＜関数の一次近似＞

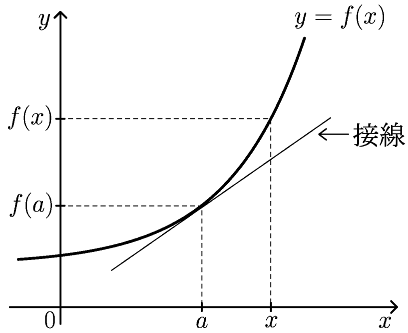
関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数は $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ である。

$x=a+h$ とおけば、$h\to 0$ のとき $x\to a$ より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき（$x\fallingdotseq a$ のとき）

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\fallingdotseq f'(a)$$



とみなせる。よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)}$$

が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、
これを**一次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)} \quad \text{（接線）}$$

を表すが、これは曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。
すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例 $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x)=\sqrt[3]{x}$ とおくと

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

より一次近似式は

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x}\fallingdotseq \sqrt[3]{a}+\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x-a)}$$

となる。ここで $a=1\ ,\ x=1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1}\fallingdotseq \sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1-1)=1+\frac{1}{3}\times 0.1=1+\frac{1}{30}$$

問 例にならって、$\sqrt{1.1}$ を近似せよ。