# 高知工科大学

# 基礎数学ワークブック

(2000年度版)

# 6

## 内容

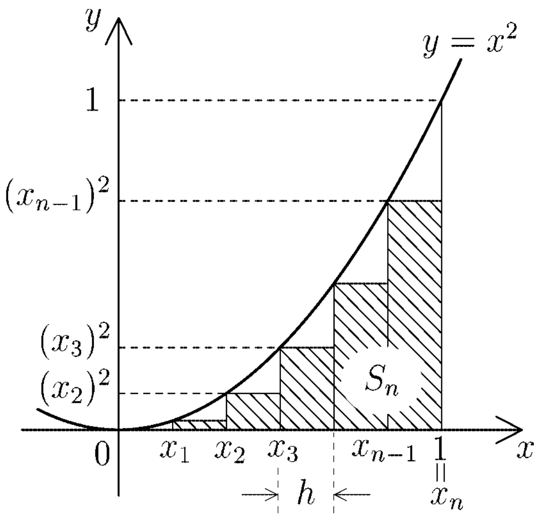
◎ 不定積分の練習

◎ 和の記号 $\sum$

◎ 区分求積法

◎ 定積分

◎ 面積・体積





電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

# ＜部分積分法１＞

**例題**　$\displaystyle\int x\cos dx$ を求めよ。

(解)　微分して $x\cos x$ になる関数の候補として

$x\sin x$ を考える。積の微分法より

$$(x\times\sin x)' = (x)'\times(\sin x) + (x)\times(\sin x)'$$

$$= 1\times\sin x + x\times\cos x$$

となる。これを式変形すると

$$x\cos x = (x\times\sin x)' - 1\times\sin x$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$\int x\cos dx = x\times\sin x - \int 1\times\sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

注）$(x\times\sin x)'$ を積分すると $x\times\sin x$　になる。

微分と積分は逆の操作であり、微分したものを
積分すると元にもどる。

**問**　積の微分法の公式より

$$\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

である。これを式変形すると

$$f(x)\times g'(x) = \big(f(x)\times g(x)\big)' - f'(x)\times g(x)$$

である。この両辺を積分することにより、次の

不定積分を $g'(x)$ を使わないで表せ。

$$\int f(x)\times g'(x)dx =$$

## ＜部分積分法 2＞

前ページの問より

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

が成り立つ。これを **部分積分法** という。

**例**　$\displaystyle\int (2x+1)\sin x\ dx$ を求めたい。

$$f(x) = 2x+1 \quad , \quad g'(x) = \sin x$$

とおくと、微分して $\sin x$ になる関数は $-\cos x$ だから、

$$g(x) = -\cos x$$

より

$$\int (2x+1)\sin x dx = (2x+1)\times(-\cos x) - \int (2x+1)' \times (-\cos x)dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

**問**　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int (4x+3)\sin x dx$

(2)　$\displaystyle\int (5x-4)\cos x dx$

(3)　$\displaystyle\int xe^x dx$

## ＜部分積分法３＞

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

は、左辺より右辺が簡単になる場合に使われる。つまり

$f(x)g'(x)$ より $f'(x)g(x)$ の方が簡単になるように、 $f(x)$ と $g(x)$

をえらぶ 。

**例題** $\int \log x dx$ を求めよ。

（解） $\log x = (\log x) \times 1$ と考え、

とおくと、
$$f(x) = \log x \quad , \quad g'(x) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g(x) = x$$

より

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (\log x) \times 1 dx \\ &= (\log x) \times x - \int \left(\frac{1}{x}\right) \times x dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

注） $\log x$ は、微分すると $\dfrac{1}{x}$ になり、簡単になるから、こちらを $f(x)$ とした。

**問** 次の不定積分を求めよ。

$$\int (\log x) \times x dx =$$

## ＜不定積分の検証＞

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して、$F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

**例1** 置換積分法により

$$\int x^2(x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$$

を得た。これが正しいかどうか検証する。

$$y = \frac{1}{15}(x^3+1)^5,\ u = x^3+1$$

とおいて右辺を合成関数の微分法によって微分すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{15}u^5\right)' \times (x^3+1)' \\ &= \frac{1}{15} \times 5u^4 \times 3x^2 = x^2u^4 = x^2(x^3+1)^4\end{aligned}$$

より正しい。

**例2** 部分積分法より

$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$$

を得たこれが正しいかどうかを検証する。右辺を微分すると、
積の微分法より

$$\begin{aligned}(x\sin x + \cos x)' &= (x)' \times \sin x + x \times (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= 1 \times \sin x + x \times \cos x - \sin x \\ &= x\cos x\end{aligned}$$

より正しい。

**問** 次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x(x^2+3)^4 dx = \frac{1}{10}(x^2+3)^5 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3}\log|x^3+1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + e^x + C$

## ＜不定積分の練習１＞

**問１** 次の不定積分を求めよ。（ただし $n \neq -1$）

(1) $\displaystyle\int dx =$

(2) $\displaystyle\int x^n dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx =$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} dx =$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

**問２** ワークブック 5 の 35,36 ページを参考にして、次の不定積分をを求めよ。（ただし $n \neq -1, a \neq 0$）

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b} dx =$

(3) $\displaystyle\int (4x+3)^5 dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+6)^3} dx =$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{3x-1} dx =$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}} dx =$

(7) $\displaystyle\int \left(2x+1+\frac{1}{x}\right) dx =$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x} dx =$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x^2} dx =$

(10) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x-1}{x^3} dx =$

(11) $\displaystyle\int \frac{4}{x+1} dx =$

(12) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+1)^2} dx =$

(13) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx =$

(14) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x+1} dx =$

## < 不定積分の練習２ >

**問 1** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos x dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

**問 2** ワークブック 5 の 36 ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。（ただし $a \neq 0$）

(1) $\displaystyle\int e^{ax+b} dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(ax+b) dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(ax+b) dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx =$

**問 3** ワークブック 5 の 23 ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。（ただし $a \neq 0$）

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$=$

(2) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

$=$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$=$

**問 4** ワークブック 5 の 40 ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx =$

(2) $\displaystyle\int \tan x dx =$

**問 5** 2 ページ,3 ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x e^x dx =$

(2) $\displaystyle\int \log x dx =$

## ＜不定積分の練習3＞

$\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}dx = \log|x-\alpha| + C$ より分数関数で分母が因数分解できる場合は積分できる。

**例** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ を求めたい。

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \qquad \cdots \ (*)$$

より

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

(注) （$*$）のような変形を、**部分分数に分ける**という。
$(*)$ の形を求めるためには分母を因数分解し

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

と置いて両辺に $x^2-1$ をかけると

$$1 = a(x+1) + b(x-1)$$

であり右辺を $x$ の一次式の形にすると

$$1 = (a+b)x + a - b$$

より $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{2}, \ b = -\dfrac{1}{2}$ 　であるから

$(*)$ の形が得られる。

**問** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x}dx$

## < 不定積分の練習4 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式　$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

**例** (1) $\displaystyle\int\cos^2 x dx = \int\frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(2) $\displaystyle\int\sin(2x)\cos x dx = \int\frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x)-\frac{1}{2}\cos x + C$$

