1)$$

を考える。

$$y_1(x) = \frac{5}{4}$$

は (1) の特殊解であり、同次方程式

$$y_0'' + 4y_0 = 0 \qquad \cdots(2)$$

の一般解は 23 ページ (または 25 ページ) より

$$y_0 = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

であるから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{5}{4}} \quad (\boldsymbol{C_1},\boldsymbol{C_2}\ \textbf{は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + 16y = 9$　　(2) $y'' + 4y' + 4y = 8$　　(3) $y'' - 2y' + 3y = 4$

＜定数係数2階非同次微分方程式3＞

恒等的に0でない関数 $q(x)$ と定数 a,b に対して、微分方程式

$$y'' + ay' + by = q\left(x\right) \qquad \cdots (*)_1$$

を**定数係数2階非同次微分方程式**という。もし $(*)_1$ の特殊解 $y_1(x)$ が求まれば、同次方程式

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = 0 \qquad \cdots (*)_2$$

の一般解 $y_0(x)$ に対し、$(*)_1$ の一般解は $y_1(x) + y_0(x)$ となる。前ページのように $q(x)$ が定数の場合は特殊解 $y_1(x)$ も定数になる。実は次のことが分かっている。

$q(x)$ が定数	$\Rightarrow$	特殊解 $y_1(x)$ は定数
$q(x)$ が x の1次式	$\Rightarrow$	特殊解 $y_1(x)$ は x の1次式
$q(x)$ が x の2次式	$\Rightarrow$	特殊解 $y_1(x)$ は x の2次式
$q(x)$ が x の n 次式	$\Rightarrow$	特殊解 $y_1(x)$ は x の n 次式

例 微分方程式

$$y'' - 5y' + 6y = x \qquad \cdots (1)$$

を考える。この場合 $q(x) = x$ は x の1次式であるから特殊解 $y_1(x)$ も x の1次式である。そこで

$$y_1\left(x\right) = Ax + B$$

とおく。(1) より

$$x = y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 0 - 5A + 6\left(Ax + B\right) = 6Ax + \left(6B - 5A\right)$$

である。$x = 6Ax + (6B - 5A)$ の両辺を比較すると

$$\begin{cases} 1 = 6A \\ 0 = 6B - 5A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = \dfrac{5}{36} \end{cases}$$

であるから特殊解は $y_1\left(x\right) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{5}{36}$ である。一方同次方程式

$$y_0'' - 5y_0' + 6y_0 = 0$$

の一般解は21ページより $y_0\left(x\right) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ だから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{36} + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C_1,C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + 5y' + 4y = x$

(2) $y'' - 3y' - 4y = 5x$

＜定数係数2階非同次微分方程式4＞

一般の定数係数2階非同次微分方程式

$$\boxed{y'' + ay' + by = q\left(x\right)} \qquad \cdots (1)$$

の解法は以下のとおりである。

Step1　同次方程式

$$y_0'' + ay_0' + by_0 = 0$$

の一般解

$$\boxed{y_0(x) = C_1\varphi_1\left(x\right) + C_2\varphi_2\left(x\right)} \qquad \cdots (2)$$

を求める。

Step2　同次方程式の基本解 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ に対し

$$\boxed{W\left(x\right) = \varphi_1\left(x\right)\varphi_2'\left(x\right) - \varphi_1'\left(x\right)\varphi_2\left(x\right)} \qquad \cdots (3)$$

を計算する。

Step3

$$\boxed{u_1'\left(x\right) = -\frac{\varphi_2\left(x\right)q\left(x\right)}{W\left(x\right)} \quad , \quad u_2'\left(x\right) = \frac{\varphi_1\left(x\right)q\left(x\right)}{W\left(x\right)}} \qquad \cdots (4)$$

を満たす関数 $u_1(x)$ と $u_2(x)$ をえらぶと

$$\boxed{y = u_1\left(x\right)\varphi_1\left(x\right) + u_2\left(x\right)\varphi_2\left(x\right) + C_1\varphi_1\left(x\right) + C_2\varphi_2\left(x\right)} \qquad (C_1,C_2 \text{ は任意定数 })$$

