高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

7

内容

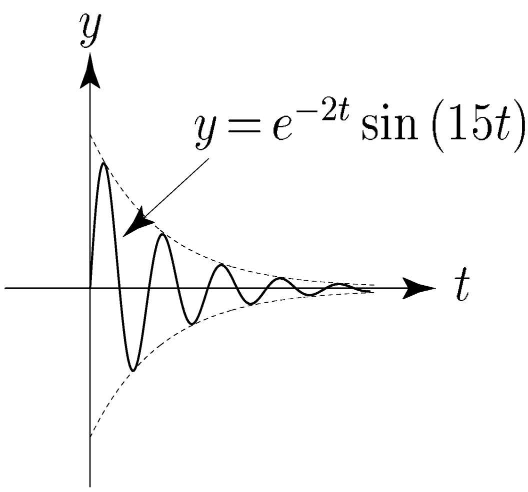
◎ 高階導関数

◎ 関数の近似

◎ テーラー展開

◎ 速度･加速度

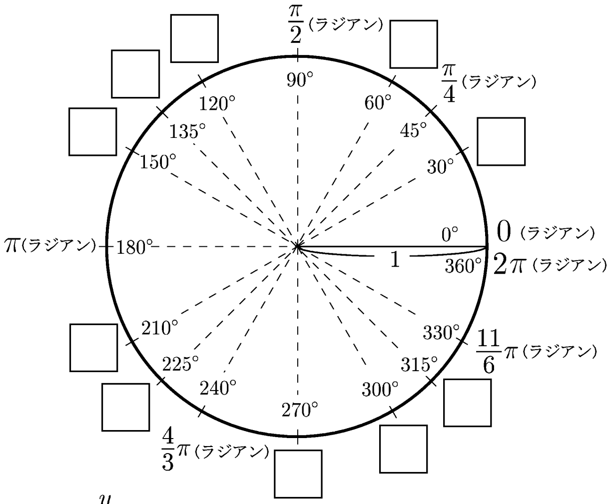
◎ 単振動



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜三角関数の復習1＞

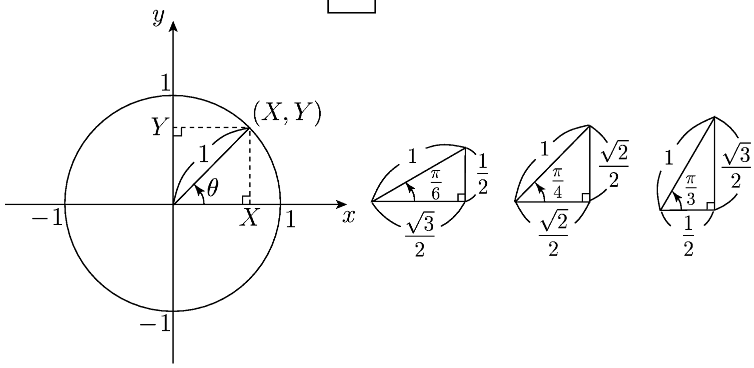
問1　右図は半径1の円の内部に度数法による角度が記されている。
　この円の外の □ 内に弧度法による角度を記せ。
(ただし単位ラジアンは省略してよい)



問2　右図の場合に

$$\sin\theta = Y$$
$$\cos\theta = X$$
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。右の直角三角形の辺の長さを参考にして、下の表を完成せよ。



角度 θ	度数法	0°		45°	60°		120°		150°	180°
	弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		
$\sin\theta$										
$\cos\theta$										
$\tan\theta$										

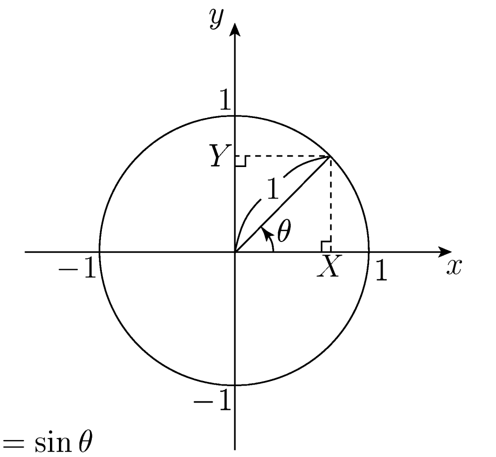
角度 θ	度数法		225°		270°			330°	
	弧度法	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		2π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

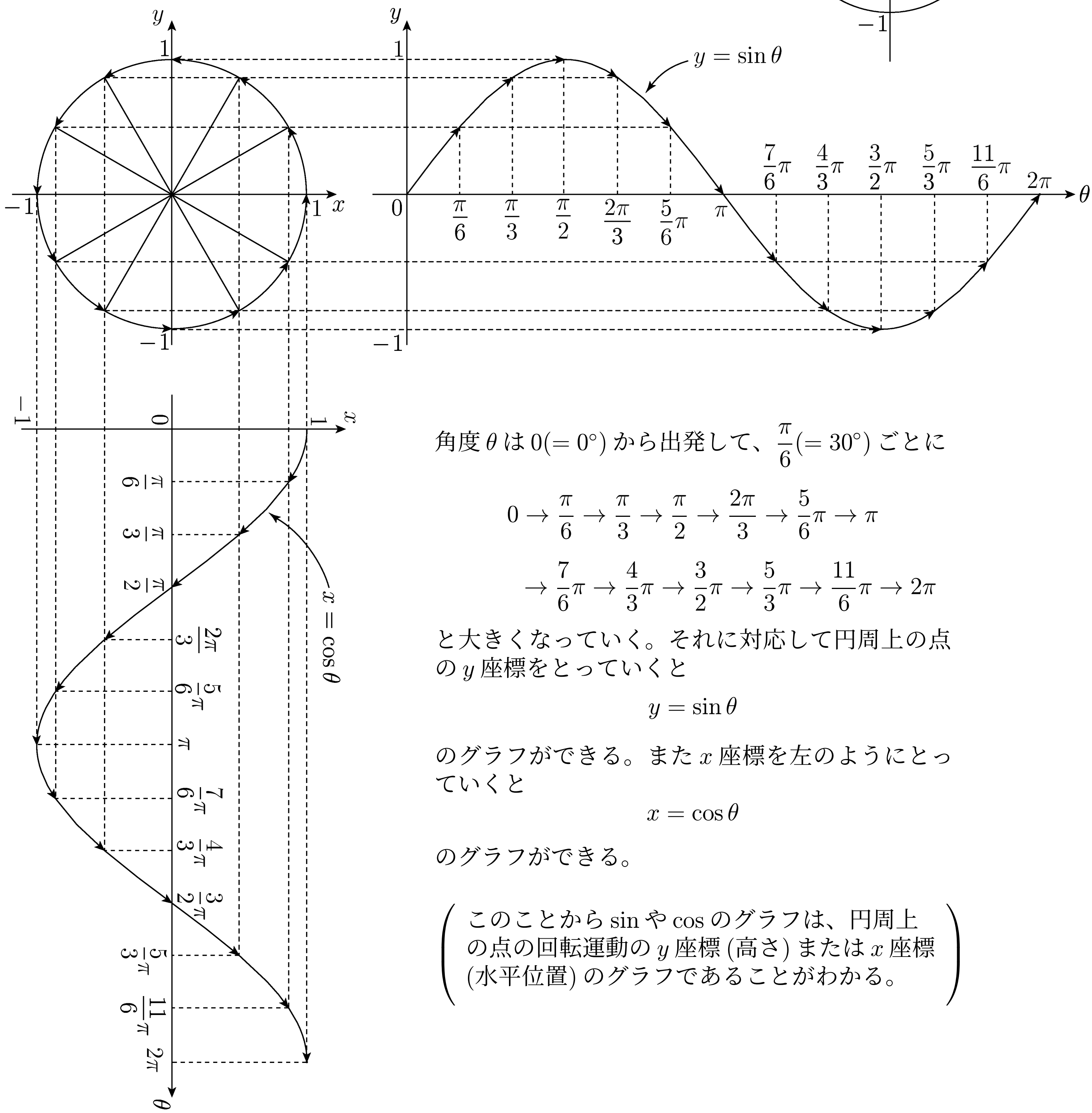
＜三角関数の復習2＞

右図の場合に三角関数の定義より

$$\cos\theta = X \quad , \quad \sin\theta = Y$$

である。このことを利用して $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の
$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲の$)$ グラフが以下のように描ける。





角度 θ は $0(=0^\circ)$ から出発して、$\dfrac{\pi}{6}(=30^\circ)$ ごとに

$$0 \to \frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2} \to \frac{2\pi}{3} \to \frac{5}{6}\pi \to \pi$$

$$\to \frac{7}{6}\pi \to \frac{4}{3}\pi \to \frac{3}{2}\pi \to \frac{5}{3}\pi \to \frac{11}{6}\pi \to 2\pi$$

と大きくなっていく。それに対応して円周上の点の y 座標をとっていくと

$$y = \sin\theta$$

のグラフができる。また x 座標を左のようにとっていくと

$$x = \cos\theta$$

のグラフができる。

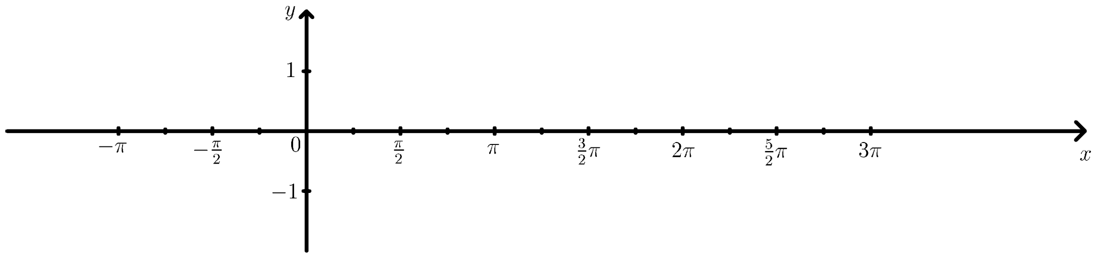
（このことから sin や cos のグラフは、円周上の点の回転運動の y 座標 (高さ) または x 座標 (水平位置) のグラフであることがわかる。）