**問** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sin^2 x dx=$

(2) $\displaystyle\int\cos(3x)\cos x dx=$

(3) $\displaystyle\int\sin(3x)\sin(2x)dx=$

## < 和の記号 $\sum$（シグマ）１ >

数列の和を表すのに、記号 $\sum$ を使って、次のように書くこともある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ここで $a_k$ は数列の第 $k$ 項を表し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は、$k$ が $1, 2, 3, \cdots, n$ とかわるときの $a_k$ をすべて加えることを表す記号である。
$\sum$ は、（アルファベットの $s$ の大文字）$S$ に相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

**例** ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

**問** 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。（和は計算しなくてもよい）

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^3$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (2k-1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (4k-3)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 1$

## ＜和の記号 $\sum$（シグマ）２＞

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_n$$

のように記号 $\sum$ を使うと、和が簡単に書ける。

**例１** (1)　$2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2)　$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots 99^2$ は第 $k$ 項が $(2k-1)^2$
である数列の初項から第５０項までの和だから

$$1^2 \ + \ 3^2 \ + \ 5^2 \ + \ \cdots \ + \ 99^2 \ = \ \sum_{k=1}^{50} (2k-1)^2$$

---

**問１**　次の和を、$\sum$ を使って表せ。

(1)　$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$

(2)　$1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) =$

(3)　$1 + 3 + 5 + \cdots + 19 =$

(4)　$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 300 =$

---

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$　は数列 $\{a_k\}$ の第 $m$ 項から第 $n$ 項までの和を表す。

**例２** (1)　$\displaystyle\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

---

**問２**　次の和を $\sum$ を使わないで表せ。（和は計算しなくてもよい）

(1)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (k^2 + 3)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=4}^{8} (2k-3)(3k-2)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k$

## <和の記号 Σ(シグマ) 3 >

記号 Σ の定義から次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\\ \sum_{k=1}^{n}ca_k&=c\sum_{k=1}^{n}a_k\quad (c\text{ は定数})\end{aligned}}$$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個の和}}=n$ と等差数列の和 (ワークブック 2 ) の結果より

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}1=n}\quad,\quad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

が成り立つ。

**例 1** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}+3\times n=2n^2+5n$

**問 1** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+4)=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k-5)=$

**例 2** $1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times n=2n^2-n$

**問 2** 次の和を求めよ。

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$

(2) $2+5+8+11+\cdots+(3n-1)=$

(3) $3+9+15+21+\cdots+(6n-3)=$

# ＜和の記号 $\sum$(シグマ) 4 ＞

ワークブック２の１４ページ問１の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

**問１** 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

**例** (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

**問２** 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

# ＜ 和の記号 $\sum$(シグマ) 5 ＞

ワークブック２の１４ページ問２の結果より

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

が成り立つ。

**問１** 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

**例** (1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2=55^2=3025$$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3$

$$=\left\{\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

**問２** 次の和を求めよ。

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=$

## < 和の記号 $\sum$(シグマ) 6 >

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を $\displaystyle\sum_{1 \leqq k \leqq n} a_k$ などと記す場合もある。また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は、

$k$ 以外の文字を使って、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum_{j=1}^{n} a_j$ のように書いてもよい。

**例1** $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{j=2}^{6} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

**問1** 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=2}^{4} x_i =$

(2) $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} y_j =$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 =$

(4) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^3 =$

**例2** $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=2}^{4}(x_i + y_j)\right\} = \sum_{i=1}^{3}\{(x_i + y_2) + (x_i + y_3) + (x_i + y_4)\}$

$$\begin{aligned} = \ & (x_1 + y_2) + (x_1 + y_3) + (x_1 + y_4) \\ & +(x_2 + y_2) + (x_2 + y_3) + (x_2 + y_4) \\ & +(x_3 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_3 + y_4) \end{aligned}$$

(注) 例 2 の和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(x_i + y_j) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 3 \\ 2 \leqq j \leqq 4}} (x_i + y_j)$ 等で表すこともある。

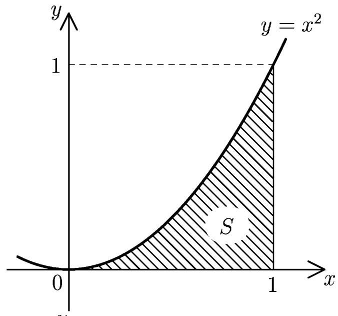
**問2** 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

$$\sum_{i=2}^{4}\left\{\sum_{j=4}^{5}(x_i \times y_j)\right\} =$$

# ＜区分求積法 1 ＞

**例** 曲線 $y=x^2$ と $x$ 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を次のようにして求める。

$\left(\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合} \\ \text{を } \textbf{区間}\ [a,b] \text{ という。} \end{array}\right)$

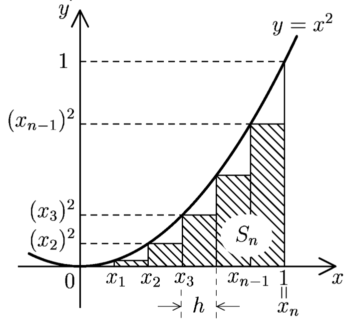



区間 $[0,1]$ を $n$ 等分し、分割した分点を

$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$

とする。分割した小区間の幅を $h$ とおくと、

$h=\dfrac{1}{n},\ x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh=1$




となる。各分点 $x_k$ から曲線 $y=x^2$ までの高さ $\left(=(x_k)^2\right)$ を縦とし、小区間の幅 $h$ を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 $S_n$ は

$$\begin{aligned} S_n &= (x_1)^2h+(x_2)^2h+(x_3)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h \\ &= h^2h+(2h)^2h+(3h)^2h+\cdots+\Big((n-1)h\Big)^2h \\ &= \left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right\}h^3=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}h^3 \end{aligned}$$

12 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、 $h=\dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n=\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

ここで、分割を限りなく細かくする ( $n\to\infty$ とする ) と、 $S_n$ は上の面積 $S$ に近づいていく。

**問** $S$ の値を $S_n$ の極限として求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

## ＜区分求積法 2＞

面積を求めるのに、前ページのように区間を小区間に細分し、和の極限として求める方法を **区分求積法** という。

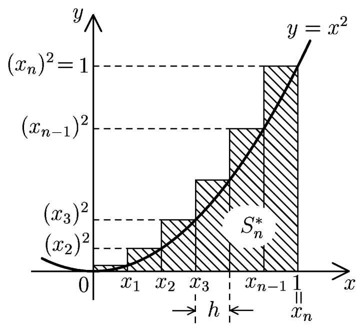
**問** 前ページの面積 $S$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*$ は

$$S_n^* = (x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h+(x_n)^2h$$

となる。ただし

$$h = \frac{1}{n},\ x_1 = h,\ x_2 = 2h, \cdots,\ x_n = nh(= 1)$$

である。




(1) $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2$ を $h$ と $n$ の式になおせ。

$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2 =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を使って (1) の結果を書きなおせ。