が一般解である。

＜証明＞ $y_1\left(x\right) = u_1\left(x\right)\varphi_1\left(x\right) + u_2\left(x\right)\varphi_2\left(x\right)$ が (1) の特殊解であることを示す。
(3) と (4) より

$$\begin{cases} u_1'\varphi_1 + u_2'\varphi_2 = 0 \\ u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' = q\left(x\right) \end{cases}$$

が成り立つ。これより

$$y_1' = u_1\varphi_1' + u_2\varphi_2' \quad , \qquad y_1'' = u_1\varphi_1'' + u_2\varphi_2'' + q\left(x\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} y_1'' + ay_1' + by_1 &= u_1 \times \left(\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1\right) + u_2 \times \left(\varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2\right) + q\left(x\right) \\ &= q\left(x\right) \end{aligned}$$

より y_1 は (1) の解である。

＜定数係数2階非同次微分方程式5＞

例 微分方程式

$$\boxed{y'' + 3y' + 2y = e^{4x}} \qquad \cdots (1)$$

を考える。前ページの解法に従って解を求める。

Step1 同次方程式

$$y_0'' + 3y_0' + 2y_0 = 0 \qquad \cdots (2)$$

は D を用いると

$$\left(D^2 + 3D + 2\right) y_0 = (D+1)(D+2)\, y_0 = 0$$

より、(2) の一般解は

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Step2 $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = e^{-2x}$ より

$$W(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = e^{-x}\left(e^{-2x}\right)' - \left(e^{-x}\right)' e^{-2x}$$

$$= e^{-x}\left(-2e^{-2x}\right) - \left(-e^{-x}\right) e^{-2x} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

Step3 $u_1'(x) = -\dfrac{\varphi_2 q}{W} = -\dfrac{e^{-2x}e^{4x}}{-e^{-3x}} = e^{-2x+4x+3x} = e^{5x} \Rightarrow u_1(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x}$

$$u_2'(x) = \frac{\varphi_1 q}{W} = \frac{e^{2x}e^{4x}}{-e^{-3x}} = -e^{-x+4x+3x} = -e^{6x} \Rightarrow u_2(x) = -\frac{1}{6}e^{6x}$$

$$y_1(x) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 = \frac{1}{5}e^{5x}e^{-x} + \left(-\frac{1}{6}e^{6x}\right)e^{-2x} = \frac{1}{5}e^{4x} - \frac{1}{6}e^{4x} = \frac{1}{30}e^{4x}$$

とおくと y_1 は (1) の特殊解である。よって (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(x) = y_1(x) + y_0(x) = \frac{1}{30}e^{4x} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{C_1, C_2}\ \textbf{は任意定数)}$$

問1 $y_1(x) = \dfrac{1}{30}e^{4x}$ に対し $y_1'' + 3y_1' + 2y_1$ を求めよ。

$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 =$

問2 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' + 4y' + 3y = e^{5x}$　　　　(2) $y'' - 6y' + 8y = e^{3x}$

＜定数係数2階非同次微分方程式6＞

例 微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = e^{7x} \ \cdots \ (1)$$

を考える。29 ページの解法に従って解を求める。

Step.1　同次方程式

$$y_0'' - 6y_0' + 9y_0 = 0 \ \cdots \ (2)$$

は D を用いると

$$(D^2 - 6D + 9)y_0 = (D-3)(D-3)y_0 = 0$$

より (2) の一般解は

$$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Step.2　$\varphi_1 = e^{3x}$, $\varphi_2 = xe^{3x}$ とおいて W を計算すると

$$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = e^{3x}(e^{3x} + 3xe^{3x}) - 3e^{3x}xe^{3x} = e^{6x}$$

Step.3　① $u_1'(x) = -\dfrac{\varphi_2 q}{W} = -\dfrac{xe^{3x}e^{7x}}{e^{6x}} = -xe^{4x}$ より

$$u_1(x) = \int \left(-xe^{4x}\right) dx$$

$\left(\begin{array}{l} \text{(注)　部分積分法} \\ \int f \times g' dx = f \times g - \int f' \times g dx \end{array}\right)$

$$= -\frac{x}{4}e^{4x} - \int \left(-\frac{1}{4}e^{4x}\right) dx = -\frac{x}{4}e^{4x} + \frac{1}{16}e^{4x}$$

