高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

8

内容

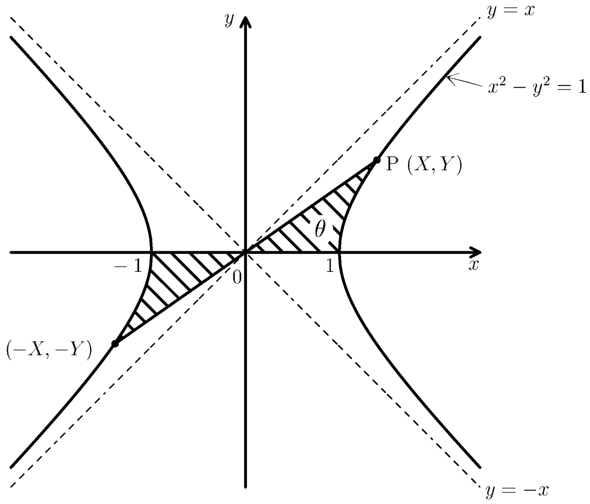
◎　複素数

◎　複素平面

◎　極形式

◎　オイラーの公式

◎　複素数値関数の微積分



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

< 有理数 >

我々が、物心がついて最初に教わる数は、物を数えるのに必要な $1, 2, 3, \cdots$ という数である。これを **自然数** といい、自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ で表す。

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

この自然数に対し、いつでも引き算ができるように
新しい数

零 : $\mathbf{0}$

および

負の整数 : $-1, -2, -3, -4, \cdots$

を導入し、自然数のことを **正の整数** ともよび、正負の整数と 0 をあわせた数を **整数** という。整数
全体を集めた集合を $\boldsymbol{Z}$ で表す。

$$\boldsymbol{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

整数 a と b に対し、一次方程式

$$ax = b$$

をみたす数 x があるものとして、新しい数

$$x = \frac{b}{a}$$

を **分数** とよぶ。このようにして得られた分数と、整数とを合わせて **有理数** とよぶ。有理数全体の集合
を $\boldsymbol{Q}$ で表す。分数は有限小数か循環小数で表される。

例 $\dfrac{3}{8} = 0.375$, $\dfrac{5}{12} = 0.41666\cdots = 0.41\dot{6}$

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{1}{8}$ (2) $\dfrac{7}{9}$ (3) $\dfrac{31}{60}$

< 実数 >

一辺 1 の正方形の対角線の長さ x は 2 次方程式

$$x^2 = 2$$

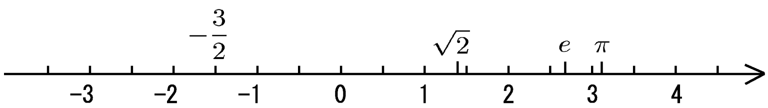
をみたすが、この式をみたす数 x は有理数ではない。この式を満足する x に相当する数も存在するものと考えて、この新しい数を

$$\sqrt{2} \quad および \quad -\sqrt{2}$$

で表す。このような数（有理数でない数 = 整数と整数の比で表されない数）を **無理数** とよび、有理数と無理数とを総称して **実数 (real number)** とよぶ。実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す。

- 実数 ($\boldsymbol{R}$)
  - 有理数 ($\boldsymbol{Q}$)
    - 整数 ($\boldsymbol{Z}$)
      - 正の整数（自然数）($\boldsymbol{N}$)
      - 零　0
      - 負の整数
    - 分数
      - 正の分数
      - 負の分数
  - 無理数
    - 正の無理数 $\cdots$ $\sqrt{2}$, π , e （自然対数の底）など
    - 負の無理数 $\cdots$ $-\sqrt{3}$, $-\sin 1$, $-\log 2$ など

これらの実数は数直線上の点によって表現される。



無理数を小数で表現すると、循環しない無限小数になる。

問　有理数と無理数を区別せよ。

(1) $5\sqrt{5}$　　(2) $\dfrac{e}{3}$　　(3) 1.01　　(4) $\tan\dfrac{\pi}{3}$　　(5) $\dfrac{11}{10}$

＜虚数の導入　１＞

２次方程式

(1) $$x^2 = -1$$

をみたす実数 x は存在しない。しかし、この方程式を満足する数、つまり２乗すれば -1 となるような新しい数があるものと考えることにして、それを $\boldsymbol{i}$ という記号で表すことにする。すなわち

$$i^2 = -1$$

である。

　さらにこの新しい数 i に対しても、いままでの計算の規則が成り立つと考えることにする。そうすれば

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

であるから

$x^2 = -1$ の解は i と $-i$ の２つである

と考えられる。

　次に２次方程式

(2) $$x^2 = -9$$

を考える。この式の両辺を 3^2 で割ると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -1$$

であるから、いま導入した i を用いて

$$\frac{x}{3} = \pm\, i$$

より (2) の解は

$$x = 3i \quad \text{および} \quad x = -3i$$

という新しい数であるとするのがいいであろう。

問　次の２次方程式の解を i を用いて表せ。

(1) $x^2 = -4$　　(2) $9x^2 = -4$　　(3)$4x^2 = -2$

＜虚数の導入　２＞

２次方程式

$$(*) \qquad x^2 - 2x + 10 = 0$$

を考える。この式の両辺から 9 を引くと

$$x^2 - 2x + 1 = -9$$

$$(x-1)^2 = -9$$

となる。ここで

$$x - 1 = X$$

とおくと

$$X^2 = -9$$

となるから、前ページの i を用いて

$$X = 3i \quad \text{および} \quad X = -3i$$

すなわち

$$x - 1 = 3i \quad \text{および} \quad x - 1 = -3i$$

より $(*)$ 式の解は、新しい数

$$x = 1 + 3i \quad \text{および} \quad x = 1 - 3i$$

であると考えるのがいいであろう。
このような数

$$i, \ -i, \ 3i, \ -3i, \ 1+3i, \ 1-3i$$

等を総称して **虚数** と呼ぶ。２次方程式の解の範囲を
虚数にまで拡張すれば、２次方程式は必ず解が存在
する。

問　次の２次方程式の解を i を用いて表せ。（ただし $a, \ b, \ c$ は実数）

(1) $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 = -3$

(2) $x^2 - 2x + 3 = 0$

(3) $(x-a)^2 = -\dfrac{c^2}{b^2}$

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。（電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。）

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** ($complex\ number$) とよび、複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** ($real\ part$) および **虚部** ($imaginary\ part$) とよび、

$$a = \mathrm{Re}(z)\ ,\ b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0\ \text{のとき}\quad z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、 z を **虚数** とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\text{複素数}(\boldsymbol{C})\begin{cases} \text{実数}(\boldsymbol{R}) \\ \text{虚数}\begin{cases} \text{純虚数} & \cdots\ 2i\ ,\ \frac{1}{3}i\ ,\ -\sqrt{2}i\ \text{など} \\ \text{その他の虚数} & \cdots\ 1+2i\ ,\ -2+\sqrt{3}i\ \text{など} \end{cases} \end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c\ \text{かつ}\ b = d$$

$$\text{とくに}\quad a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

例　(1) $a + bi = \sqrt{3} \ \Leftrightarrow\ a = \sqrt{3},\quad b = 0$

(2) $a + bi = -3i \ \Leftrightarrow\ a = 0,\quad b = -3$

(3) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \ \Leftrightarrow\ a = \dfrac{1}{2},\quad b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問　次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1) $a + bi = \dfrac{2 + 3i}{5}$　　　　(2) $a + bi = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{3}$

＜複素数の四則演算　１＞

複素数の和（差）は実部どうしの和（差）と虚部どうしの和（差）にわけて計算すればよい。

> a, b, c, d が実数のとき
> $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
> $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