$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2 =$

(3) $h = \dfrac{1}{n}$ を代入することによって $S_n^*$ を $n$ だけの式にせよ。

$S_n^* = \Big\{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1})^2 + (x_n)^2\Big\}h =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*$ を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

## ＜区分求積法 3＞

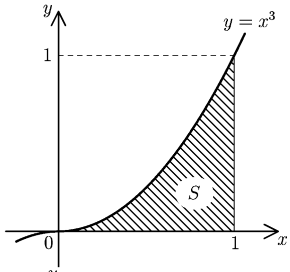
**例** 曲線 $y = x^3$ と $x$ 軸および直線 $x = 1$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を区分求積法で求める。
区間 $[0, 1]$ を $n$ 等分して、その分点を

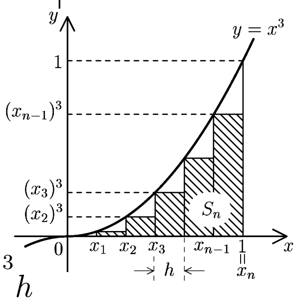
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

とする。分割した小区間の幅を $h$ とすると、

$$h = \frac{1}{n},\ x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh = 1$$

である。各分点 $x_k$ から曲線 $y = x^3$ までの高さ $\left(= (x_k)^3\right)$ を縦とし、小区間の幅 $h$ を底辺として、右図のような長方形を $n-1$ 個作る。図の斜線部分の階段状の面積 $S_n$ は




$$\begin{aligned} S_n &= (x_1)^3h + (x_2)^3h + (x_3)^3h + \cdots + (x_{n-1})^3h \\ &= h^3h + (2h)^3h + (3h)^3h + \cdots + \Big((n-1)h\Big)^3 h \\ &= \left\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3\right\} h^4 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right\} h^4 \end{aligned}$$

13 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、

$h = \dfrac{1}{n}$ だから

$$S_n = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

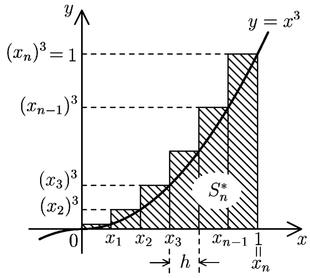
よって

$$S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

**問** 例と同じ面積 $S$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*$ は

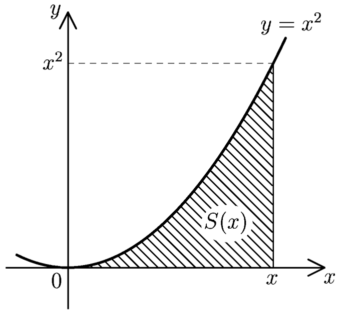
$$S_n^* = (x_1)^3h + (x_2)^3h + (x_3)^3h + \cdots + (x_n)^3h$$

となる。$S_n^*$ を $n$ だけの式で表し、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*$ を求めよ。



## ＜面積関数 $S(x)$ 1＞

**例**　右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



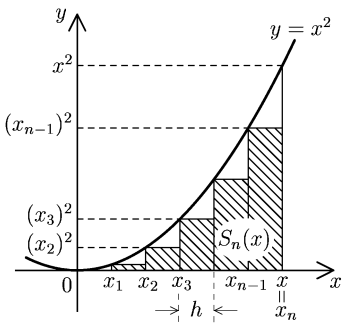

区間 $[0, x]$ を $n$ 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を $h$ とすれば

$$h = \frac{x}{n}\ ,\ x_1 = h\ ,\ x_2 = 2h\ ,\cdots ,\ x_n = nh (= x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は




$$\begin{aligned} S_n(x) &= (x_1)^2h + (x_2)^2h + \cdots + (x_{n-1})^2h \\ &= h^2h + (2h)^2h + \cdots + \big((n-1)h\big)^2 h \\ &= \big\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\big\}h^3 = \Big\{\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big\}h^3 \end{aligned}$$

12 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ で、$h = \dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x) = \Big\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\Big\} \times \left(\frac{x}{n}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)x^3$$

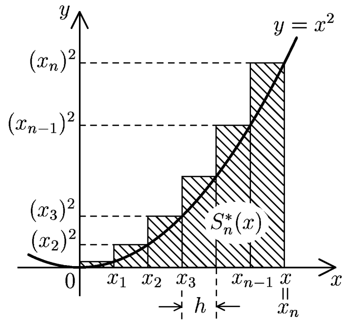
よって

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

**問**　例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

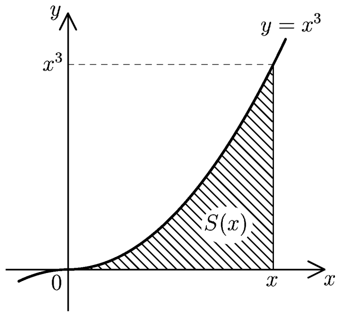
$$S_n^*(x) = (x_1)^2h + (x_2)^2h + \cdots + (x_n)^2h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$ を求めよ。



## <面積関数 $S(x)$ 2>

**例** 右図のような斜線部分の面積 $S(x)$ を区分求積法で求める。



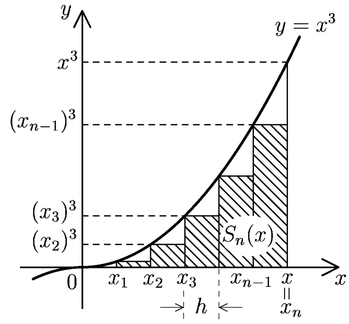

区間 $[0,x]$ を $n$ 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を $h$ とすれば

$$h = \frac{x}{n}\ ,\ x_1 = h\ ,\ x_2 = 2h\ ,\cdots,\ x_n = nh(=x)$$

となる。右図の斜線部分の階段状の面積 $S_n(x)$ は




$$\begin{aligned}
S_n(x) &= (x_1)^3h + (x_2)^3h + \cdots + (x_{n-1})^3h \\
&= h^3h + (2h)^3h + \cdots + \big((n-1)h\big)^3h \\
&= \left\{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\right\}h^4 = \left\{\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right\}h^4
\end{aligned}$$

13 ページより $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$ で、$h = \dfrac{x}{n}$ より

$$S_n(x) = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \times \left(\frac{x}{n}\right)^4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 x^4$$

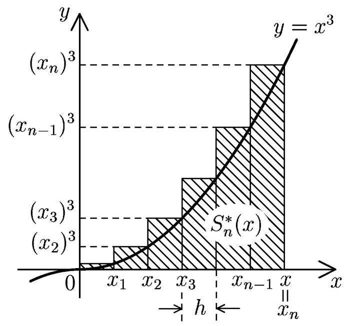
よって

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 x^4 = \frac{1}{4}x^4$$

**問** 例と同じ面積 $S(x)$ を求めるのに、右図のように長方形を作ると、階段状の面積 $S_n^*(x)$ は

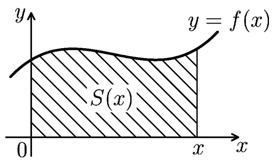
$$S_n^*(x) = (x_1)^3h + (x_2)^3h + \cdots + (x_n)^3h$$