② $u_2'(x) = \dfrac{\varphi_1 q}{W} = \dfrac{e^{3x}e^{7x}}{e^{6x}} = e^{4x}$　より

$$u_2(x) = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x}$$

③ $y_1 = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 = \left(-\dfrac{x}{4}e^{4x} + \dfrac{1}{16}e^{4x}\right)e^{3x} + \dfrac{1}{4}e^{4x}xe^{3x}$

$$= \frac{1}{16}e^{7x}$$

とおくと、 y_1 は (1) の特殊解。よって (1) の一般解 $y(x)$ は

$$\boldsymbol{y(x) = y_1(x) + y_0(x) = \frac{1}{16}e^{7x} + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}} \ (\boldsymbol{C_1},\ \boldsymbol{C_2} \text{ は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y'' - 4y' + 4y = e^{7x}$　　　　(2) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

＜ 定数係数2階非同次微分方程式7 ＞

例 微分方程式

$$y'' + 9y = 5\cos(3x) \ \cdots \ (1)$$

を考える。29ページの解法に従って解を求める。

Step.1　同次方程式

$$y'' + 9y = (D^2 + 9)y = 0 \ \cdots \ (2)$$

の一般解は

$$y_0(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

Step.2　$\varphi_1(x) = \cos(3x),\ \varphi_2(x) = \sin(3x)$ とおいて W を計算すると

$$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 = \cos(3x) \times 3\cos(3x) - (-3\sin 3x)\sin(3x)$$

$$= 3(\cos^2(3x) + \sin^2(3x)) = 3$$

Step.3 $u_1'(x) = -\dfrac{\varphi_2 q}{W} = -\dfrac{5}{3}\sin(3x)\cos(3x) = -\dfrac{5}{6}\sin(6x)$ $\left((注)\ \sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}\right)$

$u_2'(x) = \dfrac{\varphi_1 q}{W} = -\dfrac{5}{3}\cos^2(3x) = \dfrac{5}{6}(1 + \cos(6x))$ $\left((注)\ \cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)$

より

$$u_1(x) = \int -\frac{5}{6}\sin(6x)dx = \frac{5}{36}\cos(6x)\ ,$$

$$u_2(x) = \int \frac{5}{6}(1 + \cos(6x))dx = \frac{5}{6}x + \frac{5}{36}\sin(6x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} y_1(x) &= u_1(x)\varphi_1(x) + u_2(x)\varphi_2(x) \\ &= \frac{5}{36}\cos(6x)\cos(3x) + \left(\frac{5}{6}x + \frac{5}{36}\sin(6x)\right)\sin(3x) \\ &= \frac{5}{6}x\sin(3x) + \frac{5}{36}\left(\cos(6x)\cos(3x) + \sin(6x)\sin(3x)\right) \\ &= \frac{5}{6}x\sin(3x) + \frac{5}{36}\cos(3x) \qquad ((注)\ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

であるから (1) の一般解は

$$y_1(x) + y_0(x) = \frac{5}{6}x\sin(3x) + \frac{5}{36}\cos(3x) + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

であるが、$\dfrac{5}{36}\cos(3x) + C_1\cos(3x) = \left(\dfrac{5}{36} + C_1\right)\cos(3x)$ は定数 $\times \cos(3x)$

の形だから2項をまとめて (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{5}{6}x\sin(3x) + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)}\ \ \textbf{(}\boldsymbol{C_1},\ \boldsymbol{C_2}\textbf{は任意定数)}$$

問 $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ を利用して、微分方程式 $y'' + 9y = 5\sin(3x)$

の一般解を求めよ。　（ヒント）$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$

$\sin(6x)\cos(3x) - \cos(6x)\sin(3x) = \sin(3x)$

$<$ 定数係数2階非同次微分方程式8 $>$

定数 $\alpha,\ \beta, \kappa,\ \lambda$ に対し、微分方程式

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = \kappa e^{\lambda x} \ \cdots\ (1)$$