例１　$(2+3i)+(4+5i)=(2+4)+(3+5)i=6+8i$
$(5+7i)-(8+i)=(5-8)+(7-1)i=-3+6i$

問１　次式を簡単にせよ。

(1)　$(1+i)+(1-3i)$

$=$

(2)　$(3-2i)+(2+2i)$

$=$

(3)　$\left(0.5+\dfrac{1}{2}i\right)+\left(\dfrac{1}{4}+0.5i\right)$

$=$

(4)　$\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}i\right)-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}i\right)$

$=$

(5)　$\left(\sqrt{2}-i\right)-\left(\sqrt{3}+2i\right)$

$=$

(6)　$\left(\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}i\right)-\left(\dfrac{1}{5}-\sqrt{3}i\right)$

$=$

複素数の実数倍は、実部と虚部のそれぞれの実数倍となる。

> a, b, k が実数のとき
> $k(a+bi)=(ka)+(kb)i$

例２　$2(1+4i)+5(3-2i)=(2+8i)+(15-10i)=17-2i$

問２　次式を簡単にせよ。

(1)　$2(3+2i)$

$=$

(2)　$\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$=$

(3)　$4(1-3i)+2(2+2i)$

$=$

(4)　$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)-\left(2+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=$

＜ 複素数の四則演算　2 ＞

複素数どうしの積は通常の計算規則（分配法則）によって計算すればよいが、i^2 が出たところで $i^2 = -1$ とおきかえて答を出す。

例

(1)
$$\begin{aligned}(3+4i)(5+7i) &= 3\times 5 + 3\times 7i + 4i\times 5 + 4i\times 7i \\ &= 15 + 21i + 20i + 28i^2 \\ &= 15 + 41i - 28 \\ &= -13 + 41i\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(3+5i)^2 &= 3^2 + 2\times 3\times 5i + (5i)^2 \\ &= 9 + 30i + 25i^2 \\ &= 9 + 30i - 25 \\ &= -14 + 30i\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(2+5i)^3 &= 2^3 + 3\times 2^2\times 5i + 3\times 2\times (5i)^2 + (5i)^3 \\ &= 8 + 60i + 150i^2 + 125i^3 \\ &= 8 + 60i - 150 + 125(i^2\times i) \\ &= -142 + 60i - 125i \\ &= -142 - 65i\end{aligned}$$

問　次式を簡単にせよ。

(1)　$i^3 =$　　(2)　$i^4 =$　　(3)　$i^5 =$

(4)　$i^6 =$　　(5)　$i^7 =$　　(6)　$i^8 =$

(7)　$(1+i)(1-i) =$　　(8)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i) =$

(9)　$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{3}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}\right) =$　　(10)　$(2+i)^2 =$

(11)　$(1-i)^2 =$　　(12)　$(1+2i)(3-3i) =$

(13)　$(4-3i)(3-i) =$　　(14)　$(3+i)^3 =$

＜ 複素数の四則演算　3 ＞

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

例

(1) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{1\times i}{i\times i}=\dfrac{i}{-1}=-i$

(2) $\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{1\times(2-3i)}{(2+3i)\times(2-3i)}=\dfrac{2-3i}{4-(3i)^2}=\dfrac{2-3i}{4+9}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

(3) $\dfrac{2+i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{(2+i)\times(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)\times(1+\sqrt{3}i)}=\dfrac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$

$=\dfrac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}+\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}\right)i$

問　次式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{1+i}=$

(2) $\dfrac{1}{1-i}=$

(3) $\dfrac{i}{1-i}=$

(4) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}=$

(5) $\dfrac{1}{2+i}=$

(6) $\dfrac{3}{3+3i}=$

(7) $\dfrac{1}{i(i+1)}=$

(8) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i}=$

(9) $\dfrac{1}{(1+i)^2}=$

(10) $\dfrac{i}{(1-i)^2}=$

＜負の数の平方根＞

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}i)^2 = -2\ , \quad (-\sqrt{2}i)^2 = -2$$

となるから、 -2 の平方根は $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\ , \quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}i$$

のように表すことにする。一般に

$$\boxed{a > 0 \text{ のとき } \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i}$$

と定める。

例１　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

（注）　$\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)}\ \ (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになるときは、普通の $\sqrt{\ }$ の計算規則がなりたたない。 $\sqrt{\ }$ の中がマイナスになる場合は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例２　$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2 \times i}{3i \times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}i = \frac{2}{3}i$$

従って　$\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\dfrac{4}{-9}}$ である。

問　次式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{(-2) \times (-4) \times (-3)}$

(2)　$\sqrt{-2} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-3}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}$

(4)　$\sqrt{\dfrac{5}{-2}}$

＜２次方程式＞

実数 a, b, c $(a \neq 0)$ に対し、２次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

が求まる。ここで $\sqrt{}$ の中がマイナスになれば、答は虚数になる。

虚数解も２次方程式の解と考えると、２次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例　２次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問　次の２次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)　$x^2 + 2x + 1 = 0$　　　$x =$

(2)　$x^2 + x + 1 = 0$　　　$x =$

(3)　$2x^2 - 5x + 6 = 0$　　　$x =$

$<$ 因数分解 1$>$

例1　2 次式 $2x^2-16x+30$ を因数分解すると

$(*)\quad 2x^2-16x+30=2(x^2-8x+15)=2(x-3)(x-5)$

となる。ところで 2 次方程式

$$(**)\qquad 2x^2-16x+30=0$$

の解は前ページの解の公式を使うと

$$x=3\quad \text{および}\quad x=5$$

であるから、因数分解 $(*)$ を求めるために、2 次方程式 $(**)$ の解 3 と 5 を用いればよい。

一般に、2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a,b,c\ \text{は実数}\ ,a\neq 0)$$

の解が

$$x=\alpha\quad \text{および}\quad x=\beta$$

ならば

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

と因数分解できる。

例2　2 次方程式

$$3x^2+5x+7=0$$

の解は解の公式を使うと

$$x=-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{59}}{6}i\quad \text{および}\quad x=-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{59}}{6}i$$

であるから

$$3x^2+5x+7=3\left(x-\left(-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\right)$$

$$=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{59}}{6}i\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{59}}{6}i\right)$$

問　次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　$3x^2+12x+9\ =\ 0$

(2)　$2x^2+3x+1\ =\ 0$

(3)　$4x^2+4x+4\ =\ 0$

＜因数分解２＞

例１　３次式 x^3-8 は因数分解の公式

$$\boxed{\begin{aligned} x^3-a^3&=(x-a)(x^2+ax+a^2) \\ x^3+a^3&=(x+a)(x^2-ax+a^2) \end{aligned}}$$

によって

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

と因数分解できるが、

$$x^2+2x+4=0$$

の解が、解の公式より

$$x=-1\pm\sqrt{3}i$$

であるから、

$$x^2+2x+4=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$$

と因数分解できるから、複素数の範囲では

$$x^3-8=(x-2)(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$$

まで因数分解できる。

例２　４次式 x^4-16 は、実数の範囲では

$$\begin{aligned} x^4-16&=(x^2)^2-(4)^2=(x^2-4)(x^2+4) \\ &=(x-2)(x+2)(x^2+4) \end{aligned}$$

のように因数分解できるが、複素数の範囲では

$$x^4-16=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$$

まで因数分解できる。

問　次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　x^3+8

(2)　x^3-64

(3)　x^4-81

＜高次方程式＞

例１　３次方程式

(1) $$x^3 - 8 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^3 - 8 = (x-2)(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i) = 0$$

より

$$x-2=0\ ,\quad x+1-\sqrt{3}i=0\ ,\quad x+1+\sqrt{3}i=0$$

のいずれかであるから、(1) の解は（複素数の範囲では）

$$x=2\ ,\ x=-1+\sqrt{3}i\ ,\ x=-1-\sqrt{3}i$$

となる。

例２　４次方程式

(2) $$x^4 - 16 = 0$$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i) = 0$$