となる。$S_n^*(x)$ を求め、和の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$ を求めよ。



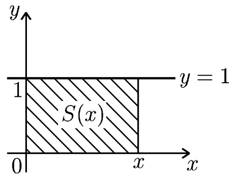
＜面積関数 $S(x)$ 3 ＞

正の値をとる関数 $f(x)$ に対し、右図の斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

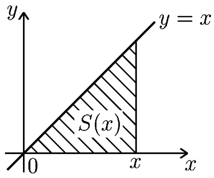



**問 1** 下図および 17,18 ページの結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=1$ のとき $S(x)=$




(2) $f(x)=x$ のとき $S(x)=$




(3) $f(x)=x^2$ のとき $S(x)=$

(4) $f(x)=x^3$ のとき $S(x)=$

**問 2** 問 1 の結果から $f(x)=x^4$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

**問 3** 問 1、問 2 の結果から、$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$ のときの $S(x)$ を類推せよ。

**問 4** 上の結果から考えて、一般の正の関数 $f(x)$ に関する面積関数を $S(x)$ とするとき、$f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関数があるか類推せよ。

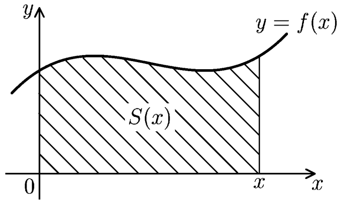
# ＜面積関数 $S(x)$ 4 ＞

前ページの結果から、一般の正の関数 $f(x)$ に対する
面積関数 $S(x)$ とすると

$$\bigl(S(x)\bigr)' = f(x)$$

の関係がある。これから、$S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の
一つであり、$S(0) = 0$ を満たす。即ち

$$\boxed{S(x) = \int f(x)dx \ , \ S(0) = 0}$$




**例** $f(x) = x^2 - 2x + 2$ のとき

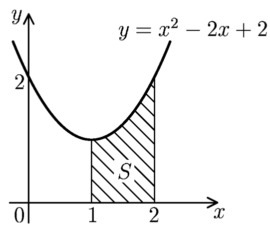
$$S(x) = \int (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + C$$

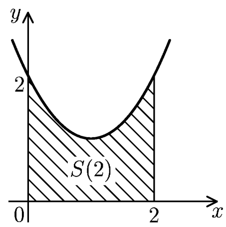
で $S(0) = 0$ より $C = 0$ 。 よって、

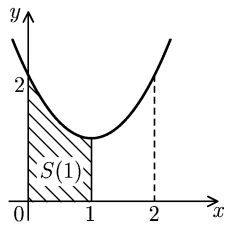
$$S(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$$

である。曲線 $y = x^2 - 2x + 2$ と $x$ 軸および
直線 $x = 1$ と $x = 2$ で囲まれた部分
(右図の斜線部分) の面積 $S$ は

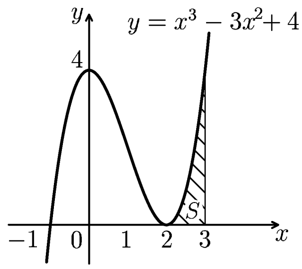
$$\begin{aligned} S &= S(2) - S(1) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times 2^3 - 2^2 + 2 \times 2\right) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + 2 \times 1\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$




**問** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ のとき、面積関数 $S(x)$
を求め、右図の斜線部分の面積 $S$ を求めよ。



## ＜定積分の定義＞

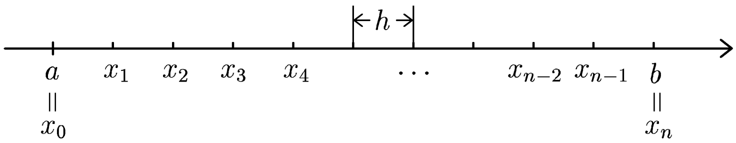
連続な関数 $f(x)$ と区間 $[a,b]$ に対し、$[a,b]$ を $n$ 等分した分点を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とし、分割した小区間の幅を $h$ とすると、$h = \dfrac{b-a}{n}$ であり、

$$x_1 = a + h \ , \ x_2 = a + 2h \ , \ \cdots \ , \ x_n = a + nh \ (= b)$$

となる。




今

$$S_n^* = f(x_1)h + f(x_2)h + \cdots + f(x_n)h$$

とおいて、$n \to \infty$ とした極限を

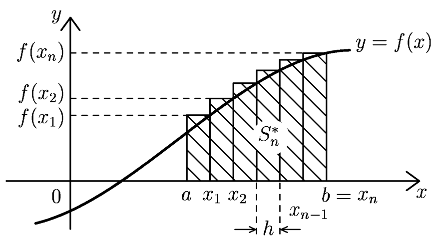
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} \{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\}h}$$

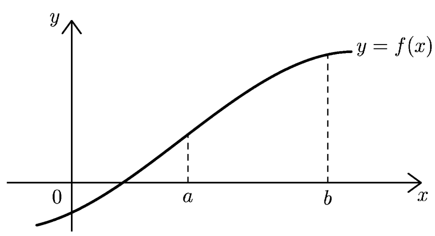
と書いて、関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの**定積分**という。

**問** 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq 0$ のとき、$S_n^*$ は右上図の斜線部分の面積を意味する。
このとき定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

は何を意味するか？
右下図を使って説明せよ。



# ＜微分積分学の基本定理＞

$f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は右上図の斜線部分の面積 $S$ （図１）を表す。面積関数 $S(x)$ を使うと

$$S = S(b) - S(a)$$

より

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

である。ここで $f(x)$ と $S(x)$ の関係は

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

である。これを**微分積分学の基本定理**という。

# ＜証明の概略＞

導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

である。$S(x+h) - S(x)$ は図５の斜線部分の面積であり $h$が小さいときは図６の長方形の面積で近似できる。すなわち

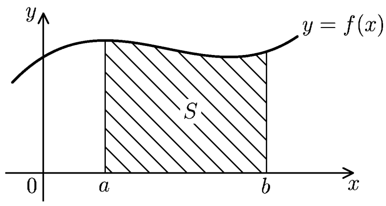
$$S(x+h) - S(x) \fallingdotseq f(x)h$$

より

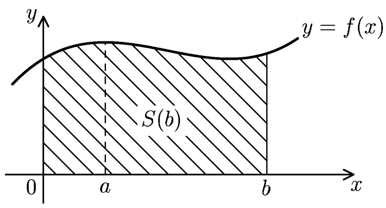
$h \fallingdotseq 0$ のとき $\quad \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$

よって

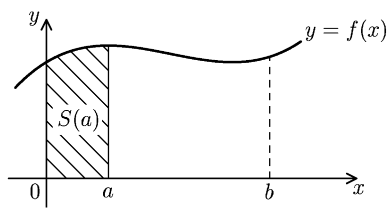
$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$