を考える。ここで $\alpha,\ \beta, \lambda$ は異なる実数 $(\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \lambda,\ \beta \neq \lambda)$ で $\kappa \neq 0$ とする。
(1) の同次方程式 は D を用いると

$$(D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta)y = (D - \alpha)(D - \beta)y = 0 \ \cdots\ (2)$$

と表されるので、同次方程式 (2) の一般解 y_0 は

$$y_0(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \ \cdots\ (3)$$

となる。

問 1 $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}$, $\varphi_2(x) = e^{\beta x}$ とおいて W を計算せよ。

$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2 =$

問 2 $q(x) = \kappa e^{\lambda x}$ に対し、

$$u_1'(x) = -\frac{\varphi_2 q}{W} \qquad , \quad u_2'(x) = \frac{\varphi_1 q}{W}$$

をみたす関数 $u_1(x)$ と $u_2(x)$ を求めよ。

$u_1(x) =$ $\qquad\qquad$, $\quad u_2(x) =$

問 3 $y_1(x) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$ を計算し、できるだけ簡単な式にせよ。

$y_1(x) =$

問 4 (1) の一般解を求めよ。

＜定数係数2階非同次微分方程式9＞

前ページでわかったように微分方程式

$$(D-\alpha)(D-\beta)y=\kappa e^{\lambda x} \ \cdots \ (*)_1$$

の特殊解は ($\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq\lambda,\ \beta\neq\lambda$ のとき)

$$y_1(x)=\frac{\kappa e^{\lambda x}}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)} \ \cdots \ (*)_2$$

であった。実は α,β,λ が複素数のときも y_1 は $(*)_1$ の特殊解になる。

例

$$y''+9y=\kappa e^{\lambda x} \ \cdots \ (1)$$

を考える。 D を用いると

$$y''+9y=(D^2+9)y=(D-3i)(D+3i)y$$

であるから $\alpha=3i,\ \beta=-3i$ の場合に相当する。 $(*)_2$ の式で形式的に

$\alpha=3i,\ \beta=-3i$ とおくと

$$y_1(x)=\frac{\kappa e^{\lambda x}}{(\lambda-3i)(\lambda+3i)}=\frac{\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9} \ \cdots \ (2)$$

となる。(2) が (1) の特殊解である。なぜならば微分すると

$$y_1'=\frac{\lambda\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9} \quad ,\ y_1''=\frac{\lambda^2\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9}$$

より

$$y_1''+9y_1=\frac{\lambda^2\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9}+\frac{9\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9}=\frac{\lambda^2+9}{\lambda^2+9}\kappa e^{\lambda x}=\kappa e^{\lambda x}$$

となるので (1) 式をみたす。一方 (1) の同次方程式

$$y_0''+9y_0=0 \ \cdots \ (3)$$

の一般解 y_0 は

$$y_0(x)=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$$

より (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(x)=y_1(x)+y_0(x)=\frac{\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2+9}+C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)} \left(\begin{array}{l}\boldsymbol{C_1,\ C_2}\text{は}\\ \text{任意定数}\end{array}\right)$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $y''+4y=\kappa e^{\lambda x}$ (2) $y''+\omega^2y=\kappa e^{\lambda x}$

＜定数係数2階非同次微分方程式10＞

例 定数 $\omega(\neq 5)$ に対し、微分方程式

$$y'' + \omega^2 y = 3\cos(5x) \ \cdots \ (*)$$

を考える。29 ページの方法でもよいが、その場合に W を求めるとき $\cos(\omega x)\cos(5x)$ や $\sin(\omega x)\cos(5x)$ 等の積分を計算しなければならない。そのかわりに以下の方法で特殊解をもとめる。前ページの結果より

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = \kappa e^{\lambda x} \text{ の特殊解は } y_1(x) = \frac{\kappa e^{\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2}} \ \cdots \ (**)$$