より

$$x-2=0\ ,\ x+2=0\ ,\ x-2i=0\ ,\ x+2i=0$$

のいずれかであるから、(2) の解は（複素数の範囲では）

$$x=2\ ,\quad x=-2\ ,\quad x=2i\ ,\quad x=-2i$$

となる。

一般に n 次式は、複素数の範囲では、n 個の一次式の積に因数分解される。（代数学の基本定理）

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$= a_n(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n) \qquad (z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ は複素数})$$

問　次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1)　$x^3 + 8 = 0$

(2)　$x^3 - 64 = 0$

(3)　$x^4 - 81 = 0$

< 共役複素数 >

$$3+2i \text{ と } 3-2i\ , \qquad 1-\sqrt{3}i \text{ と } 1+\sqrt{3}i$$

のように、虚部の符号だけが違う２つの複素数を **互いに共役**（きょうやく）という。一方は他方の **共役複素数** という。複素数 z の共役複素数を $\overline{z}$ で表す。すなわち、実数 a, b に対し、

$$\boxed{z = a+bi \quad \text{のとき} \quad \overline{z} = a-bi}$$

である。従って $\overline{z}$ の共役複素数は $\overline{\overline{z}} = a+bi$ であるから

$$\overline{\overline{z}} = z$$

である。

例 (1) $\overline{2+3i} = 2-3i$, $\overline{(-1-\sqrt{2}i)} = -1+\sqrt{2}i$

(2) $\overline{4} = 4$, $\overline{(-5i)} = 5i$

(3) $z = 3+2i$ のとき $\overline{z} = 3-2i$

$z + \overline{z} = (3+2i) + (3-2i) = 6$

$z\overline{z} = (3+2i)(3-2i) = 3^2 + 2^2 = 13$

問 1 以下の複素数 z に対し、共役複素数 $\overline{z}$ を求めよ。

(1) $z = 1$, $\overline{z} =$　　　(2) $z = i$, $\overline{z} =$

(3) $z = 2-5i$, $\overline{z} =$　　　(4) $z = \dfrac{1-i}{2}$, $\overline{z} =$

問 2 $z = 2+3i$ に対し、次式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　$=$　　　$=$

問 3 実数 a, b に対し、$z = a+bi$ とする。以下の値を a と b で表せ。

(1) $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$　　　(2) $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$　　　(3) $z\overline{z}$

$=$　　　$=$　　　$=$

＜絶対値＞

複素数 $z=a+bi$（ a,b は実数）に対し、

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

を z の **絶対値** という。

例１　$z=3+2i$ のとき

$$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

問１　複素数 z が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z=-2$　　(2) $z=3i$　　(3) $z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$|z|=$　　$|z|=$　　$|z|=$

前ページの結果より複素数 $z=a+bi$ に対して

$$\boxed{z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2}$$

が成り立つ。

例２　$z=2+3i$ のとき

$$|z|^2=2^2+3^2=13$$

$$z^2=(2+3i)^2=2^2+2\times2\times3i-3^2=-5+12i$$

$$|z^2|=\sqrt{(-5)^2+(12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

問２　以下の複素数 z に対して、 $|z|^2, z^2, |z^2|$ を求めよ。

(1)　$z=1+i$

$|z|^2=$

$z^2\ =$

$|z^2|=$

(2)　$z=2-3i$

$|z|^2=$

$z^2\ =$

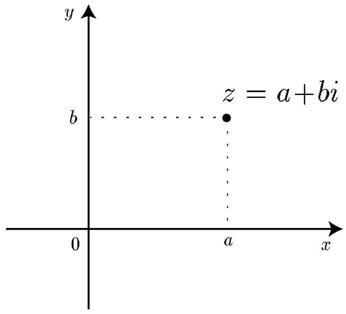
$|z^2|=$

< 複素平面１ >

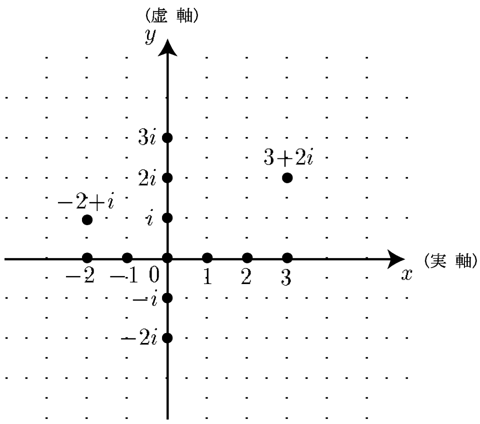
定数が数直線上の点で表されたように、複素数を平面上の点として表現する。実数 a, b に対し、複素数

$$z = a + bi$$

を、右図のように、 x 軸上の目もりが a, y 軸上の目もりが b である xy 平面上の点として表す。この平面を **複素平面** または **ガウス平面** という。



例１　右図のように
　実数 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ は全て x 軸上に並んでいる。この x 軸を **実軸** という。
純虚数 $-2i, -i, i, 2i, 3i$ は全て y 軸上に並んでいる。この y 軸を **虚軸** という。



問１　例１の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

(1) $1 + i$,　　(2) $-2 - i$,　　(3) $2 - 2i$,　　(4) $-1 + 3i$

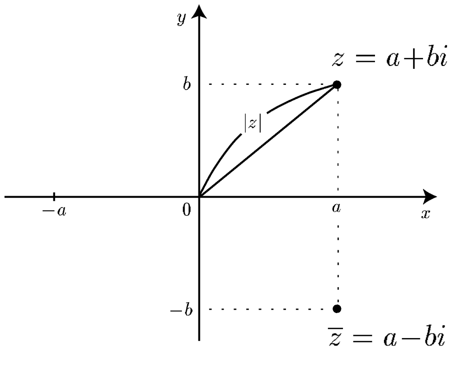
例２　a, b を正の数とすると複素数 $z = a + bi$ は右図の位置にあり、共役複素数

$$\overline{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。
また、絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。



問２　例２の右図上に $-z$ および $-\overline{z}$ を図示せよ。

< 複素平面2 >

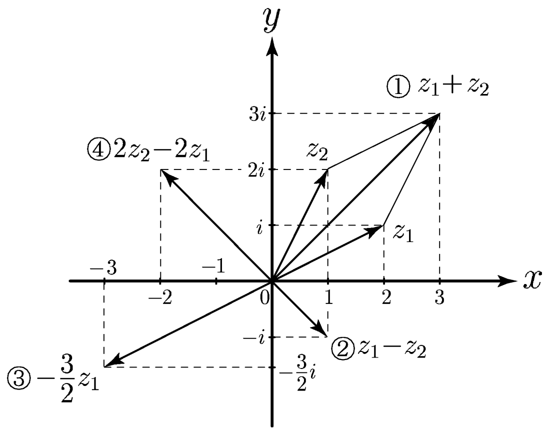
例 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$
のとき以下の複素数

① $z_1 + z_2 = 3 + 3i$

② $z_1 - z_2 = 1 - i$

③ $-\dfrac{3}{2}z_1 = -3 - \dfrac{3}{2}i$

④ $2z_2 - 2z_1 = (2 + 4i) - (4 + 2i)$
$= -2 + 2i$



を複素平面上に表すと右図のようになる。
①は z_1 と z_2 の和である。右図から四点 (原点 , z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$)
を結ぶと平行四辺形になる。
③は z_1 の $-\dfrac{3}{2}$ 倍である。z_1 と原点を結ぶ直線上に $-\dfrac{3}{2}z_1$ がある。