＜三角関数の復習3＞

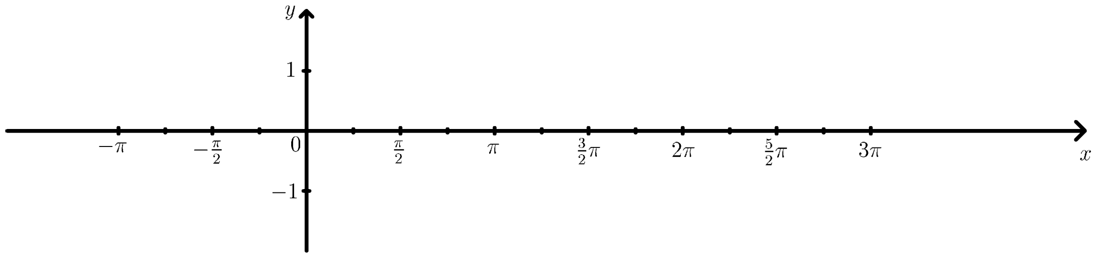
問　表を完成し、$y=\sin x$ と $y=\cos x$ および $y=\tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法		$-135°$		$-45°$	$0°$		$90°$		$180°$	$225°$		$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$		2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y=\sin x$

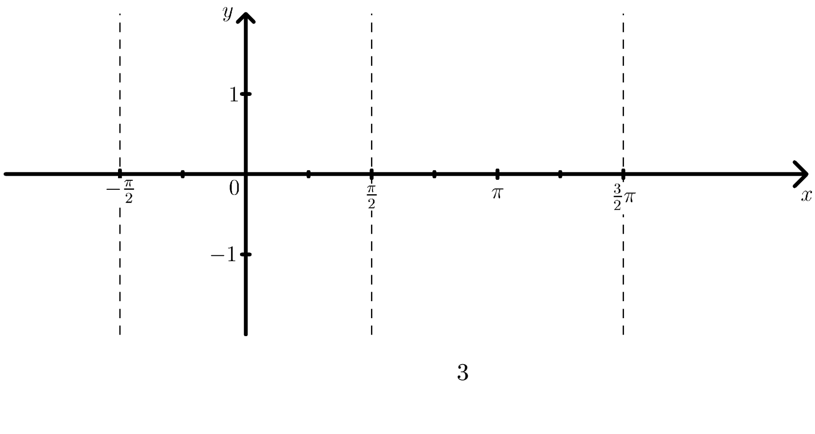


(2) $y=\cos x$

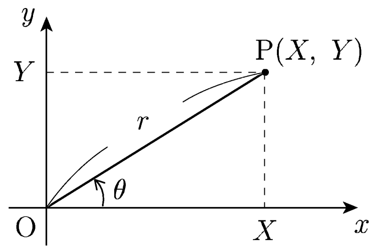


x																		
x	度数法	$-90°$		$-45°$		$0°$	$30°$		$60°$		$120°$		$150°$			$225°$		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$																		

(3) $y=\tan x$



＜三角関数の復習 4＞



(図1)

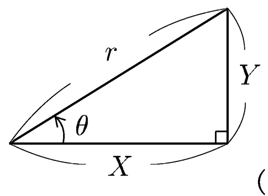
座標平面上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

$$\frac{X}{r} = \cos\theta \ ,\ \ \frac{Y}{r} = \sin\theta$$

だから

$$X = r\cos\theta \ ,\ \ Y = r\sin\theta$$

より



(図2)

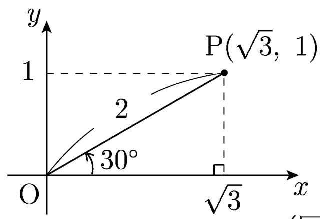
$$\boxed{(X,\ Y) = (r\cos\theta \ ,\ r\sin\theta)}$$ (極座標表示)

と表される。$(r\cos\theta \ ,\ r\sin\theta)$ を点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の**極座標**という。

例 (1) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1) = (2\cos 30^\circ \ ,\ 2\sin 30^\circ)$$

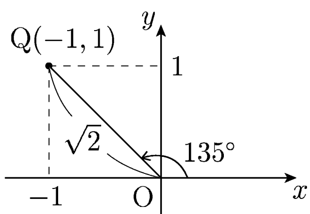
となる。



(図3)

(2) 点 $\mathrm{Q}(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1) = (\sqrt{2}\cos 135^\circ \ ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ)$$



(図4)

＜検算＞ 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $(2\cos 30^\circ \ ,\ 2\sin 30^\circ) = \left(2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ ,\ 2\times\dfrac{1}{2}\right) = (\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(\sqrt{2}\cos 135^\circ,\ \sqrt{2}\sin 135^\circ) = \left(\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\dfrac{2}{2},\ \dfrac{2}{2}\right) = (-1,\ 1)$

問 次の座標を極座標になおせ。

(1) $(3,\ 3)$　　(2) $(-1,\ \sqrt{3})$

(3) $(\sqrt{3},\ -1)$　　(4) $(-2,\ -2\sqrt{3})$

< 指数の復習 >

$a>0, m$ が整数、n が正の整数のとき

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	: a の n 乗根 (n 乗して a になる正の数)
$\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$	: a の (正の) 平方根
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	: 負の指数
$a^0=1$	: ゼロ乗 $=1$
$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$	: 分数指数

⟨指数法則⟩ $a>0$, $b>0$, p と q は実数

1. $a^p \times a^q = a^{p+q}$,
2. $a^p \div a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{pq}$,
4. $(ab)^p = a^p b^p$

例 (1) $8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$, (2) $9^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{9}\right)^3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$

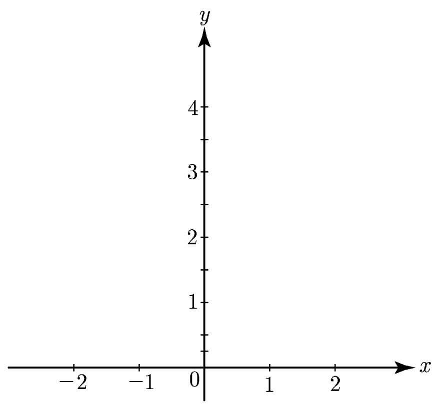
問 1 次の値を求めよ。

(1) $25^{\frac{1}{2}}$ (2) 7^0 (3) 3^{-2} (4) $4^{-\frac{1}{2}}$

(5) $16^{\frac{5}{4}}$ (6) $8^{-\frac{2}{3}}$ (7) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (8) $(0.01)^{-1.5}$

問 2 下の表を完成し、右に
$y=2^x$ のグラフを描け。

x	-2	-1	0	1	2
2^x					



＜対数の復習＞

$a>0$，$a \neq 1$ とする。正の数 M に対し $a^x = M$ をみたす実数 x を

$$x = \log_a M \quad (\Longleftrightarrow a^x = M)$$

と書き、a を底とする M の対数という。

例 1　$3 = \log_2 8 \quad (\Longleftrightarrow 2^3 = 8)$

記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{を何乗すれば}\bigcirc\text{になるか？}}$ という意味である。

例 2　(1)　$\log_2 32 = \log_2 (2^5) = 5$

(2)　$\log_9 3 = \log_9 (\sqrt{9}) = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(3)　$\log_4 0.5 = \log_4 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_4 \left(\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right) = \log_4 \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

〈対数の性質〉$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，$N>0$，p は実数

(1) $\log(M \times N) = \log_a M + \log_a N$　，　(2) $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a (M^p) = p \times \log_a M$

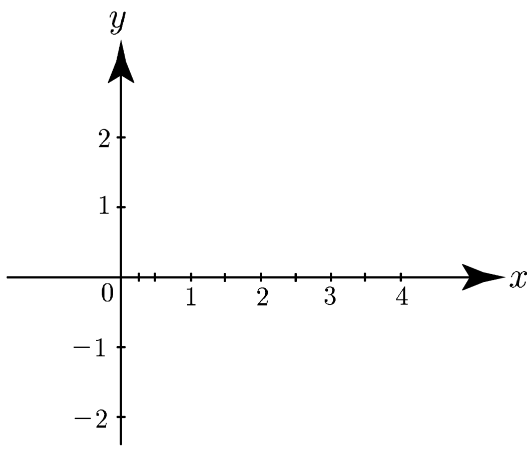
問 1　次の値を求めよ。

(1) $\log_3 81$　　(2) $\log_5 25$　　(3) $\log_7 1$　　(4) $\log_2 \left(\dfrac{1}{8}\right)$

(5) $\log_4 2$　　(6) $\log_8 2$　　(7) $\log_{10} (0.1)$　　(8) $\log_2 (0.25)$

問 2　下の表を完成し
$y = \log_2 x$ の
グラフを描け。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$					



<eの復習>

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2\,,\ \ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25\,,\ \ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37\,,\ \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59\,,\ \cdots,\ a_{100} \fallingdotseq 2.70\,,\ \cdots,\ a_{1000} \fallingdotseq 2.716\,,\ \cdots,\ a_{10000} \fallingdotseq 2.718\,,\ \cdots$$

となり、少しずつ増えながら一定の値に近づく。その極限値を e で表す。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845\cdots$$

e は無理数であることが知られている。

e の定義から次の極限の式が導かれる。

$$\boxed{(1)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad , \quad (2)\ \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

これらの式から e^x や $\log_e x$ の導関数の公式が導かれる。

底が e である対数を自然対数と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log x = \log_e x}\ \text{(自然対数)}$$