であることがわかっている。この結果を使う。オイラーの公式より

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

であるから $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

を使うと、 $3\cos(5x) = \dfrac{3}{2}e^{5xi} + \dfrac{3}{2}e^{-5xi}$ となるから $(*)$ 式は

$$y'' + \omega^2 y = \frac{3}{2}e^{5xi} + \frac{3}{2}e^{-5xi}$$

となる。ここで $(**)$ で $\kappa = \dfrac{3}{2}$, $\lambda = \pm 5i$ とおいた場合を考える。

$$\boxed{y_1'' + \omega^2 y_1 = \frac{3}{2}e^{5ix} \text{ の特殊解は } y_1(x) = \frac{\frac{3}{2}e^{5ix}}{(5i)^2 + \omega^2} = \frac{3e^{5ix}}{2(\omega^2 - 25)}} \ \cdots \ (1)$$

$$\boxed{y_2'' + \omega^2 y_2 = \frac{3}{2}e^{-5ix} \text{ の特殊解は } y_2(x) = \frac{\frac{3}{2}e^{-5ix}}{(-5i)^2 + \omega^2} = \frac{3e^{-5ix}}{2(\omega^2 - 25)}} \ \cdots \ (2)$$

実は (1) の解と (2) の解の和は $(*)$ の解になる。つまり

$$y_*(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{3}{2(\omega^2 - 25)}\left(e^{5ix} + e^{-5ix}\right) = \frac{3}{\omega^2 - 25}\cos(5x)$$

は $(*)$ 式の特殊解になる。なぜならば

$$y_*'' + \omega^2 y_* = (y_1'' + y_2'') + \omega^2(y_1 + y_2) = (y_1'' + \omega^2 y_1) + (y_2'' + \omega^2 y_2) = \frac{3}{2}e^{5xi} + \frac{3}{2}e^{-5xi} = 3\cos(5x)$$

より $(*)$ の特殊解である。$(*)$ の同次方程式の基本解は $\cos(\omega x)$ と $\sin(\omega x)$ であるから $(*)$ の一般解は

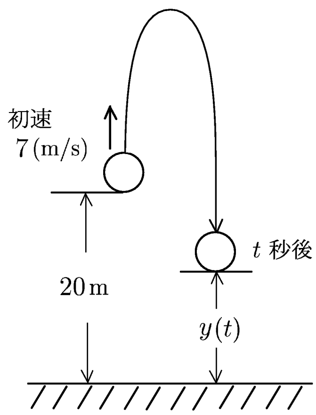
$$\boldsymbol{y(x) = \frac{3}{\omega^2 - 25}\cos(5x) + C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)} \ \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{，}\boldsymbol{C_2}\textbf{は任意定数)}$$

問 $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を利用して微分方程式 $y'' + \omega^2 y = 3\sin(5x)$ の一般解を求めよ。（ただし $\omega \neq 5$ ）

＜微分方程式の応用 1＞

微分方程式は理学や工学の分野だけでなく医学や経済学などにも現われる。なかでも時間発展を記述する方程式として現われる場合が多い。たとえば人口の時間発展や物体の運動を表す方程式などである。その場合に変数は時間変数 t を用いる場合が多い。そこでこれ以後は変数 t の関数に対する微分方程式を考える。

例 地上 20m の高さから初速 7(m/s) である物体を真上に投げ上げた。空気抵抗がないものとして t 秒後の高さ $y(t)$ (m) を求めたい。



t 秒後の (瞬間の) 速度は $\dfrac{dy}{dt} = y'(t)$ であり

t 秒後の (瞬間の) 加速度は $\dfrac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$ である。

加速度は重力加速度 $g = 9.8$ (m/s^2) が下向きに作用するので

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g} \cdots (1)$$

という微分方程式ができる。(1) の一般解は (3 ページと同様にして)

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_1,\ C_2 \text{ は任意実数})$$

である。ここで初期条件より

出発位置　　$t = 0$ のとき $y = 20$ $\big(y(0) = 20\big) \cdots (2)$

初速　　$t = 0$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 7$ $\big(y'(0) = 7\big) \cdots (3)$