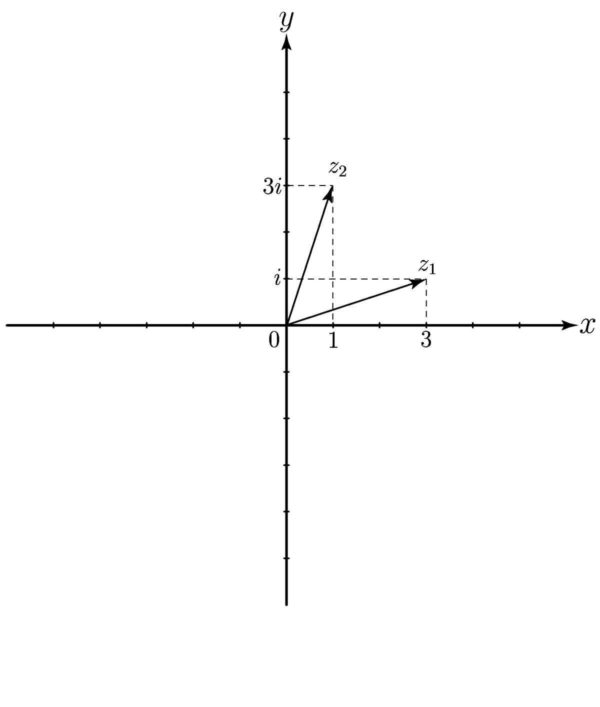
問 $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 + 3i$
のとき以下の複素数を
計算し、例のように
複素平面上に図示せよ。

① $z_1 + z_2 =$

② $z_1 - z_2 =$

③ $-\dfrac{3}{2}z_1 =$

④ $2z_2 - 2z_1 =$



＜複素数の i 倍＞

複素数の和・差・実数倍はベクトルと同じであるが、複素数倍は別の図形的な意味がある。一般の場合は後で説明するが、このページでは i 倍の図形的な意味を考える。

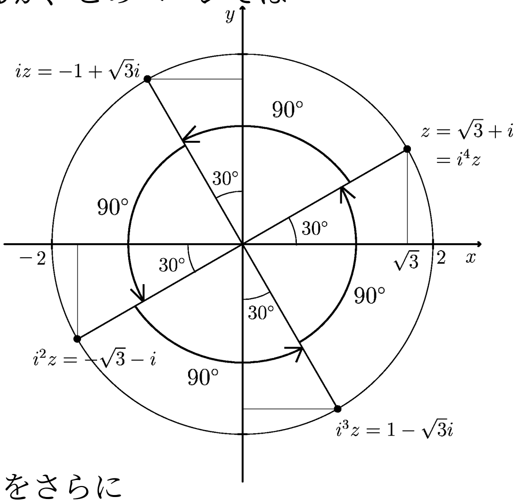
例　$z=\sqrt{3}+i$ に対し

$$iz=i(\sqrt{3}+i)=-1+\sqrt{3}i$$

$$i^2z=i(iz)=i(-1+\sqrt{3}i)=-\sqrt{3}-i$$

$$i^3z=i(i^2z)=i(-\sqrt{3}-i)=1-\sqrt{3}i$$

$$i^4z=i(i^3z)=i(1-\sqrt{3}i)=\sqrt{3}+i=z$$



右図より iz は z を原点を中心として反時計まわりに $90°$ 回転させたものであり、i^2 は iz をさらに $90°$ 回転させたものであり、i^3z は i^2z をさらに $90°$ 回転させたものであり、i^4z は i^3z をさらに $90°$ 回転させたものであるからもとの z にもどる。

問　z が以下の場合に

iz , i^2z , i^3z , i^4z

を求め、右図に記入せよ。

(1) $z=1+i$

$iz=$

$i^2z=$

$i^3z=$

$i^4z=$

(2) $z=1+\sqrt{3}i$

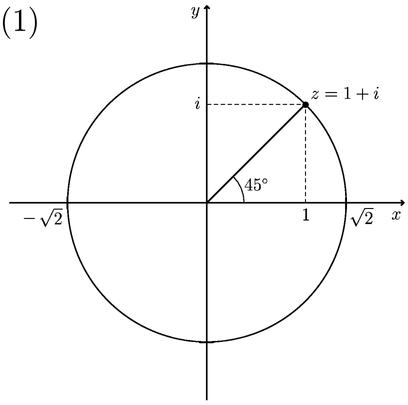
$iz=$

$i^2z=$

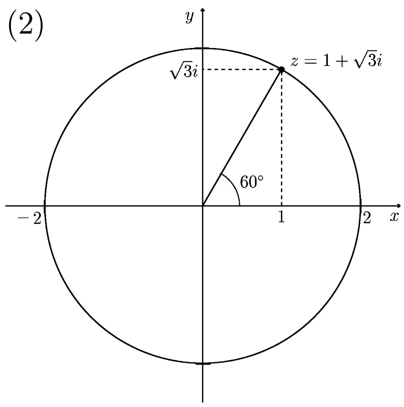
$i^3z=$

$i^4z=$

(1)



(2)



＜絶対値1の複素数＞

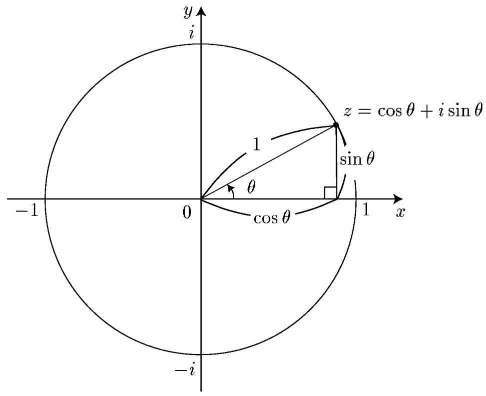
複素数 z の絶対値が 1, つまり

$$|z| = 1$$

であるとき、 z は複素平面の中では、原点 O からの距離が 1 の単位円周上にある。今、右図のように実軸（ x 軸）の正の部分からの角度が θ であるとき、z は

$$\boxed{z = \cos\theta + i\sin\theta}$$

と表される。



例 (1) $\theta = 0$ のとき $\cos 0 + i\sin 0 = 1$

(2) $\theta = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$

(3) $\theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

問 次の三角関数で表されている複素数を簡単にせよ。

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, (2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, (3) $\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$=$　　　$=$　　　$=$

(4) $\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$, (5) $\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$, (6) $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$=$　　　$=$　　　$=$

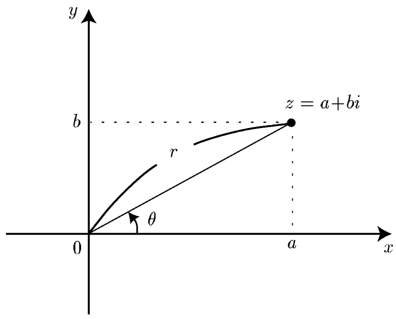
(7) $\cos\left(\dfrac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)$, (8) $\cos\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)$, (9) $\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$=$　　　$=$　　　$=$

(10) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$, (11) $\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)$, (12) $\cos\left(\dfrac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{11}{6}\pi\right)$

$=$　　　$=$　　　$=$

＜ 極形式１ ＞



複素数 $z=a+bi$ に対し、

$$|z|=r$$

で、右図のように x 軸の正の部分からの角度が θ であるとき

$$a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$$

となる。従って

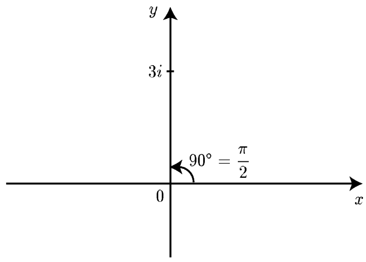
$$\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)} \quad \text{（極形式）}$$