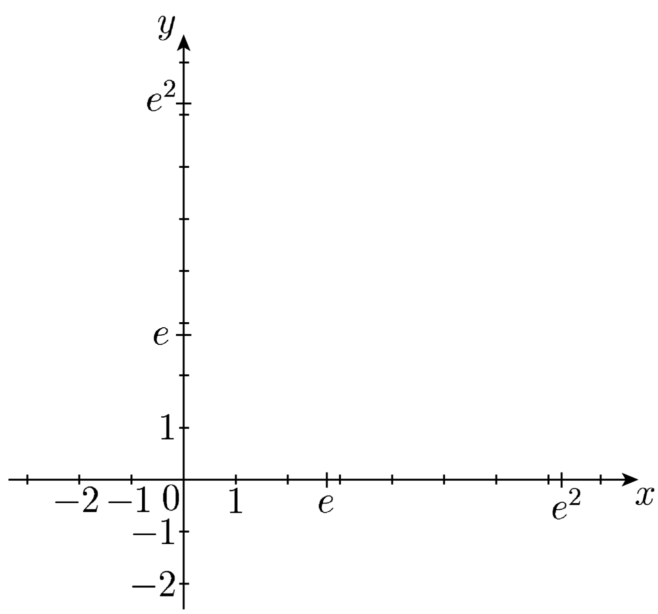
例　$\log(e^2) = \log_e(e^2) = 2$

$\log\left(\dfrac{1}{e}\right) = \log_e(e^{-1}) = -1$

問　下の表を完成し、$y = e^x$ と $y = \log x$ のグラフを右の座標平面に描け。

x	-2	-1	0	1	2
e^x					

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
$\log x$					



＜微分の復習 1＞

x の関数 $f(x)$ の導関数の定義は

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

である。実数 r に対し $f(x) = x^r$ のときは

$$\boxed{(x^r)' \ = \ rx^{r-1}}$$

である。

例 1 ① $(1)' \ = \ (x^0)' \ = \ 0 \times x^{-1} \ = \ 0$

② $(\sqrt{x})' \ = \ (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \ = \ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

x の関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し

$$\boxed{\begin{aligned} \bigl(f(x) + g(x)\bigr)' \ &= \ f'(x) + g'(x) \\ \bigl(kf(x)\bigr)' \ &= \ kf'(x) \end{aligned}}$$

が成り立つ。

例 2 ③ $(4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)' \ = \ 4(x^3)' - 5(x^2)' + 6(x)' - 7 \times (1)'$

$= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 6 \times 1 - 7 \times 0 = 12x^2 - 10x + 6$

④ $\left(\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x}\right)' \ = \ (x + 2 - 3x^{-1})' \ = \ 1 + 0 - 3 \times (-1 \times x^{-2})$

$= 1 + \dfrac{3}{x^2}$

問　次の導関数を求めよ。

(1) $(5x^4 + 6x^3)'$　(2) $(7x^5 - 4x + 5)'$　(3) $(\sqrt[3]{x})'$

(4) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$　(5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$　(6) $(x\sqrt{x})'$

(7) $\left(\dfrac{4}{x^3}\right)'$　(8) $\left(\dfrac{x^3 - 3x + 4}{x}\right)'$　(9) $\left(\dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}\right)'$

＜微分の復習2＞

三角関数、指数・対数関数の導関数は

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x \\
(e^x)' &= e^x \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

である。x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積と商の関数の微分は

$$
\begin{aligned}
&\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} \quad , \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}
\end{aligned}
$$

である。

例 (1) $(x^5\cos x)' = (x^5)'\times\cos x + (x^5)\times(\cos x)' = 5x^4\cos x - x^5\sin x$

(2) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\times\cos x - \sin x\times(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\times\cos x - \sin x\times(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\big(x^3\sin x\big)'$ (2) $(e^x\cos x)'$ (3) $\big(x^5 e^x\big)'$

(4) $(-x + x\log x)'$ (5) $\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'$ (6) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'$

(7) $\left(\dfrac{3}{x^2+1}\right)'$ (8) $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)'$ (9) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'$

<微分の復習3>

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ は $u=g(x)$ とおくと

$$y \ = \ f(u) \quad , \quad u \ = \ g(x)$$

より

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\big(f(u)\big)'\times\big(g(x)\big)'=f'(u)\times g'(x)=f'\big(g(x)\big)\times g'(x)}$$

例　(1) $y=\sin(3x+4)$ の微分は、$3x+4=u$ とおくと $y=\sin u$ より

$$\big(\sin(3x+4)\big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\sin u)'\times(3x+4)'$$
$$=\cos(u)\times 3=3\cos(3x+4)$$

(2) $y=e^{x^2+1}$ の微分は、$x^2+1=u$ とおくと $y=e^u$ より

$$(e^{x^2+1})'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(e^u)'\times(x^2+1)'=e^u\times(2x)=2xe^{x^2+1}$$

(3) $y=(4x^2-3x)^7$ の微分は、$4x^2-3x=u$ とおくと $y=u^7$ より

$$\big((4x^2-3x)^7\big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times(4x^2+3x)'=7u^6\times(8x-3)$$
$$=7(8x-3)(4x^2-3x)^6$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $\big(\cos(5x-3)\big)'$　　(2) $\big(\sin(x^2+3x)\big)'$　　(3) $\big(e^{4x+5}\big)'$

(4) $\big((3x+2)^6\big)'$　　(5) $\Big(\sqrt{4x+3}\Big)'$　　(6) $\big(\sin(4x)+e^{5x}\big)'$

(7) $\big(e^{2x}\cos(3x)\big)'$　　(8) $\big(e^{-3x}\sin(2x)\big)'$　　(9) $\big(\sin(2x)\cos(3x)\big)'$

＜微分の復習4＞

$f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y \;=\; f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; f(y)$$

これより $f^{-1}(x)$ の微分は

$$\boxed{\bigl(f^{-1}(x)\bigr)' \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \;=\; \frac{1}{f'(y)}} \quad \text{(逆関数の微分)}$$

例 (1) $y=\sin^{-1}x \;\Leftrightarrow\; x=\sin y$ より

$$(\sin^{-1}x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y=\log x \;\Leftrightarrow\; x=e^y$ より

$$(\log x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

問 1 次の関数を求めよ。

(1) $(\tan^{-1}x)'$

(2) $(\log_a x)'$

（ヒント） $y=\log_a x \;\Leftrightarrow\; x=a^y$ ， $(a^y)'=a^y\log a$

問 2 $f(x)$ は正の値をとる関数とする。このとき次の関数の導関数を $f(x)$ と $f'(x)$ の式で表せ。

(1) $\bigl(\{f(x)\}^n\bigr)' =$

(2) $\Bigl(\log\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)' =$

(3) $(e^{f(x)})' =$

(4) $\Bigl(\sin\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)' =$

(5) $\Bigl(\cos\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)' =$

(6) $\Bigl(\tan\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)' =$

＜微分の復習 5＞

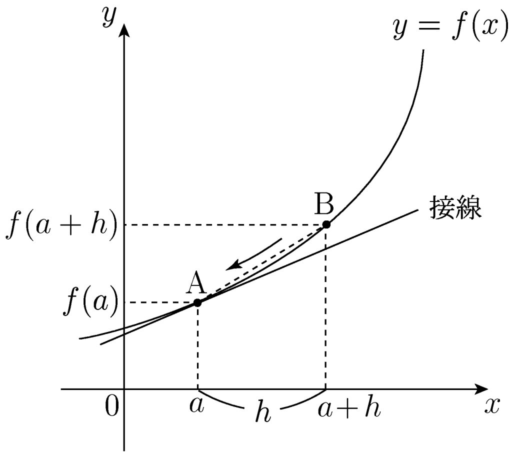
関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で、$x = a$ の値

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を $x = a$ における微分係数という。



右図において直線 AB の傾きが $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ であり、h を限りなく小さくした極限値 $f'(a)$ は点 A における接線の傾きを表す。

例　$f(x) = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようである。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

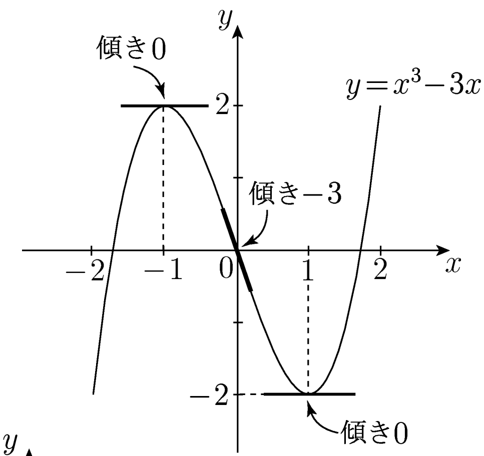
であるから、$y = x^3 - 3x$ のグラフにおいて

$x = 1$ における接線の傾きは $f'(1) = 0$

$x = 0$ における接線の傾きは $f'(0) = -3$

$x = -1$ における接線の傾きは $f'(-1) = 0$

となる。



問　$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ の導関数を求め、下の値を求め、
$y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$
のグラフの概形を右に描け。

$f'(x) =$

$f(4) =$ 　　　　, $f'(4) =$

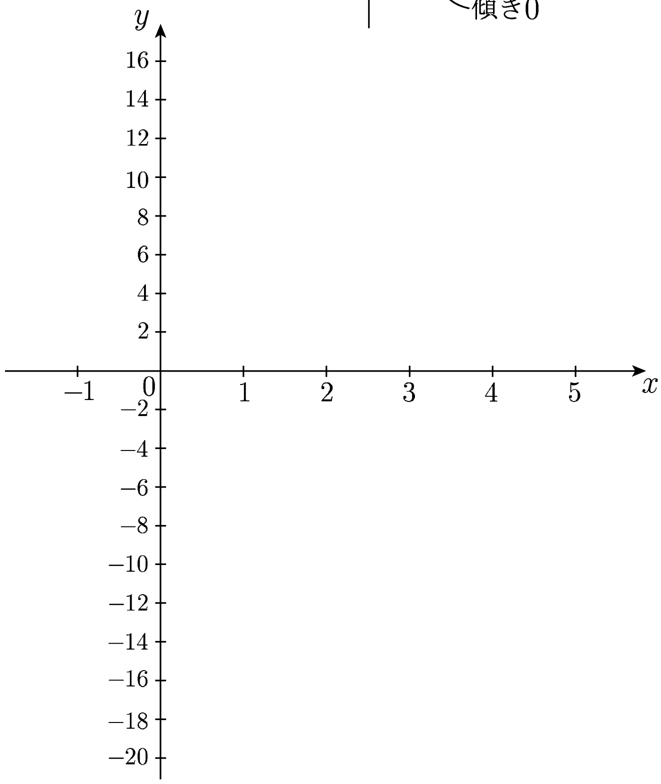
$f(3) =$ 　　　　, $f'(3) =$

$f(2) =$ 　　　　, $f'(2) =$

$f(1) =$ 　　　　, $f'(1) =$

$f(0) =$ 　　　　, $f'(0) =$

$f(-1) =$ 　　　　, $f'(-1) =$



＜微分の復習6＞

例　前ページ問の関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ のグラフを描くためには右のような増減表を作ればよい。