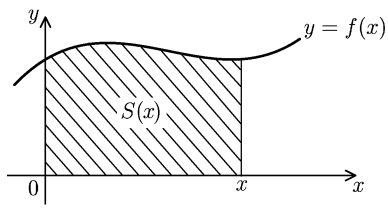
（図１）



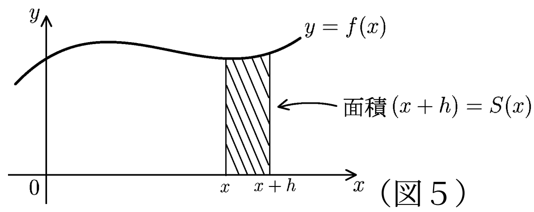
（図２）



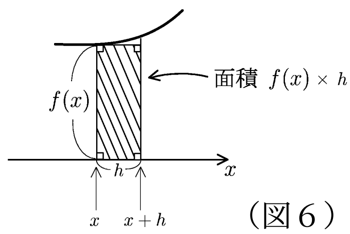
（図３）



（図４）



（図５）



（図６）

## < 定積分 1 >

前ページの結果から

$$S'(x) = f(x)$$

のとき、すなわち

$$\int f(x)dx = S(x) + C$$

のとき定積分は

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)}$$

で計算される。今後はこの計算式を定積分の定義とする。ここで $S(b) - S(a)$ を $\Big[S(x)\Big]_a^b$ と書くことにする。つまり

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)$$

である。

**例** (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 dx + C$ より

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3} \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 dx + C$ より

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times 1^4 = \frac{15}{4}$$

**問** 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^7 1dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 xdx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2 dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3 dx$

## ＜定積分２＞

前ページより 定積分の計算式は

$$\boxed{\int f(x)dx = S(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)}$$

であった。この計算式から $a < b$ でない場合でも

$$\int_a^a f(x)dx = S(a) - S(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = S(a) - S(b) = -(S(b) - S(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

となる。

**例**　(1) $\displaystyle\int_1^1 (2x^4 - 5x)dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_2^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_2^1 = 1^3 - 2^3 = -7$

**問**　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^2 (x^4 - 5x^3)dx$

(2) $\displaystyle\int_4^4 \sqrt{x}dx$

(3) $\displaystyle\int_\pi^\pi \cos x dx$

(4) $\displaystyle\int_2^1 x^3 dx =$

(5) $\displaystyle\int_3^0 x^4 dx$

(6) $\displaystyle\int_1^{-1} (x^2 - 1)dx$

(7) $\displaystyle\int_4^0 (x - 3)dx$

(8) $\displaystyle\int_2^{-2} (x^3 + x)dx$

## ＜ 定積分 3 ＞

**問 1** 次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int dx =$

(2) $\displaystyle\int x^n dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} =$

(4) $\displaystyle\int e^x dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos x dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin x dx =$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} dx =$

(9) $\displaystyle\int \sqrt{x} dx =$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

**問 2** 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx =$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^7 dx =$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} =$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^x dx =$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x dx =$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(8) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3} dx =$

(9) $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{x} dx =$

(10) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

## ＜定積分４＞

**問１** ワークブック５の35, 36ページを参考にして、次の不定積分を求めよ。ただし $a \neq 0$, $n \neq -1$ である。

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{ax+b}\, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b} dx$

(6) $\displaystyle\int \cos(ax+b) dx$

(7) $\displaystyle\int \sin(ax+b) dx$

(8) $\displaystyle\int e^{ax+b} dx$

**問２** 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)^4 dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3x+4)^2}$

(3) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4x-3}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{3x-3}} dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x) dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x-1} dx$

## ＜ 定積分５ ＞

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

である。ここで変数 $x$ が、別の変数（例えば $t$ ）に変わっても

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

のように、定積分の値は変わらない。

**例** (1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2t - 3t^2)dt = \Big[t^2 - t^3\Big]_{-1}^{2} = (4-8) - (1-(-1)) = -6$

(2) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_1^2 = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3} \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right\}d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

**問** 次の定積分の値を求めよ。（ただし、$n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (5 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int_2^3 (2\pi r)dr =$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta =$

(4) $\displaystyle\int_a^b t^n dt =$

(5) $\displaystyle\int_0^4 t\sqrt{t}dt =$

## ＜定積分６＞

**例題**　$\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$　を求めよ。

（解）　上の定積分を求めるために、まず不定積分を求める。

$$u = x^3 + 1 \qquad \text{とおくと} \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

より、置換積分法によって

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int \frac{du}{dx}\sqrt{u}dx = \int \sqrt{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \sqrt{u}du$$
$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

となる。よって

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$
$$= \frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\times 27 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

（注）$9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 27$

**問**　次の不定積分と定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x-4}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^5 (2x+3)\sqrt{x^2+3x-4}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}dx$

## ＜定積分の置換積分法1＞

定積分の変数を明記するため

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \;\;, \qquad \int_\alpha^\beta g(u)du \;=\; \int_{u=\alpha}^{u=\beta} g(u)du$$

のように積分範囲を書くことにする。

**例**　前ページの例題 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ を不定積分を求めずに、次のように解く。

$u = x^3+1$ 　とおくと　 $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$

であり

$x=0$ のとき $u=1$ ，　$x=2$ のとき $u=9$

となるから

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{x^3+1}) \times 3x^2\,dx = \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{u}) \times \frac{du}{dx}dx$$

$$= \int_{u=1}^{u=9} \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3} \times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

**問**　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 4x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx$

## ＜定積分の置換積分法2＞

定積分が $\displaystyle\int_a^b f(g(x)) \times g'(x)\ dx$ の形のときは不定積分の置換積分法と同様にして

$$u = g(x)$$

とおくと

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\ g'(x)\ dx\ =\ \int_{x=a}^{x=b} f(u)\frac{du}{dx}\ dx\ =\ \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f(u)\ du}$$

がなりたつ。ただし

$\boxed{x = a\ \text{のとき}\ u = \alpha\ ,\quad x = b\ \text{のとき}\ u = \beta}$である。

積分範囲がかわることに注意せよ。

**例** $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + x - 1)^3\ (2x + 1)\ dx$ を求めたい。

$u = x^2 + x - 1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (x^2 + x - 1)' = 2x + 1$

であり

$x = 0$ のとき $u = -1$ , $x = 2$ のとき $u = 5$

より

$$\int_0^2 (x^2 + x - 1)^3\ (2x + 1)\ dx = \int_{x=0}^{x=2} u^3\ \frac{du}{dx}\ dx = \int_{u=-1}^{u=5} u^3\ du$$

$$= \left[\frac{1}{4}u^4\right]_{u=-1}^{u=5} = \frac{5^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{624}{4} = 156$$

**問** 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + x - 1)^4\ (2x + 1)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1}\ dx$

(3) $\displaystyle\int_0^3 2xe^{x^2}\ dx$

## ＜定積分の置換積分法3＞

**例題** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$ を求めよ。

(解) この問題は特別なケースであり、以下のようにおくとうまくできる。

$$x = \sin u \quad \text{とおくと} \quad \frac{dx}{du} = (\sin u)' = \cos u$$

であり

$$\frac{1}{2} \;=\; \sin(30^\circ) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad , \quad 1 \;=\; \sin(90^\circ) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