である。条件 (2) より $C_2 = 20$ がわかる。また一般解を微分すると

$$\frac{dy}{dt}\big(= y'(t)\big) = -gt + C_1$$

であるから条件 (3) より $C_1 = 7$ がわかる。よって $y(t)$ は

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + 7t + 20}$$

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

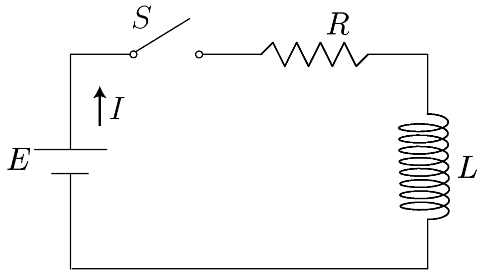
(1) $\dfrac{dy}{dt} = 2y$,　$y(0) = 3$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -4$,　$y(0) = 5$, $y'(0) = 6$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$,　$y(0) = 5$, $y'(0) = 12$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$,　$y(0) = 8$, $y'(0) = 13$

＜微分方程式の応用２＞



例 右図のような直列回路のスイッチ S を閉じた瞬間から t 秒後の電流を $I=I(t)$ とおくと I は次の微分方程式

$$L\frac{dI}{dt}+RI=I \quad \cdots \quad (1)$$

をみたす。ここで L , R , E は正の定数であり、L は自己インダクタンス、R は抵抗、E は起電力と呼ばれる。(1) の両辺を L で割ると

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L} \quad \cdots \quad (1)'$$

となる。10 ページの結果より

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+ay=b \text{ の一般解は } y=\frac{b}{a}+Ce^{-ax} \quad (C \text{ は任意定数})}$$

であるから、$(1)'$ の一般解は

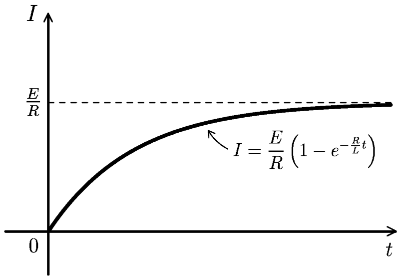
$$I=\frac{\frac{E}{L}}{\frac{R}{L}}+Ce^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。ここで初期条件は $t=0$ のとき $I=0$(電流は流れていない) であるから

$$t=0 \text{ のとき } I=\frac{E}{R}+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-\frac{E}{R}$$

となる。従って

$$\boldsymbol{I=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$



となる。ここで $t\to\infty$ のとき $e^{-\frac{R}{L}t}\to 0$ だから

$$t\to\infty \text{ のとき } I\to\frac{E}{R}$$

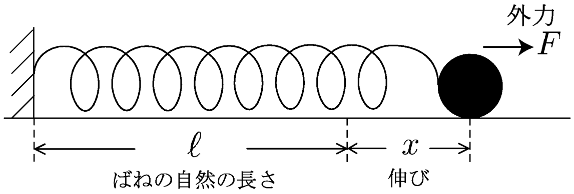
となりグラフは右図のようになる。このグラフから時間がたてば電流 I は一定値 $\frac{E}{R}$ になることがわかる。

問 空気中を落下する物体が速度に比例する抵抗を受けるとき、時刻 t における速度を v とすれば、次の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dv}{dt}=g-kv \qquad (g \text{ は重力加速度、} k \text{ は空気抵抗の比例定数})$$

この微分方程式を初期条件 ($t=0$ のとき $v=0$) のもとで解け。

＜微分方程式の応用３＞



例 右図のようにばねの先におもりがあり、おもりには外力 F が働くとする。
時刻 t におけるばねの伸びを $x = x(t)$ とすると、x は一般に次の微分方程式をみたす。

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(x)} \quad \cdots \quad (*)$$

ここで k は「抵抗係数」、ω^2 は「ばねの力を表す係数」、$F(t)$ は「外力」を表す。

［**I**］ $k = 0$(抵抗ゼロ)、$\omega^2 = 9$、$F = 0$(外力ゼロ) の場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

の解は (23 ページと同様に考えると)

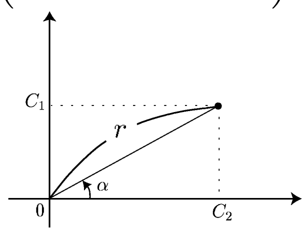
$$x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$$

となる。ここで C_1 と C_2 は初期条件より定まる定数 $\left(C_1 = \ell\ ,\ C_2 = \frac{x'(0)}{3}\right)$ である。