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	8	$\nearrow$	13	$\searrow$	-19	$\nearrow$
		極小		極大		極小	

より $x = 0, x = 1, x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

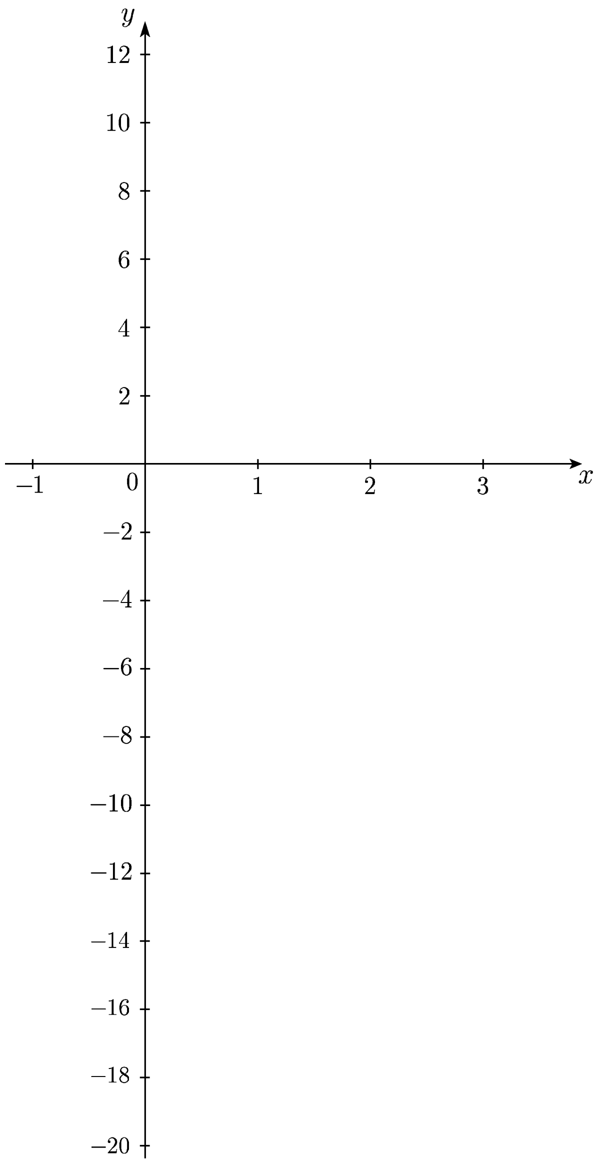
ここで y' の符号の $+, -$ はその範囲の x の値を y' の式に代入して調べる。
y' が $+$ であれば y は増加 $\nearrow$、y' が $-$ であれば y は減少 $\searrow$ である。
この増減表によって極値が調べられる。すなわち

$x = 0$ のとき極小値 $y = 18$
$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$
$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$

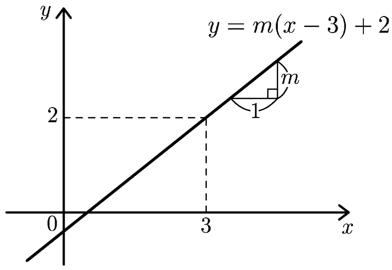
である。

問　関数 $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$ の増減表を作り、グラフを描き、極値を調べよ。

x	
y'	
y	



＜接線の方程式＞

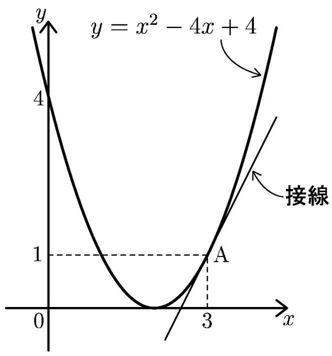


例 1 m を定数とする関数

$$y = m(x-3)+2$$

は、$x=3$ のとき $y=2$ であるから、
点 $(3,2)$ を通り、傾き m の直線の方程式を意味する。

問 1 a, b, m を定数とする。**点 (a,b) を通り、傾き m の直線**の方程式を求めよ。
(答)



例 2 関数 $y = x^2-4x+4$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(3,1)$
における接線の方程式を求めたい。
$f(x) = x^2-4x+4$ とおくと、<u>接線の傾き m は
$x=3$ における微分係数 $f'(3)$ である。</u>

$$f'(x) = (x^2-4x+4)' = \underbrace{(x^2)'}_{2x} - 4\times\underbrace{(x)'}_{1} + \underbrace{(4)'}_{0} = 2x-4$$

より

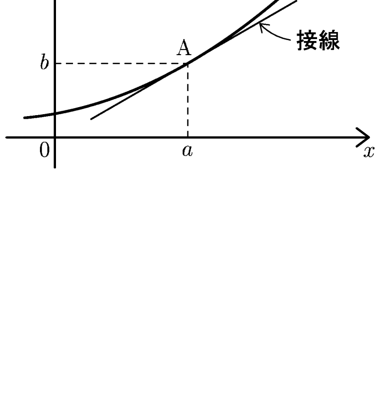
$$m = f'(3) = 2\times 3-4 = 2$$

となる。点 $\mathrm{A}(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y=m(x-3)+1$ だから

$$y = m(x-3)+1 = 2(x-3)+1 = 2x-5$$

より、接線の方程式は <u>$y=2x-5$</u> となる。

問 2 $y = x^2+x$ 上の点 $\mathrm{A}(1,2)$ における接線の方程式を求めよ。



問 3 一般の関数 $y=f(x)$ のグラフ上の
点 $\mathrm{A}(a,b)$ における接線の傾きは $f'(a)$
である。接線の方程式を求めよ。

＜関数の一次近似＞

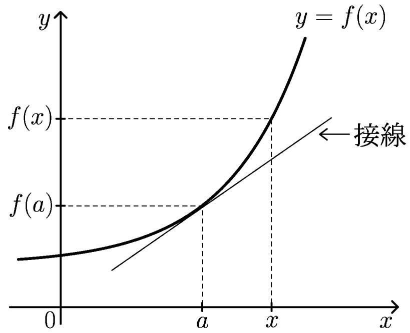
関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数は $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ である。

$x=a+h$ とおけば、$h\to 0$ のとき $x\to a$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき（$x\fallingdotseq a$ のとき）

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\fallingdotseq f'(a)$$



とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)}$$

が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、

これを**一次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)} \quad \text{（接線）}$$

を表すが、これは曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。

すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例 $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

より一次近似式は

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x}\fallingdotseq \sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)}$$

となる。ここで $a=1\ ,\ x=1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1}\fallingdotseq \sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1-1)=1+\frac{1}{3}\times 0.1=1+\frac{1}{30}$$

問 例にならって、$\sqrt{1.1}$ を近似せよ。

＜ 高階導関数 ＞

関数 $f(x)$ を x について微分したときに求められる関数 $f'(x)$ を導関数をいうことは既に知っていると思う。$f'(x)$ をさらに微分したものを $f''(x)$ あるいは $f^{(2)}(x)$ と書き、これを 2 階導関数と呼ぶ。実際に 2 階導関数を求めてみよう。

例題 1　$f(x) = x^3$ の 2 階導関数を求めよ。

(解)　$f'(x) = 3x^2$ より $f''(x) = 6x$ である。

問 1　次の関数の 2 階導関数を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(3) $f(x) = \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

関数 $f(x)$ を 3 回微分したものを 3 階導関数と呼び $f'''(x)$ あるいは $f^{(3)}(x)$ で表す。

例題 2　$f(x) = x^3$ の 3 階導関数を求めよ。

(解)　例 1 より $f''(x) = 6x$　　よって　$f'''(x) = 6$ である。

問 2　次の関数について 3 階までの導関数を求めよ。

(1)　$f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(2)　$f(x) = \sin x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(3)　$f(x) = 3x \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(4)　$f(x) = e^{3x}$

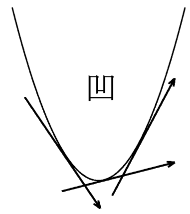
$f'(x) =$

$f''(x) =$

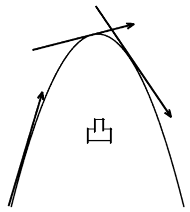
$f'''(x) =$

<グラフの凹凸1>

[1] 関数 $f(x)$ の2階導関数が、ある x 範囲内で常に $\underline{f''(x) > 0}$ のとき、
$f'(x)$ の値は、この範囲内で増加する。
したがって、グラフは、右の図のように
接線の傾きが増加していく。
このようなとき、グラフは**凹**であるという。



[2] これに対し、$\underline{f''(x) < 0}$ である範囲内では、
$f'(x)$ の値は減少し、グラフでは、
右の図のように接線の傾きが減少していく。
このようなとき、グラフは**凸**であるという。



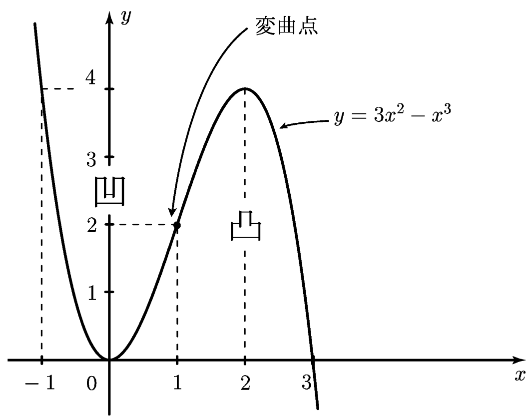
例 関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だからグラフの凹凸は $x = 1$
を境にして変わる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)