と表される。これを z の **極形式** という。このとき角 θ は複素数 z の **偏角** といい、

$$\boxed{\theta=\arg(z)}$$

という記号を使うこともある。

例 (1) $z=3i$ のとき右図より

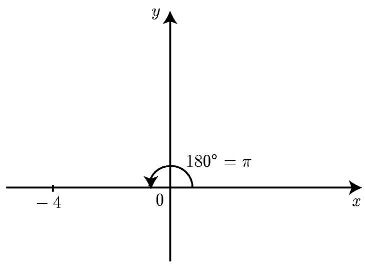


$$r=|z|=3,\ \theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(2) $z=-4$ のとき右図より



$$r=|z|=4,\ \theta=180^\circ=\pi$$

だから

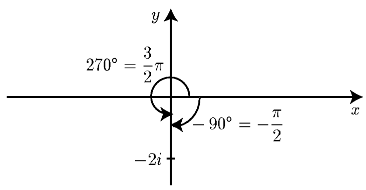
$$-4=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

(3) $z=-2i$ のとき右図より

$$r=|z|=2,\ \theta=270^\circ=\frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i=2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$



（注）270° の位置と -90° の位置は同じだから　$-2i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ としてもよい。

問　次の複素数を極形式になおせ。

(1)　$-i$　　(2)　-2　　(3)　$-\sqrt{2}i$

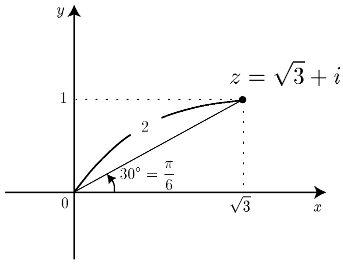
＜極形式２＞

例 (1) $z=\sqrt{3}+i$ に対し、

$$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

であり、右図より $\theta=30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$ だから

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

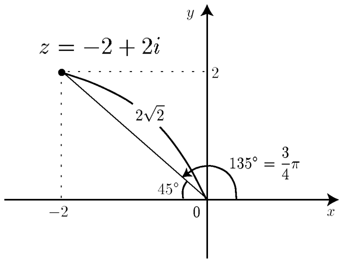


(2) $z=-2+2i$ に対し、

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

であり、右図より $\theta=135^\circ=\dfrac{3}{4}\pi$ だから

$$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

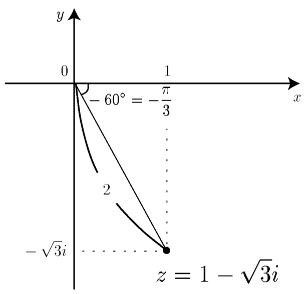


(3) $z=1-\sqrt{3}i$ に対し、

$$r=|z|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

であり、右図より $\theta=-60^\circ=-\dfrac{\pi}{3}$ だから

$$1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$



問　以下の複素数を極形式になおせ。

(1) $z=2\sqrt{3}-2i=$

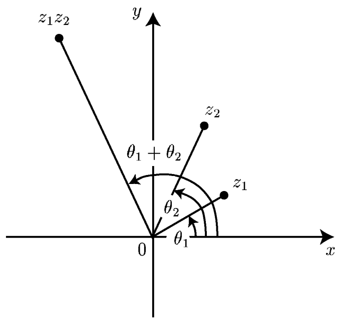
(2) $z=1+i=$

(3) $z=-1+i=$

(4) $z=4-4\sqrt{3}i=$

(5) $z=-2-2\sqrt{3}i=$

< 複素数の積 >



2 つの複素数 z_1, z_2 が極形式で

$$z_1 = r_1\left(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right)$$

と表されているとき、積 z_1z_2 は

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2\left\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right\}\\ &= r_1r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}\end{aligned}$$

となる。従って

$$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}}$$

（注）上の計算で三角関数の加法定理

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

を用いた。

例　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

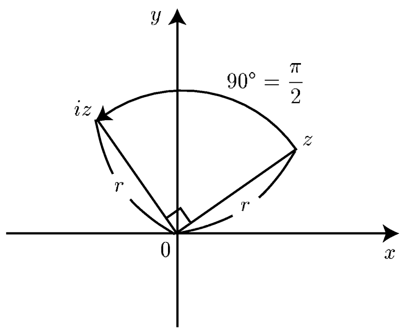
に

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

をかけると、上の式より

$$iz = r\left(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta+\frac{\pi}{2})\right)$$

より、右図のように、iz は z を原点を中心として反時計まわりに $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にある。

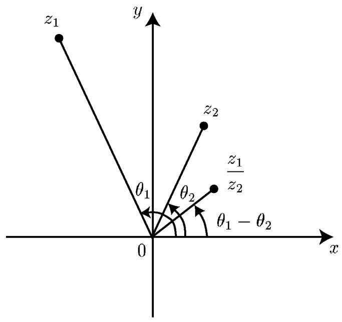


問　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対して、以下の複素数の積を極形式で表し、回転の角度を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)z$　　(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}i}\right)z$　　(3) iz

$=$　　　　$=$　　　　$=$

＜複素数の商＞



$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdots(1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots(2)$$

に対し、

$$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおくと

$$z_1 = \frac{z_1}{z_2}\times z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)\times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

より

$$z_1 = rr_2\left(\cos(\theta+\theta_2) + i\sin(\theta+\theta_2)\right)$$

(1) 式と比較すれば

$$r_1 = rr_2,\ \theta_1 = \theta + \theta_2$$

だから

$$r = \frac{r_1}{r_2},\ \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\Big)}$$

例 $z_1 = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

より

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$$

問 次の複素数の商を極形式で表せ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} =$

(2) $\dfrac{1+i}{1-i} =$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i} =$

＜ド・モアブルの定理＞

複素数の積で

$r_1\big(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\big)\times r_2\big(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\big)=r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)$

であった。とくに $r_1=r_2=1$ のときは

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times(\cos\theta_2+i\ \sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

となる。ここで $\theta_1=\theta_2=\theta$ とすれば

(1) $\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)^2=\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)\times\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

又、$\theta_1=2\theta$, $\theta_2=\theta$ とすれば

(2) $\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)^3=\big(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)\big)\times\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$

(1) と (2) を一般化すると、

$$\boxed{\big(\cos\theta+i\sin\theta\big)^n\ =\ \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$$ (ド･モアブルの定理)

が任意の自然数 n に対して成立する。この公式を **ド・モアブルの定理** という。

例 $\sqrt{3}+i=2\Big(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\Big)$ だから

$$\big(\sqrt{3}+i\big)^6=2^6\times\Big(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\Big)^6=64\times\big(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\big)=-64$$

問 次の計算をせよ。

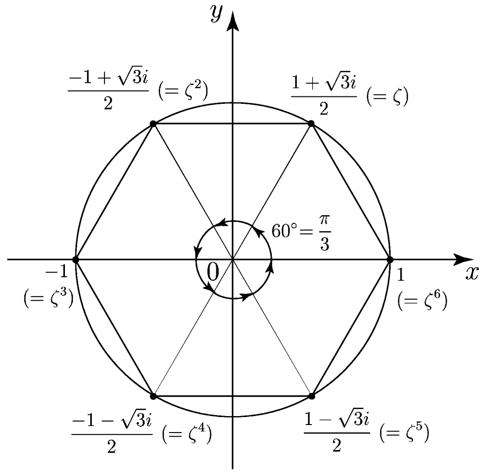
(1) $\Big(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\Big)^3=$

(2) $\Big(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\Big)^6=$

(3) $\big(-1-i\big)^8=$

(4) $\Big(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\Big)^6=$

＜1の累乗根＞



例題

$$z^6 = 1$$

をみたす複素数zをすべて求めよ。

(解)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$z^6 = r^6\big(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)\big)$$

となる。一方1を極形式で表すと

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \cos(4\pi) + i\sin(4\pi) = \cdots$$

となる。z^6 と等しいから

$$z^6 = r^6\big(\cos(6\theta) + i\sin(6\theta)\big) = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