となるから、

$$\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\, dx \;=\; \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2}\, \frac{dx}{du} du$$

$$= \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1-\sin^2 u}\right) \cos(u)\, du \;=\; \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{x}{2}} \cos^2(u)\, du$$

$$= \int_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u)\right\} du \;=\; \left[\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u=\frac{\pi}{6}}^{u=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi)\right) - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \;=\; \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(注) ここで以下の三角関数の性質を使った。

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \;\; , \quad \cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2} \;\; \text{(半角の公式)}$$

**問** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$ を求めよ。

## ＜定積分の部分積分＞

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

**例**　(1) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)^2dx \;=\; \int_2^4 (x-2)\times\left\{\frac{(x-4)^3}{3}\right\}' dx$

$$= \left[(x-2)\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4 - \int_2^4 (x-2)'\times\frac{(x-4)^3}{3}\,dx$$

$$= (0-0) - \frac{1}{3}\int_2^4 (x-4)^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{(x-4)^4}{4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(0-\frac{(-2)^4}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx \;=\; \int_0^\pi x\times(\sin x)'\,dx$

$$= \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (x)'\times\sin x\,dx$$

$$= (\pi\sin\pi - 0) - \int_0^\pi \sin x\,dx$$

$$= -\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\Big\{-\cos\pi-(-\cos 0)\Big\} = -2$$

**問**　次の定積分を求めよ。

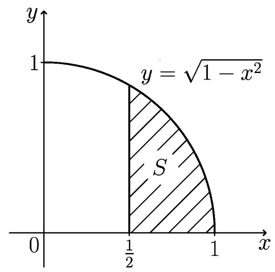
(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

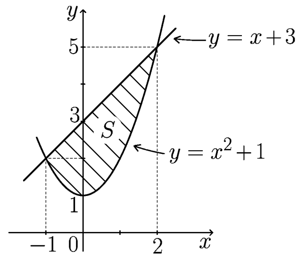
# ＜面積１＞

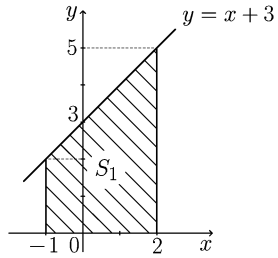
$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および直線 $x=a$ と $x=b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

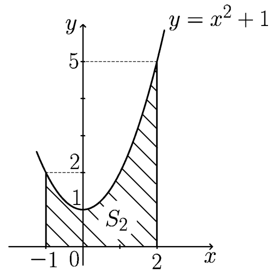



**例１** 半径１の円の一部分である右図のような斜線部分の面積 $S$ は、32 ページの例題より

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$




**例２** 直線 $y=x+3$ と曲線 $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を求める。
右図のような斜線部分の面積 $S_1$ , $S_2$ を考えると、以下のように計算できる。

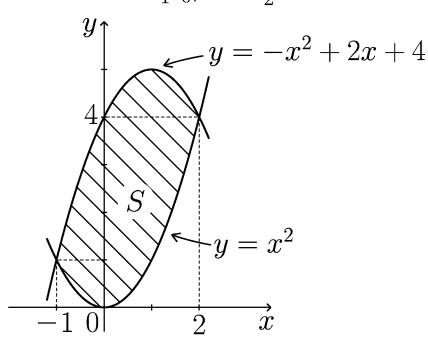
$$S=S_1-S_2=\int_{-1}^{2}(x+3)dx-\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx=\int_{-1}^{2}\left\{-x^2+x+2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$$

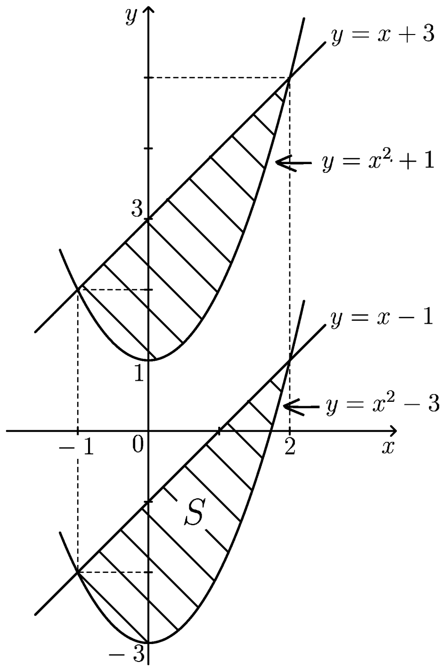
**問** 曲線 $y=-x^2+2x+4$ と $y=x^2$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。



## ＜面積２＞

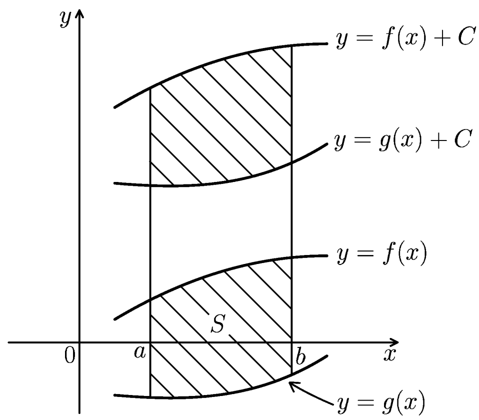
**例**　直線 $y=x-1$ と曲線 $y=x^2-3$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を求める。
直線と曲線を共に $y$ 軸方向に 4 だけ平行移動させると、
$y=x-1$ は $y=x+3$ に
$y=x^2-3$ は $y=x^2+1$ に移る。
$S$ は $y=x+3$ と $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積と等しいから
前ページの例より

$$S=\int_{-1}^{2}\Big\{(x+3)-(x^2+1)\Big\}dx=\frac{9}{2}$$

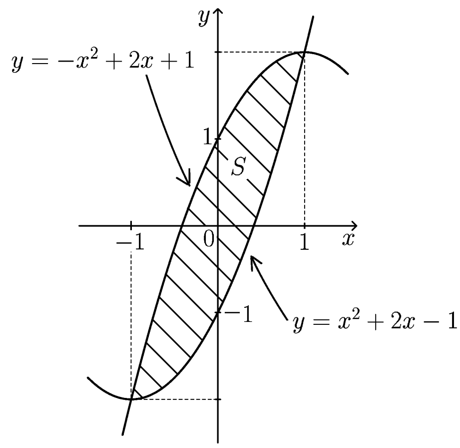



（注）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\Big\{(x-1)-(x^2-3)\Big\}dx$ としても求まる。

**問１**　右図のように曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と曲線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
（ただし $g(x)<f(x)$ とする）