このグラフで凹凸の入れかわる点 (1, 2)
を**変曲点**という

問 次の関数の2階導関数 y'' を求め、凹凸を表にせよ。

(1) $y = x^3 + 3x$

$y'' =$

x	
y''	
y	

(2) $y = -x^4 + 4x^3 - 15$

$y'' =$

x	
y''	
y	

＜グラフの凹凸２＞

例1　2 次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ は

$$y' = 2x - 4 = 2(x-2)$$
$$y'' = 2$$

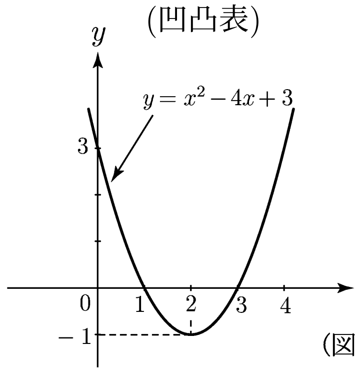
より、増減表と凹凸表は右のようになる。グラフは図 1 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-1	↗

(増減表)

x	$\cdots$
y''	$+$
y	凹

(凹凸表)



(図1)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	⤷	-1	⤴

例2　2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 2$ は

$$y' = -2x - 2 = -2(x+1)$$
$$y'' = -2$$

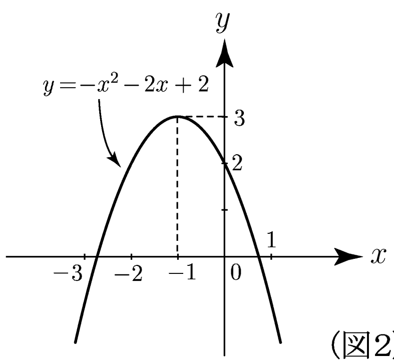
より、増減表と凹凸表は右のようになり、グラフは図 2 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

(増減表)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	3	↘

(凹凸表)

x	$\cdots$
y''	$-$
y	凸



(図2)

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	↱	3	⤵

＜グラフの凹凸3＞

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。
これを組み合わせると、下の表

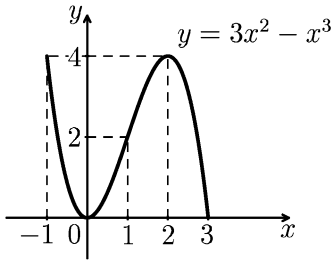
増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

凹凸表

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘



のようになる。実際のグラフは右のようになる。

以上の考察から、y' と y'' の $+, -$ によって y のグラフは
次のようになる。

y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$+$ ↗	$-$ ↘
y''	$+$ 凹	$+$ 凹	$-$ 凸	$-$ 凸
y	↘	↗	↗	↘

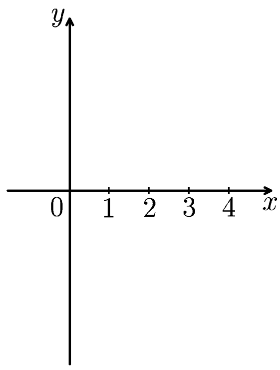
問 関数 $y = -x^4 + 4x^3 - 15$ を 2 回微分し、
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$y' =$

$y'' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'							
y''							
y							



＜ロピタルの定理１＞

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分定数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\ g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

と書ける。ここで $f(a)=g(a)=0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

であるから、

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a)=g(a)=0 \text{ のとき} \\ \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}}$$

(ロピタルの定理)

が成り立つ。

(注)　極限が $\dfrac{0}{0}$ の形になるときに、分母と分子を微分すればよい。
(実は極限が $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になるときも同様な定理がなりたつ)

例　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=12$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=$

＜ロピタルの定理2＞

例　極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$ を考える。

$x=a$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の形になるからロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\big)'}{\big((x-a)^2\big)'}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-\big(f(a)\big)'-\big\{f'(a)(x-a)\big\}'}{2(x-a)}=(*)$$

$f(a)$ は定数であるから $\big(f(a)\big)'=0$　また

$\big\{f'(a)(x-a)\big\}'=f'(a)\times(x-a)'=f'(a)\times 1=f'(a)$ より

$(*)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}$ となる。ここで $x=a$ を代入すると再び $\dfrac{0}{0}$ の形になる

のでさらにロピタルの定理を使って

$$(*)=\lim_{x\to a}\frac{\big(f'(x)-f'(a)\big)'}{\big(2(x-a)\big)'}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

このように極限をとると $\dfrac{0}{0}$ の形になる場合、何度でもロピタルの定理を使って解を求めることができる。

問　例のようにロピタルの定理を何回か使って、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

＜関数の高次近似＞

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } \ f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから、これを **2 次近似式**という。

例 2 前のページの問 (1) の結果より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき } \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)$$

これを展開すると

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

$$\boxed{f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}$$

この式は x が a に限りなく近い場合に $f(x)$ を

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

に書き換えることができることを言っている。このような書き換えを近似するという。この場合は 3 次式なので **3 次近似式**という。

問 前ページの問 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x\fallingdotseq a$ のとき $f(x)\fallingdotseq$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x), f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における**n階微分係数**という。

例 (1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、$x = 2$ における 4 階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80,\ f^{(2)}(2) = 160,\ f^{(3)}(2) = 240, f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \cos x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= -\sin x, & f^{(6)}(x) &= -\cos x, & f^{(7)}(x) &= \sin x, & f^{(8)}(x) &= \cos x \\ &= f^{(1)}(x) & &= f^{(2)}(x) & &= f^{(3)}(x) & &= f^{(4)}(x) \end{aligned}$$

より $x = 0$ における 8 階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1,\ f^{(7)}(0) = 0,\ f^{(8)}(0) = 1$$

問 (1) $f(x) = e^x$ の 4 階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、$x = 0$ における 4 階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、$x = 0$ おける n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \sin x$ の 8 階までの導関数 $\left(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)\right)$ を求め、$x = 0$ における 8 階までの微分係数 $\left(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)\right)$ を求めよ。

< 関数の n 次近似1 >

22 ページの結果から、関数 $f(x)$ の 4 次近似式は

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は順に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \cdots$$

となるが、この分母の数は、21 ページの計算からロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり、

$$\left((x-a)^4\right)'''' = \left(4(x-a)^3\right)''' = \left(3\times4(x-a)^2\right)'' = \left(2\times3\times4(x-a)\right)' = 1\times2\times3\times4 = 24$$

である。つまり $24 = 1\times2\times3\times4$ と書ける。

　ここで階乗の記号を使って式を見やすいものにする。階乗とは数字を順番に $1\times2\times3\times4\times5\times\cdots(n-1)\times n$ というふうに計算することで、 n までかけた時には $n!$ というふうに書く。

　$24 = 1\times2\times3\times4$ ということは 4 までかけているので 4! と表す。

上の例の係数は

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{1\times2\times3},\ \frac{1}{1\times2\times3\times4}$$

ここで階乗の記号を使うと

$$\frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!}$$

と書くことができる。これを $f(x)$ の式に使って書くと

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

になる。(次のページに続く)

< 関数の n 次近似2 >

前のページでは $f(x)$ は階乗の記号を使うと

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

というふうに書けることを説明した。
　さて、上の式について

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 \quad , \quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 \quad , \quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

同じ数字　　同じ数字　　同じ数字

という同じ数字が使われているパターンに気づくと思う。
したがって、 4 のところを n にして $f(x)$ を書き直すと、

> $x \fallingdotseq a$ のとき
> $$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

というふうになる。この式を **n 次近似式**という。

例 $f(x)=e^x$ のとき、 $f^{(n)}(x)=e^x$ より $f^{(n)}(4)=e^4$ である。
したがって $x \fallingdotseq 4$ における n 次近似式は

$x \fallingdotseq 4$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^4+e^4(x-4)+\frac{e^4}{2!}(x-4)^2+\frac{e^4}{3!}(x-4)^3+\cdots+\frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

問 $f(x)=e^x$ に対し、 $x \fallingdotseq a$ における n 次近似式を求めよ。

＜テーラー展開＞

関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても、n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**テーラー展開**という。

例　$f(x)=e^x$ に対し、$f^{(n)}(x)=e^x$、$f^{(n)}(2)=e^2$
であるから、$x=2$ におけるテーラー展開は

$$e^x=e^2+e^2(x-2)+\frac{1}{2!}e^2(x-2)^2+\frac{1}{3!}e^2(x-2)^3+\frac{1}{4!}e^2(x-2)^4+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}e^2(x-2)^n+\cdots$$

となる。

問1　$f(x)=e^x$ に対し、$x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

問2　$f(x)=e^x$ に対し、a が次の場合の $x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

(1)　$a=1$

(2)　$a=0$

< マクローリン展開1 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー展開

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots}$$

をマクローリン展開という。前ページの問2 (2) では $f(x)=e^x$ のマクローリン展開を求めた。

例 $f(x)=\cos(x)$ のとき、23ページの例より

$$f^{(1)}(0)=0\ ,\ f^{(2)}(0)=-1\ ,\ f^{(3)}(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(6)}(0)=-1\ ,\ f^{(7)}(0)=0\ ,\ f^{(8)}(0)=1$$

で数列 $\left\{f^{(n)}(0)\right\}$ は、 $0,\ -1,\ 0,\ 1$ を4項おきに繰り返す。
又、 $f(0)=\cos 0=1$ だから $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots$$

となる。

問 23ページの結果を使って、 $f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

< マクロ－リン展開2 >

例 1　e^x のマクロ－リン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

より、ネピアの数 e の値を近似したい。$x = 1$ とおいて3次の項までで近似すると

$$e = e^1 \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \fallingdotseq 2.66$$

問 1　e をマクロ－リン展開の4次の項までで近似せよ。

例 2　$\cos x$ のマクロ－リン展開

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \cdots$$

より、$\cos 1$（1は角度1ラジアン$= \dfrac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.3°$）を近似したい。

$x = 1$ とおいて、4次の項までで近似すると

$$\cos 1 \fallingdotseq 1 - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^4}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} \fallingdotseq 0.54$$

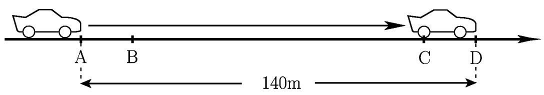
問 2　$\sin x$ のマクロ－リン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \cdots$$