よって

$$r = 1\ ,\quad 6\theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。

$n=0$ のとき　$6\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$n=1$ のとき　$6\theta = 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n=2$ のとき　$6\theta = 4\pi \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n=3$ のとき　$6\theta = 6\pi \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$n=4$ のとき　$6\theta = 8\pi \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$n=5$ のとき　$6\theta = 10\pi \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow z = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6次方程式の解は7個以上はないから、これがすべての解である。

(答) $z = 1\ ,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\ ,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\ ,\ -1\ ,\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\ ,\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(注)　$\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\big(= \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\big)$ とすると、$z^6 = 1$ の解は

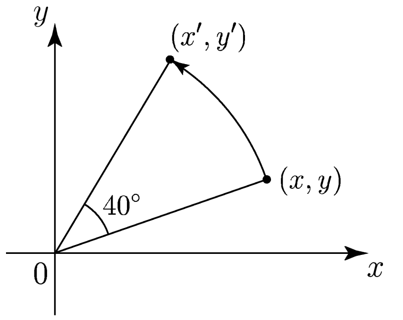
$$z = 1\ ,\ \zeta\ ,\ \zeta^2\ ,\ \zeta^3\ ,\ \zeta^4\ ,\ \zeta^5$$

となっている。複素平面上では、単位円周を6等分する分点である。
(右上図参照)

問　次の方程式をみたす複素数zを全て求め、上図のように単位円周上の点として図示せよ。

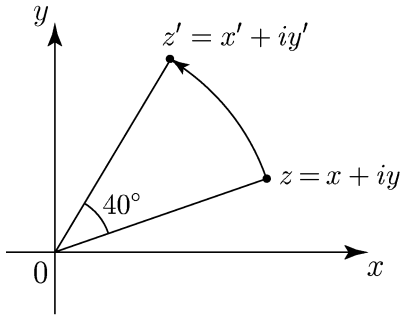
(1) $z^3 = 1$　　(2) $z^4 = 1$　　(3) $z^8 = 1$

＜平面上の回転移動＞



例　平面上の点 (x, y) を原点を中心として反時計まわりに角度 $40°$ だけ回転させた点を (x', y') とする。(x', y') を (x, y) で表したい。

この問題は下図のように、複素平面上で考えても同じである。複素数 $z = x + iy$ を同様に $40°$ だけ回転させた点を表す複素数が $z' = x' + iy'$ である。z' は z に偏角 $40°$ で絶対値 1 の複素数をかけたものであるから



$$z' = z \times (\cos 40° + i \sin 40°)$$

となる。従って

$$x'+iy' = (x+iy)(\cos 40°+i\sin 40°) = (x\cos 40°-y\sin 40°)+i(x\sin 40°+y\cos 40°)$$

であるから

$$\begin{cases} x' = x\cos 40° - y\sin 40° \\ y' = x\sin 40° + y\cos 40° \end{cases}$$

が求まる。

問　上の例で回転する角度が以下の場合に、x', y' を x と y で表せ。

(1) 角度 $\dfrac{\pi}{2}$　,　(2) 角度 $\dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

(3) 角度 $\dfrac{\pi}{4}$　,　(4) 角度 θ

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

＜オイラーの公式１＞

指数関数・三角関数のマクローリン展開（ワークブック７）
を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \qquad (3)$$

であった。ここで x は実数である。これを虚数まで拡張したい。
実数 y と虚数単位 i に対し、(1) 式の x のかわりに iy を代入
すれば、$i^2 = -1$ だから

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \qquad (y \text{ は実数})$$

が成立する。これを**オイラーの公式**という。

例 $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

問 次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{0i} =$

(2) $e^{\pi i} =$

(3) $e^{\frac{2}{3}\pi i} =$

(4) $e^{\frac{3}{2}\pi i} =$

(5) $e^{-\frac{\pi}{4}i} =$

(6) $e^{-\frac{5}{2}\pi i} =$

＜オイラーの公式２＞

複素数 z に対し、e の z 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \qquad (= \exp(z))$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。

今　$z = x + iy$ (x, y は実数) のとき、(詳しい計算は省略するが)

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \times \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)} \qquad (\ x \text{ と } y \text{ は実数}\ )$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

例　(1) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$

(2) $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = e^{-3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{1}{e^3}i$

(3) $e^{\log 2+\frac{\pi}{6}i} = e^{\log 2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

(注)　$\log 2$ は底が e の対数（=自然対数）であるから、対数の定義より

$$x = \log 2 = \log_e 2 \Longleftrightarrow e^x = 2$$

よって

$$e^{\log 2} = e^x = 2$$

問　以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$　　(2) $e^{0+\pi i}$

(3) $e^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\pi i}$　　(4) $e^{2-\frac{2}{3}\pi i}$

(5) $e^{\frac{1}{2}\log 4+\frac{\pi}{3}i}$　　(6) $e^{\log 2+\frac{\pi}{4}i}$

＜複素数の指数表示＞

複素数 z の絶対値が r、偏角が θ のとき、z は極形式によって

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される。一方

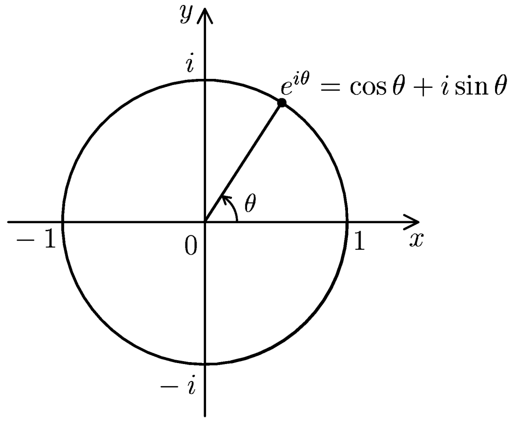
$$r = e^{\log r} \quad , \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

であるから

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\log r} \times e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

と指数表示できる。特に $r=1$ のとき $\log 1 = 0$ より

$$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$



となる。このように絶対値が 1 の
複素数は指数表示の方が簡単である。

例 1 ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

を指数表示で書くと、

$$\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}} \qquad \text{(ド・モアブルの定理)}$$

と簡単に書ける。

問 1 絶対値が 1、偏角が θ_1 と θ_2 の複素数の積は、22 ページより

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

となる。この式を指数表示で書け。

例 2 $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $e^{\frac{2}{3}\pi i} \times e^{\frac{1}{3}\pi i} =$

(2) $e^{\frac{5}{6}\pi i} \div e^{\frac{1}{3}\pi i} =$

(3) $\left(e^{\frac{\pi}{5}i}\right)^5 =$

(4) $\left(e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^6 =$

＜指数法則＞

２つの複素数

$z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ （x_1 ，y_1 ，x_2 ，y_2 は実数)

に対し、

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = (e^{x_1} \times e^{iy_1}) \times (e^{x_2} \times e^{iy_2}) = (e^{x_1} \times e^{x_2}) \times (e^{iy_1} \times e^{iy_2})$$
$$= e^{x_1+x_2} \times e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

である。同様に計算すると、以下の指数法則が導ける。

(1) $e^{z_1}\ e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$	(2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\boxed{}}$
(3) $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{\boxed{}}$ （ド・モアブルの定理）	$\left(\begin{array}{c} z_1\ ,\ z_2\ ,\ z \text{ は複素数} \\ n \text{ は整数} \end{array}\right)$

問１　上の $\boxed{}$ 内に適当な式を記入せよ。

例１　$e^{2+3i} \times e^{2-3i} = e^{4}$ ，　$e^{4+\pi i} \div e^{3-\pi i} = e^{1+2\pi i} = e$

$$\left(e^{1+\frac{\pi}{6}}\right)^{8} = e^{8+\frac{4}{3}\pi i} = e^{8}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = e^{8}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