**問２**　曲線 $y=-x^2+2x+1$ と $y=x^2+2x-1$ とで囲まれた部分の面積 $S$ を求めよ。



# ＜体積１＞

**例** 図１のような底面が（斜辺 $5\sqrt{2}$ の）直角二等辺三角形で高さが７の三角錐ＯＡＢＣの体積 $V$ を求めたい。ＯＣを $n$ 等分し、図２のような階段状の立体の体積 $V_n$ で近似する。

この階段状の立体は厚さ $\dfrac{7}{n}$ の三角柱の集まりであり、その体積を上から順に

$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ \cdots\ ,\ v_n$$

とおくと、

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ \cdots\ + v_n$$

となる。第 $k$ 番目の三角柱の体積を $v_k$ とする。図３のようにＯからの距離を $x_k$ , 二等辺三角形の一辺の長さを $y_k$ とおくと、

$$y_k = \frac{5}{7} \times x_k \quad , \quad x_k = \frac{7}{n} \times k$$

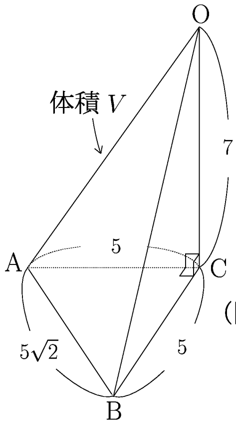
であるから、図４より

$$v_k = \frac{1}{2} \times y_k \times y_k \times \frac{7}{n} = \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times k^2$$

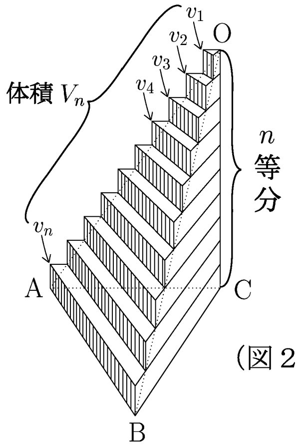
となる。よって

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 1^2 + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 2^2 + \cdots + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times n^2 \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \left\{1^2 + 2^2 + \ \cdots\ + n^2\right\} \\ &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{5^2 \times 7}{12} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

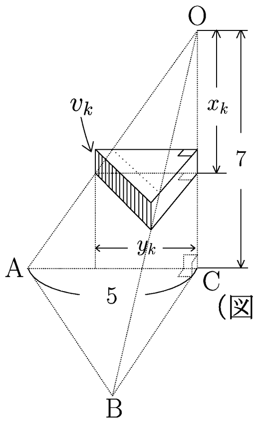
となる。



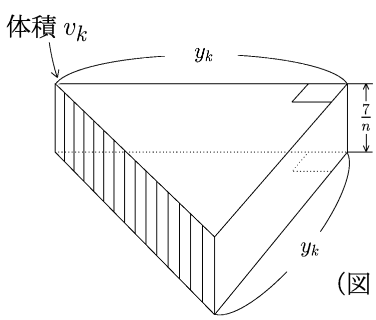
（図１）



（図２）



（図３）



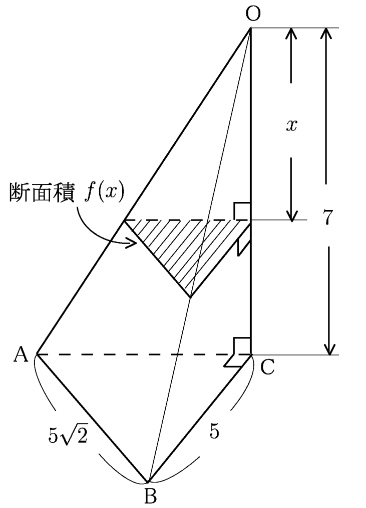
（図４）

**問** $n \to \infty$ として三角錐の体積 $V$ を求めよ。

$V = \displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n =$

## ＜体積 2＞

**例** 前ページの三角錐の体積 $V$ は以下のような方法で求めることができる。右図のように頂点 O からの距離が $x$ である水平面で切り取った断面の面積を $f(x)$ とおく。断面と底面は相似な三角形であり、相似比は $x:7$ であるから面積比は




$$断面積：底面積 = x^2 : 7^2$$

となる。底面は直角二等辺三角形であるから

$$底面積 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

従って $$f(x) : \frac{25}{2} = x^2 : 7^2$$

より $$f(x) = \frac{25}{98}x^2$$

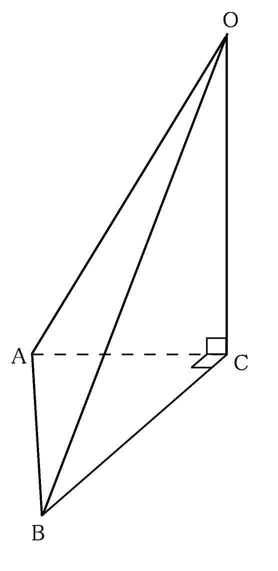
となる。三角錐 OABC はこの断面を $x=0$ から $x=7$ まで集めたものであるから

$$V = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx = \left[\frac{25}{294}x^3\right]_0^7 = \frac{175}{6}$$

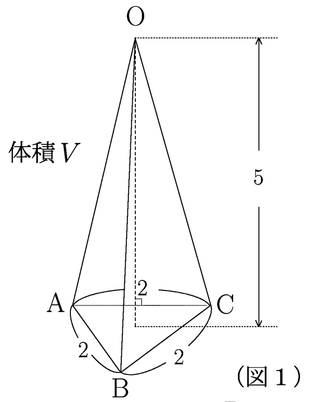
**問** 右図の三角錐 OABC は底面が

AC=3 ，BC=4 ，AB=5

の直角三角形で、高さが 6 (OC=6) の三角錐であるとする。三角錐 OABC の体積 $V$ を求めよ。

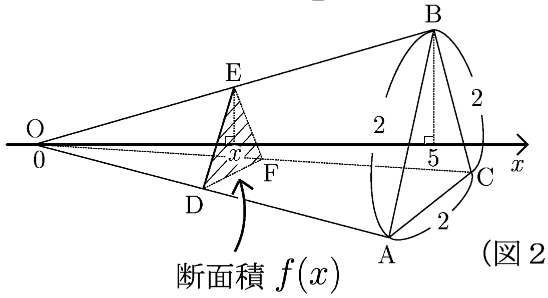


## <体積 3>



（図１）

**例** 一辺の長さが 2 の正三角形が底面で、高さが 5 の三角錐 OABC の体積 $V$ を求めたい。
図 2 のように三角錐を横にし、頂点 O から底面への垂線を $x$ 軸とする。頂点からの距離が $x$ である平面で切りとった断面 DEF の面積を $f(x)$



（図２）

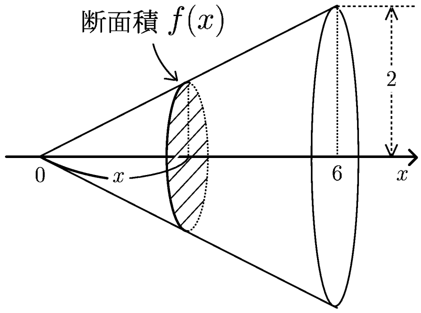
とおく。三角形 DEF は一辺が $\dfrac{2}{5}x$ の正三角形であるから、
その面積 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}x\right)\times\left(\frac{2}{5}x\right)\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{25}x^2$$