より $\sin 1$ を近似したい。$x = 1$ とおいて3次の項までで近似せよ。

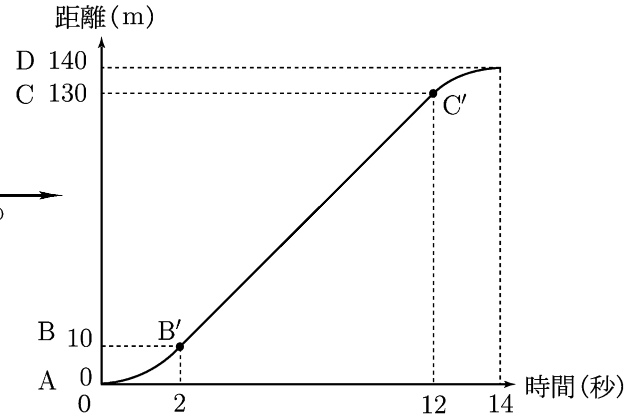
＜速度１＞

例　まっすぐな道路を車が A 地点から D 地点へ行く。A から D まで 140m ある。



A から D まで 14 秒かかった。

平均速度は



$$\frac{140(\mathrm{m})}{14(\mathrm{s})} = 10\ (\mathrm{m/s})\ \cdots\ \text{A から D までの平均速度}$$

である。しかし実際のスピードは常に 10(m/s) ではない。
出発地点の A 地点では速度 0(ゼロ) であり、あるスピードまで加速して 2 秒後に B 地点 (10m 先) まで行き、そこから C 地点 (130m 先) まで同じ速さで走り、C 地点でブレーキをふみ、減速して D 地点 (140m 先) で止まる。車の走った距離と時間が図 1 のようであれば、B から C までの平均速度は

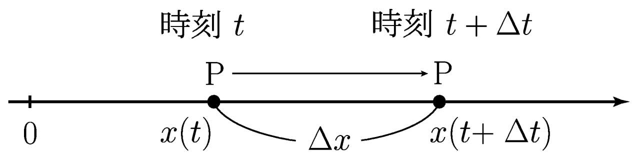
$$\frac{130-10}{12-2} = 12\ (\mathrm{m/s})\ \cdots\ \text{B から C までの平均速度}$$

であり、全体の平均速度より速いが、A から B までと C から D までの速度が遅いため、全体の平均速度は 10(m/s) になっている。
車に乗ってスピードメーターを見ると、最初は時速 0km からしだいに速度を上げ、B 地点になると秒速 12m= 時速 43.2km にたっし、そこから C 地点まで同じ時速 43.2(km) で走り、C 地点から減速して、D 地点で時速 0km になる。
　このようなスピードメーターでわかる現在の速度を「**瞬間の速度**」といい、「平均の速度」と区別する。

(注)　図 1 の $\mathrm{B}'(2,10)$ と $\mathrm{C}'(12,130)$ を結ぶ直線の傾き $(=12)$ が B 地点から C 地点までの平均速度になっている。

＜速度２＞

数直線上を動く点 P を考える。時刻 t における点 P の位置 (座標) を $x(t)$ とする。時刻 t から $t+\Delta t$ までの平均速度は



$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\quad \text{(平均速度)}$$

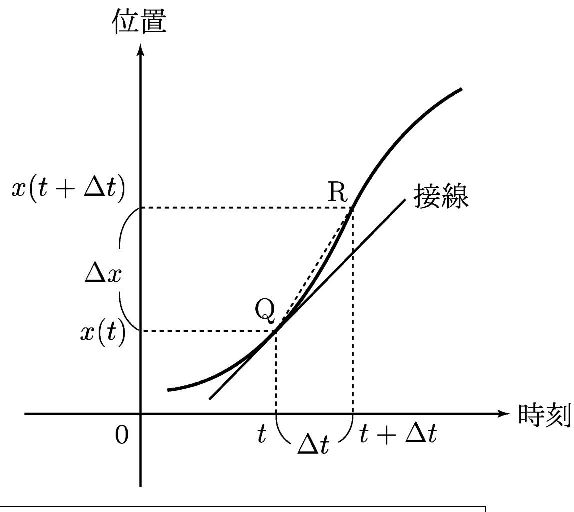
である。このとき時刻 t における「瞬間の速度」を求めたい。「瞬間」というのは「微小時間間隔」のこと、つまり「$\Delta t \fallingdotseq 0$」であることである。平均速度の式に $\Delta t=0$ を代入すると求まらないので、 $\Delta t \to 0$ のときの平均速度の極限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

を考え、この極限値を「時刻 t における瞬間の速度」とする。この極限の式は $x(t)$ の導関数 $x'(t)$ と同じ式である。すなわち

$$\boxed{x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}}\quad \text{(時刻 } t \text{ における瞬間の速度)}$$

前ページの例のように、時刻 t における位置 $x(t)$ が右図のようなとき、「平均速度」と「瞬間の速度」の図形的な意味は以下のようになる。



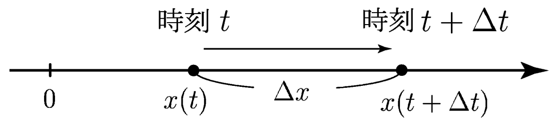
$$\boxed{\begin{aligned}\text{平均速度}=\frac{\Delta x}{\Delta t}&=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\\&=\text{線分 QR の傾き}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{瞬間の速度}=x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\text{点 Q における接線の傾き}}$$

問　前ページの例で「平均速度」と「瞬間の速度」が同じになる場合を説明せよ。

< 速度3 >

前ページと同様に数直線上を動く点を考える。時刻 t における位置を $x(t)$ とおくと、時刻 t における瞬間の速度は



$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \text{ (瞬間の速度)}$$

であった。今後単に「速度」と書けば常に「瞬間の速度」を表すことにする。速度を英語で $velocity$ と書くので、速度を表す記号として v を使う。つまり時刻 t における速度を

$$\boxed{v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}} \text{ (時刻 } t \text{ における速度)}$$

と書くことにする。

例 数直線上を動く点の時刻 t における位置が $x(t) = 5 - 4t + 3t^2$ である点の時刻 t における速度は

$$v(t) = x'(t) = (5 - 4t + 3t^2)' = -4 + 6t$$

問 1 $x(t)$ が以下の場合に、速度 $v(t)$ を求めよ。

(1) $x(t) = 20 + 10t - 5t^2$, $v(t) =$

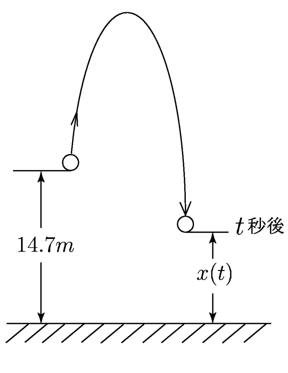
(2) $x(t) = 2\sin(3t)$, $v(t) =$

(3) $x(t) = e^{3t}\cos(2t)$, $v(t) =$

問 2 地上 $14.7m$ の位置からボールを真上に投げ上げた。投げ上げる速度が $9.8(m/s)$ のとき、t 秒後のボールの高さ $x(t)$ は

$$x(t) = -4.9t^2 + 9.8t + 14.7$$

となる。



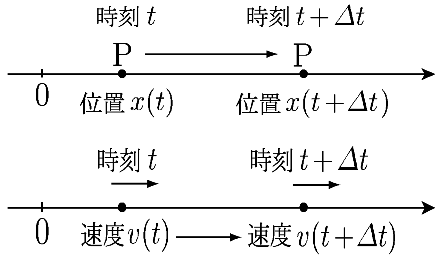
(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) $v(t) = 0$ となるのは何秒後か？

(3) ボールが一番高く上がった位置は地上何 m か？

＜加速度 1＞

数直線上を動く点 P の時刻 t における位置を $x(t)$ とすると、その瞬間の速度 $v(t)$ は



$$\boxed{v(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}} \quad \text{(速度)}$$

であった。速度 $v(t)$ は時刻 t によって変化する。時刻 t から時刻 $t+\Delta t$ までの速度の変化率

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad : \quad \text{平均の加速度}$$

を平均の加速度という。瞬間の速度と同様にして、「時刻 t における瞬間の速度の変化率」を考える。平均の加速度の式で $\Delta t \to 0$ の極限

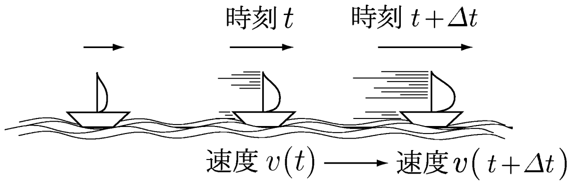
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

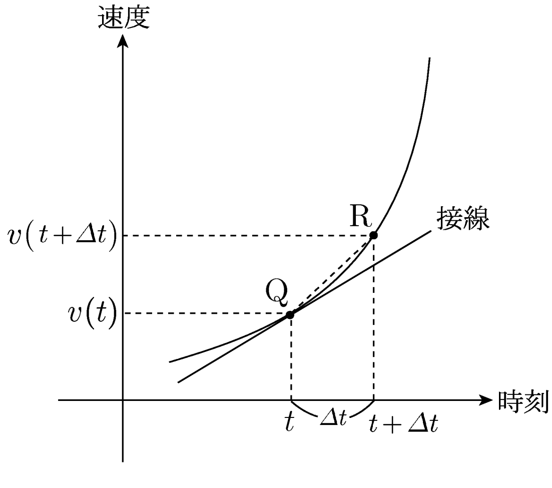
を考え、その極限値を「時刻 t における瞬間の加速度」とする。この極限の式は $v(t)$ の導関数 $v'(t)$ と同じ式である。すなわち

$$\boxed{v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}} \quad \text{(時刻 } t \text{ における瞬間の加速度)}$$

速度 $v(t)$ を微分したもの $\big(= v'(t)\big)$ が「瞬間の加速度」である。

例　湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。





時刻 t における速度 $v(t)$ のグラフが右図の場合

平均の加速度 (t から $t+\Delta t$ までの速度の上昇率)	$=$	$\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	$=$	線分 QR の傾き

瞬間の加速度 (時刻 t での速度の上昇率)	$=$	$v'(t)$	$=$	点 Q における接線の傾き

$<$ 加速度2 $>$

数直線上を動く点の時刻 t における位置を $x(t)$ 、速度を $v(t)$ とすると、 $v(t)$ の導関数 $v'(t)$ が時刻 t における「瞬間の加速度」であった。今後単に「加速度」と書けば常に「瞬間の加速度」を表すことにする。