問２　次式の計算せよ。

(1) $e^{2+3\pi i} \times e^{1-3\pi i}$　　(2) $e^{-2-\frac{\pi}{3}i} \div e^{-3-\frac{\pi}{3}i}$

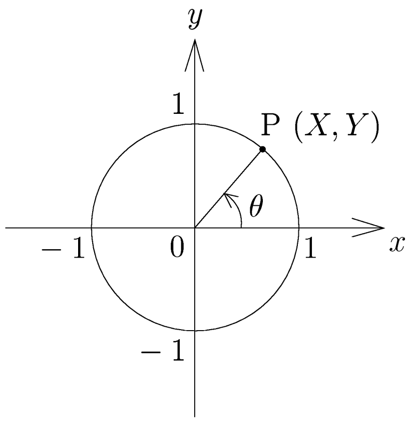
(3) $\left(e^{\frac{3}{5}+\frac{\pi}{6}i}\right)^{5}$

例２
$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{8}}{(1+i)^{6}} = \frac{(2e^{\frac{\pi}{6}i})^{8}}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^{6}} = \frac{2^{8}e^{\frac{8}{6}\pi i}}{\left(\sqrt{2}\right)^{6}e^{\frac{6}{4}\pi i}} = \frac{2^{8}}{2^{3}} \times \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{3}{2}\pi i}}$$
$$= 2^{8-3} \times e^{\frac{4}{3}\pi i - \frac{3}{2}\pi i} = 2^{5} \times e^{-\frac{\pi}{6}i}$$
$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 16\sqrt{3} - 16i$$

問３　次式を計算せよ。

$$\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{7}}{\left(1-i\right)^{6}}$$

＜円関数＞



右図において、単位円周上の点 P の座標を (X, Y) とすると。

$$(*) \quad \boxed{X = \cos\theta, \quad Y = \sin\theta, \quad \frac{Y}{X} = \tan\theta}$$

の関係がある。この意味で三角関数を**円関数**ともいう。オイラーの公式より

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

であるから、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

となる。そこで一般の複素数 z に対し、

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}}$$

と定め、複素変数三角関数（複素変数円関数）という。

例 $\sin(i\theta) = \dfrac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \dfrac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \left(\dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) i$

$$(\sin z)^2 = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4i^2} = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}$$

問１　次の関数を（例のように）指数で表せ。

(1) $\cos(i\theta)$

$=$

(2) $(\cos z)^2$

$=$

問２　次式を簡単にせよ。

(1) $\cos(-iz) + i\sin(-iz)$

$=$

(2) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2$

$=$

< 双曲線関数 >

複素数 z に対し

$$\boxed{\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad , \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}}$$

をそれぞれ ハイパボリックコサイン (*hyperbolic cosine*)、ハイパボリックサイン (*hyperbolic sine*)、ハイパボリックタンジェント (*hyperbolic tangent*) とよび、これらを総称して**双曲線関数** (*hyperbolic function*)
という。

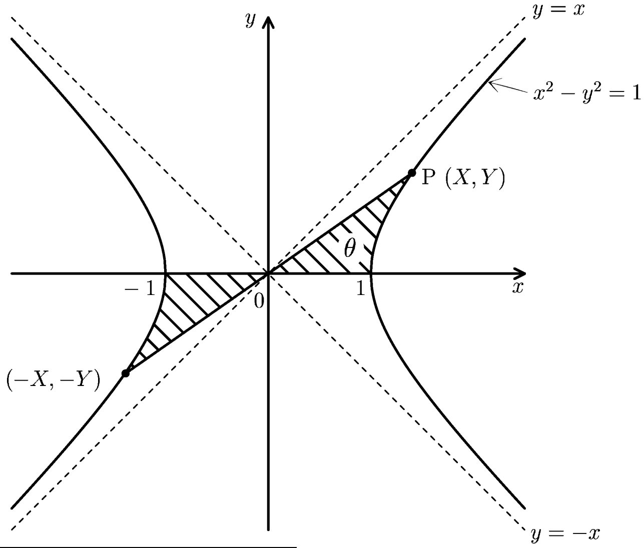
この呼び名の由来は以下の図形的意味による。右図の双曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

上の点 $\mathrm{P}(X, Y)$ に対し、斜線部分の面積を θ とすれば

$$X = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad , Y = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

が成り立つ（計算略)。この式から前ページの $(*)$ と同様な関係式



$$(**) \qquad \boxed{X = \cosh(\theta) \quad , \ Y = \sinh(\theta) \quad , \ \frac{Y}{X} = \tanh(\theta)}$$

が成立することがわかる。これが双曲線関数の由来である。

例 (1) $\sinh(i\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \times \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = i \sin(\theta)$

(2) $\cosh(a + bi) + \cosh(a - bi) + \sinh(a + bi) + \sinh(a - bi)$

$$= \frac{e^{a+bi} + e^{-a-bi}}{2} + \frac{e^{a-bi} + e^{-a+bi}}{2} + \frac{e^{a+bi} - e^{-a-bi}}{2} + \frac{e^{a-bi} - e^{-a+bi}}{2}$$

$$= e^{a+bi} + e^{a-bi} = e^a(e^{bi} + e^{-bi}) = 2e^a \cos(b)$$

問 次式を三角関数および指数関数を用いて表せ。

(1) $\cosh(i\theta) =$ (2) $\cosh(z) + \sinh(z) =$

(3) $\cosh(a + bi) - \cosh(a - bi) + \sinh(a + bi) - \sinh(a - bi)$

$=$

< 微分の復習 1>

微分の公式についてはワークブック７において、６ページ以降を参照せよ。

問　次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x}\right)$

$=$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{5x}\right)$

$=$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{x}\right)$

$=$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(2xe^{-3x}\right)$

$=$

(5) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin x\right)$

$=$

(6) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin(3x)\right)$

$=$

(7) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos x\right)$

$=$

(8) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos(2x)\right)$

$=$

(9) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x}\sin(2x)\right)$

$=$

(10) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{4x}\cos x\right)$

$=$

(11) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}\sin(2x)\right)$

$=$

(12) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-2x}\cos(3x)\right)$

$=$

(13) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-3x}\sin(5x)\right)$

$=$

(14) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-4x}\cos(7x)\right)$

$=$

＜微分の復習２＞

例 (1) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{2t}}{13}\Big(2\cos(3t)+3\sin(3t)\Big)\right\}$

$$= \left(\frac{e^{2t}}{13}\right)' \times \Big(2\cos(3t)+3\sin(3t)\Big) + \frac{e^{2t}}{13} \times \Big(2\cos(3t)+3\sin(3t)\Big)'$$

$$= \frac{2e^{2t}}{13}\Big(2\cos(3t)+3\sin(3t)\Big) + \frac{e^{2t}}{13}\Big\{-6\sin(3t)+9\cos(3t)\Big\}$$

$$= \frac{e^{2t}}{13} \times (4+9)\cos(3t) \quad = \quad e^{2t}\cos(3t)$$

(2) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{2t}}{13}\Big(-3\cos(3t)+2\sin(3t)\Big)\right\}$

$$= \frac{2e^{2t}}{13}\Big(-3\cos(3t)+2\sin(3t)\Big) + \frac{e^{2t}}{13}\Big(9\sin(3t)+6\cos(3t)\Big)$$

$$= \frac{e^{2t}}{13} \times (4+9)\sin(3t) \quad = e^{2t}\sin(3t)$$

問 例にならって次の導関数を求めよ。（ただし a, b は定数）

(1) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{4t}}{41}\Big(4\cos(5t)+5\sin(5t)\Big)\right\}$

(2) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{4t}}{41}\Big(-5\cos(5t)+4\sin(5t)\Big)\right\}$