定数 C_1 と C_2 に対し、右図の r と角度 α をとれば

$$x(t) = r\sin(3t + \alpha)$$

となる。このような式で表される運動を**単振動**という。



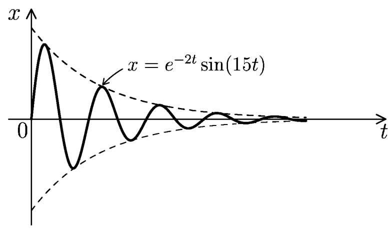
［**II**］ $k = 4$, $\omega^2 = 229$, $F = 0$(外力ゼロ) の場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 229x = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

の一般解は (24 ページと同様に考えると)

$$x(t) = e^{-2t}\left(C_1\cos(15t) + C_2\sin(15t)\right)$$

となる。このような式で表される運動を**減衰振動**という。右図は $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ の場合のグラフである。



一般に**抵抗係数kが正であれば減衰振動**になる。

問 正の定数 a と ω に対して微分方程式

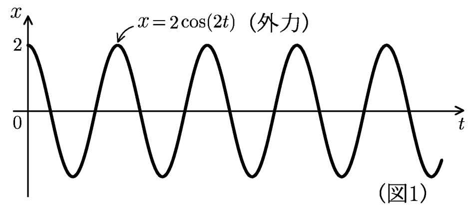
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + \omega^2)x = 0$$

の一般解を求めよ。

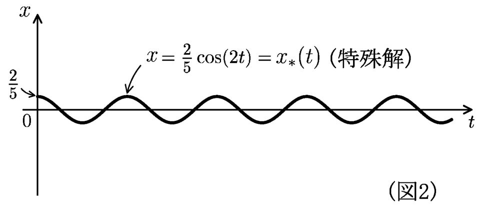
＜微分方程式の応用 4＞

前ページのばねの微分方程式 $(*)$ の外力 $F(t)$ に $\sin(2t)$ や $\cos(3t)$ のように振動する項が含まれている場合に、このような微分方程式が表す現象を**強制振動**という。

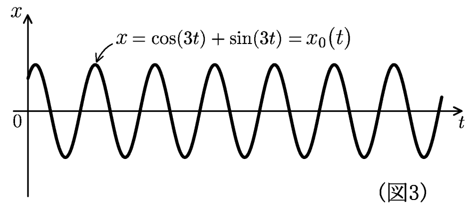
例 微分方程式



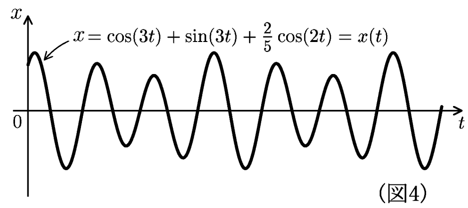
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x = 2\cos(2t) \ \cdots \ ①$$

を考える。この外力は $2\cos(2t)$ であり、そのグラフは図 1 の曲線である。35 ページと同様にして①の解を求める。

$$2\cos(2t) = e^{2ti} + e^{-2ti}$$

より

$$x_1'' + 9x_1 = e^{2ti} \text{ の特殊解は } x_1(t) = \frac{1}{5}e^{2ti}$$

$$x_2'' + 9x_2 = e^{-2ti} \text{ の特殊解は } x_2(t) = \frac{1}{5}e^{-2ti}$$

だから

$$x_*(t) = x_1(t)+x_2(t) = \frac{1}{5}\left(e^{2ti}+e^{-2ti}\right) = \frac{2}{5}\cos(2t)$$

が①の特殊解になる。x_* のグラフは図 2。
一方①の同次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x = 0 \ \cdots \ ②$$

の一般解を $x_0(t)$ とすると

$$x_0(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$$

だから①の一般解は

$$\boldsymbol{x(t) = x_0(t) + x_*(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t) + \frac{2}{5}\cos(2t)} \quad (\boldsymbol{C_1,\ C_2} \text{ **は任意定数**})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし $k,\ \omega,\ \beta$ は実数定数であり、$\omega^2 \neq \beta^2$ とする。

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = k\cos(\beta t)$　　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = k\sin(\beta t)$