加速度を英語で $acceleration$ と書くので、加速度を表す記号として a を使う。つまり時刻 t における加速度を

$$\boxed{a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}} \quad \text{(時刻 } t \text{ における加速度)}$$

と書くことにする。速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ の関係

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

より

$$a(t) = x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

である。

(注)　運動する点の位置 $x(t)$, 速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$ は時間変数 t を省略して、位置 x , 速度 v , 加速度 a と略記する場合がある。

例　時刻 t における位置 $x(t)$ が $x(t) = 5 - 2t + 3t^2 - 4t^3$ である点の速度 v と加速度 a は

$$v(t) = (5 - 2t + 3t^2 - 4t^3)' = -2 + 6t - 12t^2$$

$$a(t) = (-2 + 6t - 12t^2)' = 6 - 24t$$

問1　$x(t)$ が以下の場合に、速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

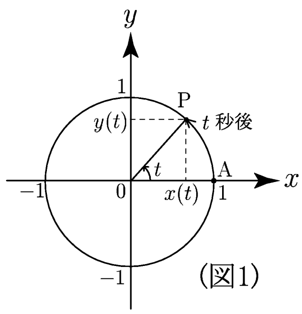
(1)　$x(t) = 15 - 6t + 4t^2 - 5t^3$　,　$v(t) =$　,　$a(t) =$

(2)　$x(t) = 3\sin(2t)$　,　$v(t) =$　,　$a(t) =$

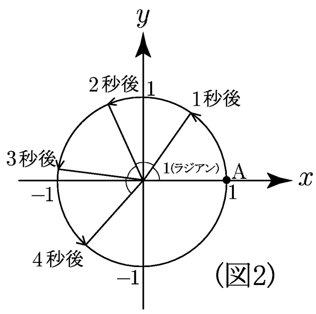
(3)　$x(t) = e^{3t}\cos(4t)$　,　$v(t) =$　,　$a(t) =$

問2　$x(t) = 3\cos(2t)$ のとき、速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求め、 $a(t)$ を $x(t)$ で表せ。

＜等速円運動１＞



(図1)



(図2)

例１

原点を中心として半径１の円周上を点Ｐが等速度回転している。点 A(1,0) から出発して、t 秒後に t(ラジアン) だけ回転するとすれば (図 1)

$$\text{角の回転速度 (角速度)} = \frac{t(\text{ラジアン})}{t(\text{秒})} = 1(\text{ラジアン / 秒}) = 1(\text{rad/s})$$

である。つまり１秒間に $1(\text{ラジアン}) = \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$ 回転する。(図 2)

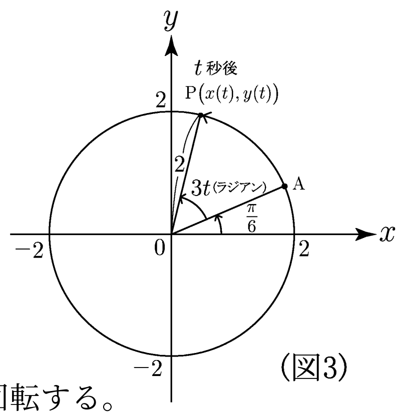
図１より t 秒後の点Ｐの位置を $\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$ とすると１ページの三角関数の定義より

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin t$$

である。

例２

点Ｐは図３の円周上を点Ａから出発して等速度回転している。t 秒後に $3t$(ラジアン) だけ回転するとすれば



(図3)

$$\text{角速度} = \frac{3t(\text{ラジアン})}{t\ \text{秒}} = 3(\text{rad/s})$$

である。つまり１秒間に $3(\text{ラジアン}) \fallingdotseq 171.9^\circ$ 回転する。

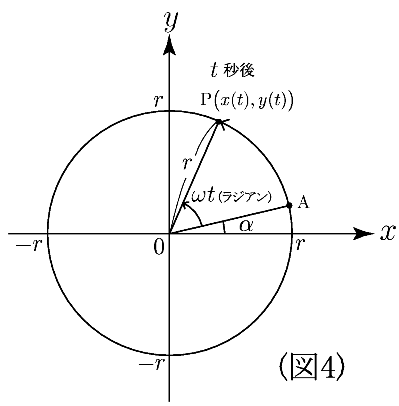
t 秒後の位置を $\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$ とすると、４ページの極座標表示より

$$x(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \quad , \quad y(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$$

である。

問

原点を中心として半径 r の円周上を点Ｐは等速度回転している (図 4)。点Ａから出発し、t 秒後に ωt(ラジアン) だけ回転しているとする。(ただし ω(オメガ) は定数)。



(図4)

(1) 角速度を求めよ。

(2) t 秒後の点Ｐの位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ を求めよ。

＜等速円運動2＞

円周上の回転運動の y 座標は2ページより sin のグラフになる。ここでは回転の速さを考える。

例1

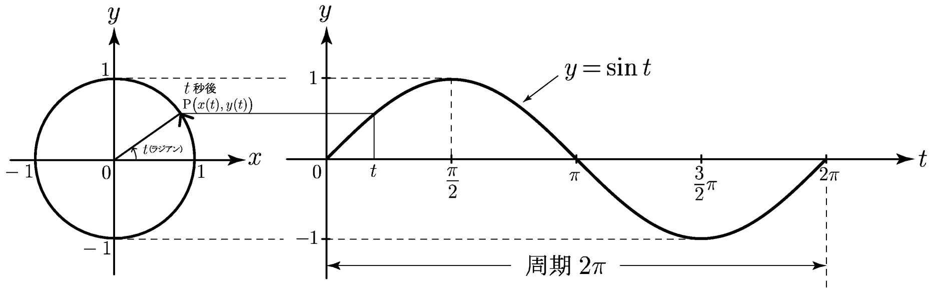
前ページ例1の場合

$\boxed{\text{角速度が }1(\text{rad/s})}$

であり t 秒後の位置が

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t, \sin t)}$

である。これは 2π 秒 ($\fallingdotseq 6.28$ 秒)
間に1回転する回転運動であり、
その y 座標のグラフ $(y = \sin t)$ は周期 2π の正弦波である。



例2

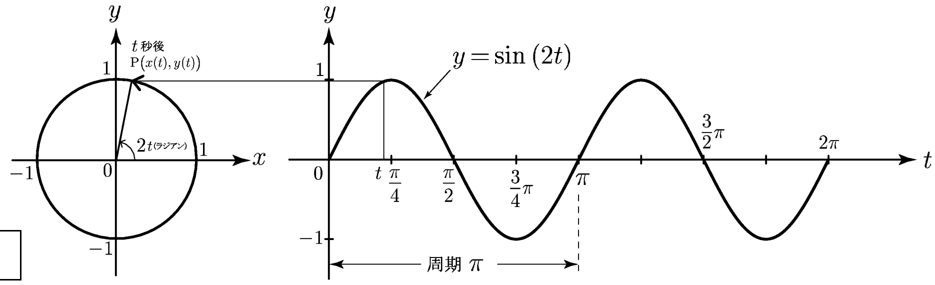
例1と同じ円周上の
回転運動で、2倍の速さ

$\boxed{\text{角速度が }2(\text{rad/s})}$

のとき t 秒後の位置は

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos(2t), \sin(2t)\big)}$

である。これは 2π ($\fallingdotseq 6.28$ 秒)
間に2回転する回転運動であり、
その y 座標のグラフ $\big(y = \sin(2t)\big)$ は周期 π の正弦波である。



例3

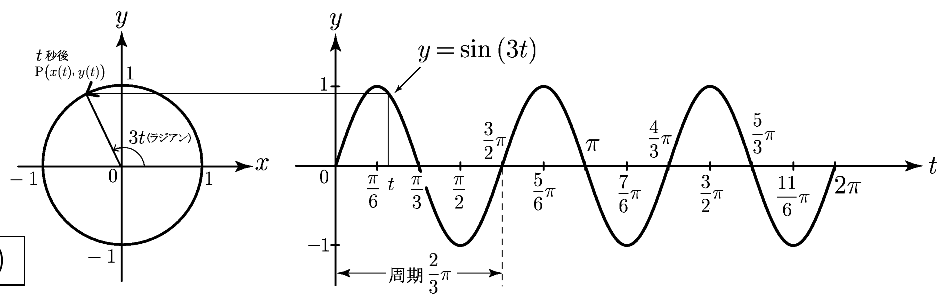
例1と同じ円周上の
回転運動で、3倍の速さ

$\boxed{\text{角速度が }3(\text{rad/s})}$

のとき t 秒後の位置は

$\boxed{\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos(3t), \sin(3t)\big)}$

である。これは 2π 秒間に
3回転する回転運動であり、
その y 座標のグラフ $\big(y = \sin(3t)\big)$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の正弦波である。



問　ω(オメガ) を正の定数とする。上の例と同じ
回転運動で、ω 倍の速さ、つまり

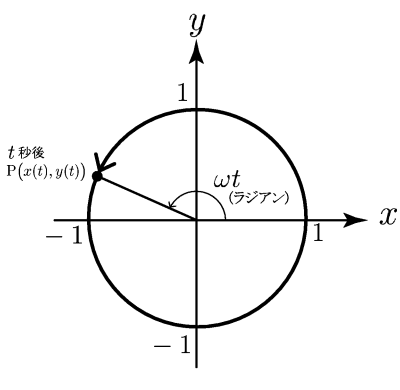
$\boxed{\text{角速度が }\omega(\text{rad/s})}$