(3) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{at}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bt)+b\sin(bt)\Big)\right\}$

(4) $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^{at}}{a^2+b^2}\Big(-b\cos(bt)+a\sin(bt)\Big)\right\}$

< 複素数値関数の微分１ >

実変数 t の複素数値関数 $z = z(t)$ は

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad\qquad (\ x(t) \text{ と } y(t) \text{ は実数 })$$

のように実部 $x(t)$ と虚部 $y(t)$ の 2 つの実数値関数で表される。
このとき $z(t)$ の導関数を

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}$$

と定める。

例　(1)　$z(t) = t^2 + t^3 i$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\right) + \frac{d}{dt}\left(t^3\right) i = 2t + 3t^2 i$$

(2)　$z(t) = e^{(2+3i)t} = e^{2t}\Big(\cos(3t) + i\sin(3t)\Big)$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big(e^{2t}\cos(3t) + ie^{2t}\sin(3t)\Big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big(e^{2t}\cos(3t)\Big) + i\frac{d}{dt}\Big(e^{2t}\sin(3t)\Big) \\ &= \Big\{2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t)\Big\} + i\Big\{2e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t)\Big\} \end{aligned}$$

問　次式を t で微分せよ。（ただし a と b は実数）

(1)　$z(t) = t^6 + it^3$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(2)　$z(t) = e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt)$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(3)　$z(t) = e^{(2+5i)t}$

$\dfrac{dz}{dt} =$

(4)　$z(t) = e^{(a+bi)t}$

$\dfrac{dz}{dt} =$

＜ 複素数値関数の微分２ ＞

例　前ページ例 (2) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{(2+3i)t}\right) &= \left\{2e^{2t}\cos(3t)-3e^{2t}\sin(3t)\right\}+i\left\{2e^{2t}\sin(3t)+3e^{2t}\cos(3t)\right\}\\ &= e^{2t}\left\{2\cos(3t)-3\sin(3t)+2i\sin(3t)+3i\cos(3t)\right\}\\ &= e^{2t}\left\{(2+3i)\cos(3t)+(2i-3)\sin(3t)\right\}\end{aligned}$$

ここで $i^2=-1$ より $-3=3i^2$ だから

$$2i-3=2i+3i^2=(2+3i)\times i$$

におきかえると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{(2+3i)t}\right) &= e^{2t}\left\{(2+3i)\cos(3t)+(2+3i)\times i\sin(3t)\right\}\\ &= e^{2t}(2+3i)\left\{\cos(3t)+i\sin(3t)\right\}\\ &= e^{2t}(2+3i)e^{3ti}=(2+3i)e^{2t+3ti}=(2+3i)e^{(2+3i)t}\end{aligned}$$

問　以下の導関数を例のように指数表示せよ。（ただし a と b は実数）

(1)　$\dfrac{d}{dt}\left(e^{5it}\right)=$

(2)　$\dfrac{d}{dt}\left(e^{bit}\right)=$

(3)　$\dfrac{d}{dt}\left(e^{(2+5i)t}\right)=$

(4)　$\dfrac{d}{dt}\left(e^{(a+bi)t}\right)=$

＜積分の復習 1＞

1. 不定積分の定義

$\big(F(x)\big)' = f(x)$ のとき $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数という。

$f(x)$ の原始関数の全体を

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表し、$f(x)$ の不定積分という。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C}$$

2. 不定積分の公式

(1) $\displaystyle\int dx = x + C$

(2) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

(8) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + C$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$

上の公式において、積分変数 x のかわりに他の変数を用いても
同様な公式が成り立つ。

例 (1) $\displaystyle\int du = u + C$

(2) $\displaystyle\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$

(3) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(4) $\displaystyle\int e^t dt = e^t + C$

問 次の不定積分を (積分変数に注意して) 求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int dt =$

(2) $\displaystyle\int t^n dt =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy =$

(4) $\displaystyle\int e^u du =$

(5) $\displaystyle\int \cos v dv =$

(6) $\displaystyle\int \sin t dt =$

＜積分の復習２＞

$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx$ の形の不定積分は

$$g(x)=u \quad とおくと \quad g'(x)=\frac{du}{dx}$$

より置換積分法から

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du} \ (置換積分)$$

例１　$g(x)=ax+b$ （a と b は定数) のとき、 $g'(x)=a$ より

$$a\times\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b)\times a dx = \int f(u)du \quad (u=ax+b)$$

であるから

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du \quad (ただし)\, u=ax+b} \ (*)$$

例２　$\displaystyle\int \cos(2x+3)dx$ は $u=2x+3$ とおくと 上の公式 $(*)$ より

$$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$$

例３　$\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{u}du$ 　($u=4x+3$ とおくと 上の公式 $(*)$ より)

$$= \frac{1}{4}\log|u|+C = \frac{1}{4}\log|4x+3|+C$$

(注) $u=4x+3$ のとき $\dfrac{du}{dx}=4 \Rightarrow du=4dx \Rightarrow \boxed{dx=\dfrac{1}{4}du}$ と考えてよい。

問　次の不定積分を求めよ。（ただし a と b は定数）

(1) $\displaystyle\int \cos(3x+4)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin(5x-2)dx$

(3) $\displaystyle\int e^{3x+5}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{5x-3}dx$

(5) $\displaystyle\int (8x+7)^5dx$　　(6) $\displaystyle\int \cos(3t)dt$

(7) $\displaystyle\int e^{2t-3}dt$　　(8) $\displaystyle\int \cos(at+b)dt$

(9) $\displaystyle\int \sin(at+b)dt$　　(10) $\displaystyle\int e^{at+b}dt$

＜複素数値関数の積分 1＞

実数値関数と同様にして、複素数値関数 $F(t)$ の導関数が $f(t)$ のとき、すなわち

$$\frac{d}{dt}F(t) = f(t) \qquad \Big(F'(t) = f(t)\Big)$$

のとき、微分して $f(t)$ になる関数 $\big(f(t)$ の原始関数$\big)$ の全体を

$$\int f(t)dt = F(t) + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

と書き、$f(t)$ の**不定積分**という。ただし任意定数 C は複素数である。

例 1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 i\right) = t^2 + t^3 i$$

より

$$\int \left(t^2 + t^3 i\right) dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 i + C$$

例 2

$$\frac{d}{dt}\left(\cos t + i \sin t\right) = -\sin t + i \cos t$$

より

$$\int \left(-\sin t + i \cos t\right) dt = \cos t + i \sin t + C$$

上の 2 例からわかるように、実数値関数 $x(t)$,$y(t)$ に対し

$$\boxed{\int \big(x(t) + iy(t)\big)dt = \int x(t)dt + i\int y(t)dt}$$

がなりたつ。

例 3

$$\int \left(t^4 + ie^{2t}\right) dt = \int t^4 dt + i\int e^{2t}dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{2}e^{2t}i + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \left(t^3 + t^5 i\right) dt$　　(2) $\displaystyle\int \left(\cos t + i \sin t\right) dt$

(3) $\displaystyle\int \left(e^{2t} + i\cos(3t)\right) dt$　　(4) $\displaystyle\int \left(\sin(2t) + e^{3t} i\right) dt$

<複素数値関数の積分 2>

例 36 ページの例より

$$\frac{d}{dt}\left(e^{(2+3i)t}\right) = (2+3i)\,e^{(2+3i)t}$$

だから

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right) = e^{(2+3i)t}$$

である。よって

$$\int e^{(2+3i)t}dt = \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t} + C$$

問 次の不定積分を求めよ。(ただし a, b は実数)

(1) $\displaystyle\int e^{5it}dt$

(2) $\displaystyle\int e^{bit}dt$

(3) $\displaystyle\int e^{(2+5i)t}dt$

(4) $\displaystyle\int e^{(a+bi)t}dt$