＜微分方程式の応用5＞

強制振動は、ばねのような振動に外部から別の振動を与えることによって起こる。もしばね自体の振動の周期と外部の振動の周期が一致したら、合成された振動は振幅が時間とともに大きくなる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

例 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=2\cos(3t)\ \cdots\ ①$$

を考える。この外力は $2\cos(3t)$ は周期 $\frac{2\pi}{3}$ の単振動である。一方①の同次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=0\ \cdots\ ②$$

の一般解は

$$x_0(t)=C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)\ \cdots\ ②\text{の一般解}$$

となり、$x_0(t)$ も周期 $\frac{2\pi}{3}$ の単振動になる。

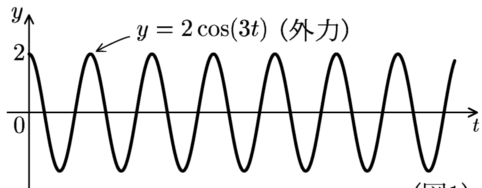
①の特殊解 $x_1(t)$ は 32 ページと同様にして

$$x_1(t)=\frac{2}{6}t\sin(3t)=\frac{t}{3}\sin(3t)\ \cdots\ ③$$

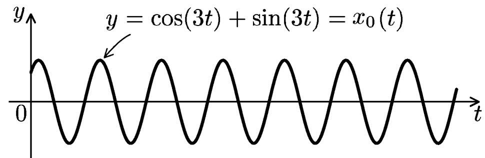
である。$x_1(t)$ のグラフは図 3 のように振動が時間とともに大きくなる。①の一般解は

$$\boldsymbol{x_1(t)+x_0(t)=\frac{t}{3}\sin(3t)+C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)}$$

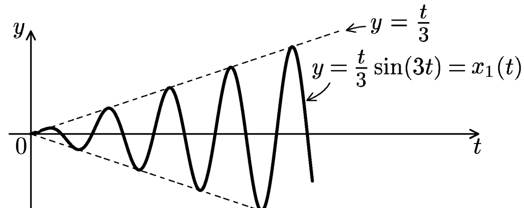
となる。図 4 は $C_1=C_2=1$ のときのグラフであり、図 2 と図 3 の振動の和である。



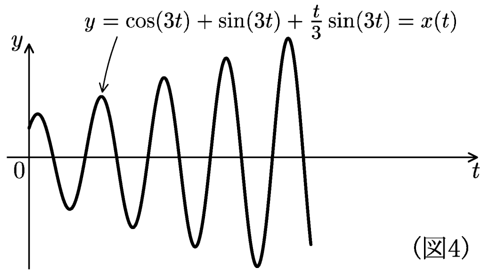
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

(注) ①の特殊解は以下のようにしても求められる。
定数 $\omega,\ k,\ \beta\ (k\neq 0,\ \omega\neq\beta)$ に対し

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=k\cos(\beta t)\ \cdots\ (*)_1$$

の一般解は $\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)+C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ である。ここで $C_1=-\frac{k}{\omega^2-\beta^2},\ C_2=0$ の場合に

$$x_\beta(t)=\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)-\frac{k}{\omega^2-\beta^2}\cos(\omega t)=\frac{k\cos(\beta t)-k\cos(\omega t)}{\omega^2-\beta^2}$$

とおいて $\beta\to\omega$ の極限を (ロピタルの定理を用いて) 求める。

$$\lim_{\beta\to\omega}x_\beta(t)=\lim_{\beta\to\omega}\frac{k\cos(\beta t)-k\cos(\omega t)}{\omega^2-\beta^2}=\lim_{\beta\to\omega}\frac{\frac{d}{d\beta}\left(k\cos(\beta t)-k\cos(\omega t)\right)}{\frac{d}{d\beta}(\omega^2-\beta^2)}=\lim_{\beta\to\omega}\frac{-kt\sin(\beta t)}{-2\beta}=\frac{kt}{2\omega}\sin(\omega t)$$

この極限値 $\frac{kt}{2\omega}\sin(\omega t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=k\cos(\omega t)\ \cdots\ (*)_2$$

の特殊解である。

問 微分方程式 $(*)_2$ の一般解を求めよ。