のとき

(1) t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ を求めよ。

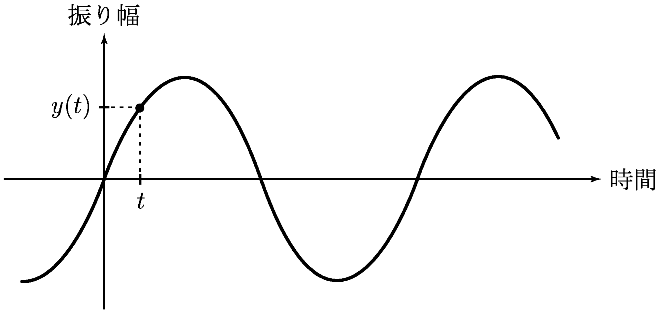
(2) 2π 秒間で何回転するか。

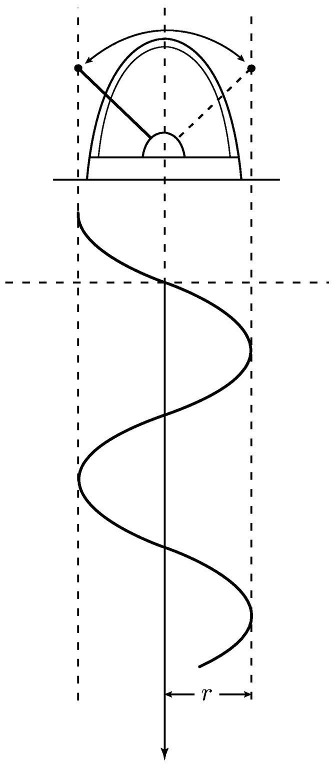
(3) y 座標のグラフの周期を求めよ。



＜単振動１＞

振り子の振動は一定の周期で、同じ動作を繰り返している。右にあるようにメトロノームの振り子を左端まで持って放すと、その軌道は下に書いた線のようになることがイメージできるだろう。この線を左に 90° 回軸させると下の図のように sin のグラフになる。





つまり、往復運動は sin を使った式で書けるということである。まず振りの大きさである振幅 r 、振りの速さを示す角速度 ω 、波がどの状態から始まったかを示す初期位相を α とおくと、ある時刻 t での振動の中心からの位置 $y(t)$ は

$$y(t) = r\sin(\omega t + \alpha)$$

と書くことができる。この式で表わされる運動を単振動という。

問１ メトロノーム以外で単振動するものを挙げよ。ただし減衰は考えないものとする。

問２ $x(t) = r\cos(\omega t + \alpha)$ を sin を使って表せ。ただし $\cos(\square) = \sin\left(\square + \dfrac{\pi}{2}\right)$ を使ってよい。

＜単振動２＞

31 ページでは、時刻 t における速度 $v(t)$ は、位置 $x(t)$ を使って

$$\boxed{v(t) = x'(t)}$$

と書けることを学んだ。さらに 33 ページでは加速度 $a(t)$ が

$$\boxed{a(t) = v'(t) = x''(t)}$$

で求めることができた。前のページで使った式 $y(t) = r\sin(\omega t + \alpha)$ も時刻 t での位置を表していた。つまり単振動の加速度も $y(t)$ を微分することで求めることができるのである。

例　$y(t) = 5\sin(2t)$ について $v(t)$ と $a(t)$ を求める。

$$\begin{aligned} v(t) &= y'(t) \\ &= \frac{d}{dt}\,5\sin(2t) = 5(2t)'\cos(2t) = 10\cos(2t) \end{aligned}$$

t で微分することを表している

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) \\ &= \frac{d}{dt}10\cos(2t) = -10(2t)'\sin(2t) = -20\sin(2t) \\ &= -4 \times \underbrace{5\sin(2t)}_{\substack{\| \\ y(t)}} \end{aligned}$$

よって　$a(t) = -4y(t)$

問　以下の場合の $y(t)$ に対し、速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求め $a(t)$ を $y(t)$ で表せ。

(1) $y(t) = 5\cos(2t)$

$v(t) =$

$a(t) =$

(2) $y(t) = 3\sin(\pi t)$

$v(t) =$

$a(t) =$

< 単振動3 >

前ページでは $x(t)$ の加速度 $a(t)$ つまり $x''(t)$ は必ず $x(t)$ を使って表すことができた。これはなぜかというと $x(t) = \sin t$ のとき

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sin t \\
x'(t) &= \cos t \\
x''(t) &= -\sin t
\end{aligned}
$$

というように $\sin$ と $\cos$ が交互に出てくるからである。この場合、2回微分すれば $\sin$ が出てくるので $x''(t)$ は $x(t)$ を使って表せるのである。このように三角関数には面白い性質がある。この性質がわかれば以下の問の解がどのような形になるのか予想できると思う。

例　$x(t) = C_1 \sin(\omega t + \alpha)$ とおくとき $x(t)$、$x''(t)$ を求め $x''(t)$ を $x(t)$ で表せ。(ただし C_1, α は定数)

(解)　$x'(t) = -C_1(\omega t + \alpha)' \sin(\omega t + \alpha) = -C_1 \omega \sin(\omega t + \alpha)$

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= -C_1 \omega (\omega t + \alpha)' \cos(\omega t + \alpha) = -C_1 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \\
&= -\omega^2 \times C_1 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)
\end{aligned}
$$

問　定数 C_2、α に対し以下の問に答えよ。

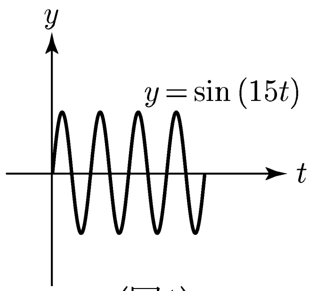
(1) $y(t) = C_2 \cos(\omega t + \alpha)$ とおくとき、$y'(t)$、$y''(t)$ を求め $y''(t)$ を $y(t)$ で表せ。

(2) 例で用いた $x(t)$ と (1) の $y(t)$ に対し、$u(t) = y(t) + x(t)$ とおくとき $u''(t)$ を $u(t)$ で表せ。

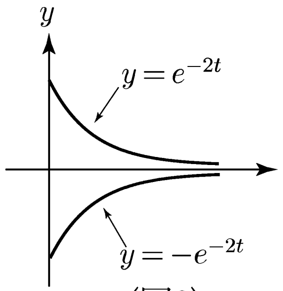
< 減衰振動 1 >

振り子のように放っておくと振動がしだいに弱くなっていく (振幅が小さくなっていく) ような運動を減衰運動という。

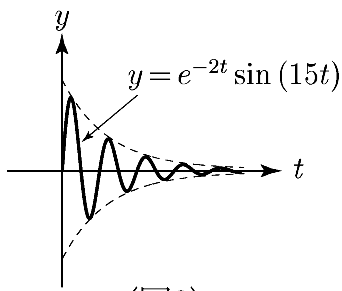
例　$y(t) = e^{-2t}\sin(15t)$ という減衰運動について速度 $y'(t)$ と加速度 $y''(t)$ を求める。
$y(t) = e^{-2t}\sin(15t)$ のグラフは (図 3) のように時が経つと減衰している。



(図1)



(図2)



(図3)

さて、この運動の速度 $y'(t)$ と加速度 $y''(t)$ は 9 ページの

$\boxed{\big(f(x)\times g(t)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$ を使うと

$$\begin{aligned} y'(t) &= \big(e^{-2t}\times\sin(15t)\big)' = (e^{-2t})'\sin(15t) + e^{-2t}\big(\sin(15t)\big)' \\ &= -2e^{-2t}\sin(15t) + 15e^{-2t}\cos(15t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(t) &= (-2e^{-2t})'\sin(15t) - 2e^{-2t}\big(\sin(15t)\big)' + (15e^{-2t})'\cos(15t) + 15e^{-2t}\big(\cos(15t)\big)' \\ &= 4e^{-2t}\sin(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 225e^{-2t}\sin(15t) \\ &= -221e^{-2t}\sin(15t) - 60e^{-2t}\cos(15t) \end{aligned}$$

という型で求めることができる。次のページではこの $y''(t)$ を $y(t)$ と $y'(t)$ を使って表してみる。

問　$y(t)$ が次の場合の $y''(t)$ を求めよ。

(1) $y(t) = e^{-2t}\sin(3t)$,　　　　$y''(t) =$

(2) $y(t) = e^{-2t}\cos(3t)$,　　　　$y''(t) =$

(3) $y(t) = e^{-2t}\cos(15t)$,　　　　$y''(t) =$

$<$ 減衰運動2 $>$

前のページでは減衰運動の例として $y(t) = e^{-2t}\sin(15t)$ を使って、
その速度 $y'(t)$ と加速度 $y''(t)$ が

$$y'(t) = -2e^{-2t}\sin(15t) + 15e^{-2t}\cos(15t)$$

$$y''(t) = 4e^{-2t}\sin(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 225e^{-2t}\sin(15t)$$

となることを説明した。さて $y''(t)$ を $y(t)$ と $y'(t)$ を使って表わしてみよう。

例 $y(t) = e^{-2t}\sin(15t)$ の場合の $y''(t)$ を $y(t)$ と $y'(t)$ で表せ。

$$\begin{aligned} y''(t) &= 4e^{-2t}\sin(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 225e^{-2t}\sin(15t) \\ &= -2\{\underbrace{-2e^{-2t}\sin(15t) + 15e^{-2t}\cos(15t)}_{=\,y'(t)}\} - 30e^{-2t}\cos(15t) - 225\underbrace{e^{-2t}\sin(15t)}_{=\,y(t)} \\ &= -2y'(t) - 30e^{-2t}\cos(15t) - 225y(t) \end{aligned}$$

ここで問題となるのが $-30e^{-2t}\cos(15t)$ である。これは $y'(t)$ を変形して

$$y'(t) = -2\underbrace{e^{-2t}\sin(15t)}_{=\,y(t)} + 15e^{-2t}\cos(15t) = -2y(t) + 15e^{-2t}\cos(15t)$$

両辺に -2 をかけると $-2y'(t) = 4y(t) - 30e^{-2t}\cos(15t)$

$$\therefore\quad -30e^{-2t}\cos(15t) = -2y'(t) - 4y(t)$$

これを $y''(t)$ に代入すると

$$\begin{aligned} y''(t) &= -2y'(t) - 4y(t) - 2y'(t) - 225y(t) \\ &= -229y(t) - 4y'(t) \end{aligned}$$

問 前ページで求めた $y''(t)$ を $y(t)$ と $y'(t)$ を使って表せ。

(1) $y(t) = e^{-2t}\sin(3t)$, $\qquad y''(t) =$

(2) $y(t) = e^{-2t}\cos(3t)$, $\qquad y''(t) =$

(3) $y(t) = e^{-2t}\cos(15t)$, $\qquad y''(t) =$