となる。よって三角錐の体積 $V$ は

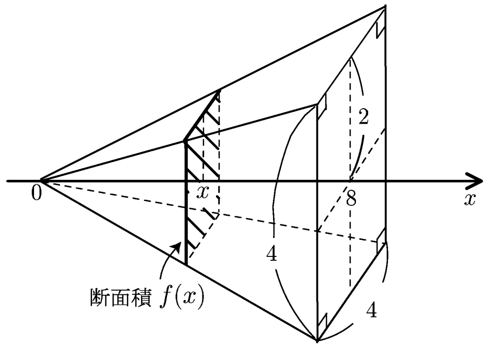
$$V=\int_0^5 f(x)dx=\int_0^5\frac{\sqrt{3}}{25}x^2dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{75}x^3\right]_0^5=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

**問１** 底面が半径 2 の円で、高さが 6 の円錐の体積 $V$ を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 $V$ を求めよ。




$f(x)=$　　　　　　, $V=$

**例２** 底面が一辺 4 の正方形で、高さが 8 の四角錐の体積 $V$ を求めたい。
右図の断面積 $f(x)$ と体積 $V$ を求めよ。



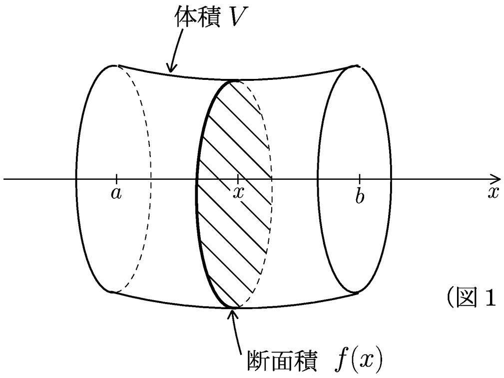

$f(x)=$　　　　　　, $V=$

# ＜体積 4＞

前ページの例からわかるように、ある立体が図１のように基準線（$x$ 軸）に垂直な断面の集まりと見なされるとき、断面積 $f(x)$ がわかっていれば図１の立体の体積 $V$ は

$$\boxed{V = \int_a^b f(x)dx}$$

で求められる。



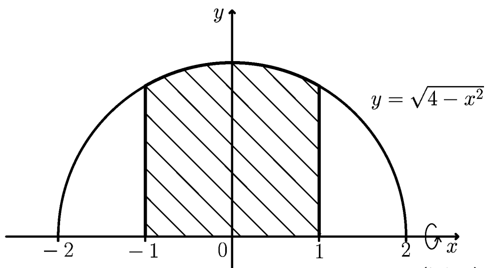
（図１）

**例**　図２の斜線部分を $x$ 軸のまわりに一回転してできた立体図は図３のような立体である。図３の斜線部分の断面は半径 $\sqrt{4-x^2}$ の円であるから、その断面積 $f(x)$ は

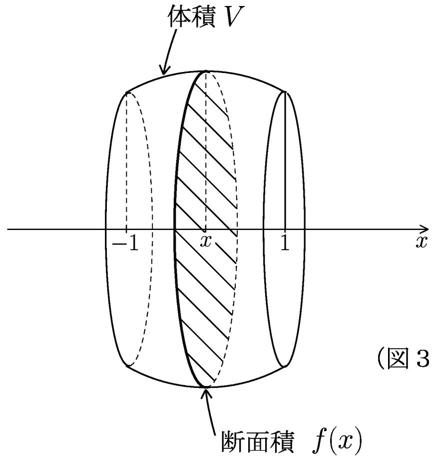
$$f(x) = \pi(\sqrt{4-x^2})^2 = \pi(4-x^2)$$

となる。よって図３の立体の体積 $V$ は

$$V = \int_{-1}^{1} \pi(4-x^2)dx = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{22}{3}\pi$$

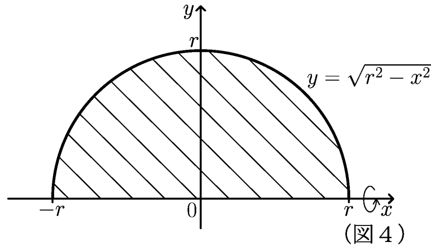


（図２）



（図３）

**問**　半径 $r$ の球は図４の斜線部分を $x$ 軸のまわりに一回転してできた立体と考えられる。例を参考にして半径 $r$ の球の体積 $V$ を求めよ。



（図４）

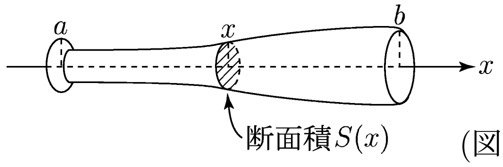
# ＜質量と重心＞

**例**　野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 ($x$ 軸) に垂直な断面の断面積 $S(x)$ が分かっている場合、この立体の体積 $V$ は

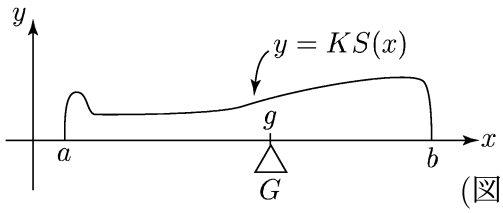
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

であった。もしこのバットの材質が均一であれば、その質量 $M$ は体積の定数倍 ($K$ 倍) になると考えられるので

$$M = KV = \int_a^b KS(x)dx$$




(図 1)




(図 2)

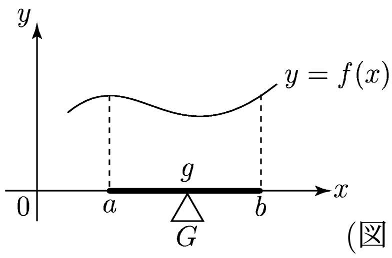
と表される。この場合被積分関数 $KS(x)$（図 2）をこの立体の**質量分布の密度関数**という。バットの重心 G の $x$ 座標 $g$ は

$$g = \frac{1}{M}\int_a^b xKS(x)dx$$

で与えられる。これは数直線上の区間 $[a, b] = \{x : a \leqq x \leqq b\}$ に質量があり、その質量の分布が $KS(x)$ で表されるとして計算したものである。

一般に、数直線の区間 $[a, b]$ に質量があるとき、その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば（図３）、全質量 $M$ と重心の座標 $g$ は

$$\boxed{M = \int_a^b f(x)dx\ ,\quad g = \frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx}$$




(図 3)

で表される。$f(x)$ を単に**密度関数** とか**重み関数**などという。
詳しくは 1999 年度ワークブック番外編 2「ベクトル解析」の 5,6 ページを参照
（ホームページ　http://www.ele.kochi-tech.ac.jp/inoue/workhome/workhome.html で見ることができます。）

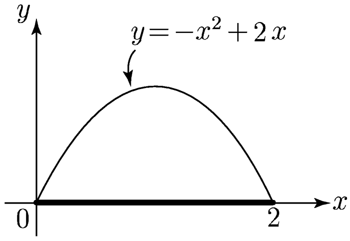
**問**　数直線上の区間 $[0, 2]$ に質量があり、その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = -x^2 + 2x \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

である場合、全質量 $M$ と重心の座標 $g$ は

$$M = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx\ ,\quad g = \frac{1}{M}\int_0^2 x(-x^2 + 2x)dx$$

で求められる。$M$ と $g$ を計算せよ。




(図 4)