高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

5

内容

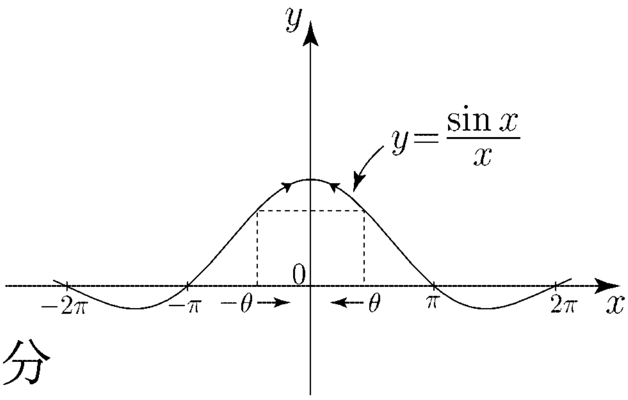
◎　三角関数の微分

◎　積･商の微分

◎　合成関数･逆関数の微分

◎　指数関数･対数関数の微分

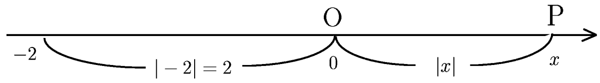
◎　不定積分



電子・光システム工学科

井上 昌昭　著

＜絶対値＞



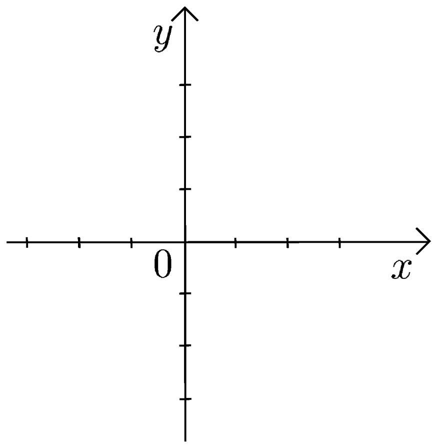
問 1 実数 x の数直線上の位置を点 P (x) とする。原点 O(0) からの距離 OP を x の 絶対値といい、

$$\mathrm{OP}=|x|$$

と表わす。例えば、$|2|=2$ 、$|-2|=2$ である。ここで、

$$y=|x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを書け。



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

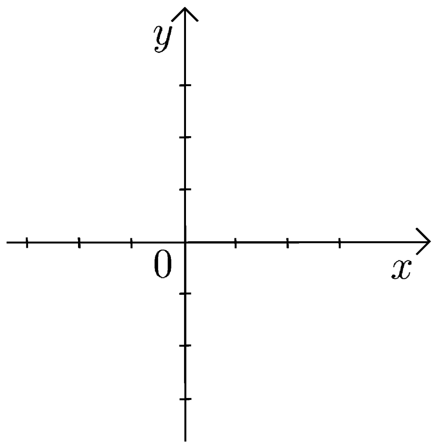
又、以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ の中に適当な文字式を入れよ。

「右のグラフより、$y=|x|$ のグラフは

$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y=\boxed{\quad\quad}$ であり
$x<0$ の範囲では、直線 $y=\boxed{\quad\quad}$ であることから、

$$y=|x|=\begin{cases}\boxed{\quad\quad} & (x \geqq 0)\\ \boxed{\quad\quad} & (x<0)\end{cases}$$

が分かる。」



問 2 関数 $y=|x^2-4|$ に対し、表を完成し、

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

右図に、グラフを書き、以下の文章の $\boxed{\quad\quad}$ の中に、
適当な数字又は文字式を入れよ。
「右のグラフより、 $y=|x^2-4|$ のグラフは、
３つの領域に分かれた式

$$y=|x^2-4|=\begin{cases}\boxed{\quad\quad\quad\quad} & (\boxed{\quad\quad} \leqq x)\\ \boxed{\quad\quad\quad\quad} & (\boxed{\quad\quad} < x < \boxed{\quad\quad})\\ \boxed{\quad\quad\quad\quad} & (x \leqq \boxed{\quad\quad})\end{cases}$$

で、表わされる。グラフをよく見ると、このグラフは２次関数

$$y=\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

のグラフで x 軸より下にある部分を、x 軸を対称軸として折り返したものと同じ。」

＜ ガウス記号 ＞

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leqq x < n+1,\ \ n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例　$[1.5] = \ 1,\qquad [2.76] = 2$

$[3.024] = \ 3,\qquad [4.8196] = 4$

$[0.135] = \ 0,\qquad [-0.52] = -1$

$[-1.23] = -2,\qquad [-2.746] = -3$

問１　次の値を求めよ。

(1) $[3.27] =$　　(2) $[9.787] =$　　(3) $[\,0.9\,] =$

(4) $[-0.61] =$　　(5) $[-5.73] =$　　(6) $[-1.5\,] =$

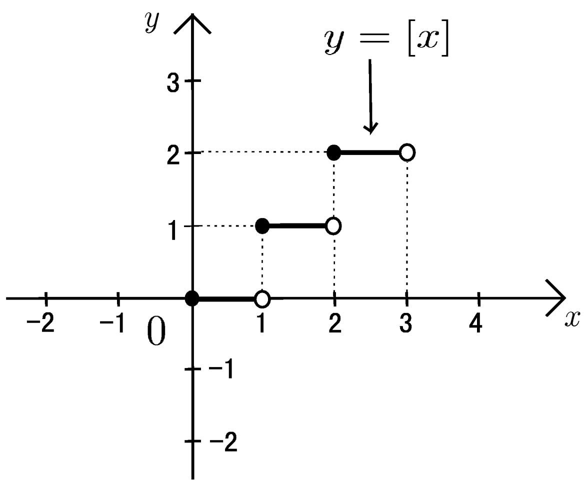
問２　関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



＜左極限・右極限1＞

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a-0}$

(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a+0}$

と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例1 $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2-0}$とは $x=1.9,\ x=1.99,\ x=1.999,\ \cdots$
というふうに2より小さい値をとりながら2に近づく極限である。
ガウス記号 $[x]$ の定義より

$$[1.9]=1\ ,\quad [1.99]=1\ ,\quad [1.999]=1\ ,\cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2-0}[x]=1}$$

例2 $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2+0}$とは $x=2.1,\ x=2.01,\ x=2.001,\ \cdots$
というふうに2より大きい値をとりながら2に近づく極限である。

$$[2.1]=2\ ,\quad [2.01]=2\ ,\quad [2.001]=2\ ,\cdots$$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2+0}[x]=2}$$

(注) (1) 0への左極限 $x\to 0-0$ を略して $\boxed{x\to -0}$ と書く。
$\boxed{x\to -0}$ とは $x=-0.1\ ,\quad x=-0.01\ ,\quad x=-0.001$ というふうに0より小さい値をとりながら0に近づく極限である。

(2) 0への右極限 $x\to 0+0$ を略して $\boxed{x\to +0}$ と書く。
$\boxed{x\to +0}$ とは $x=0.1\ ,\quad x=0.01\ ,\quad x=0.001$ というふうに0より大きい値をとりながら0に近づく極限である。

問 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}[x]$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3+0}[x]$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -0}[x]$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to +0}[x]$

＜左極限・右極限２＞

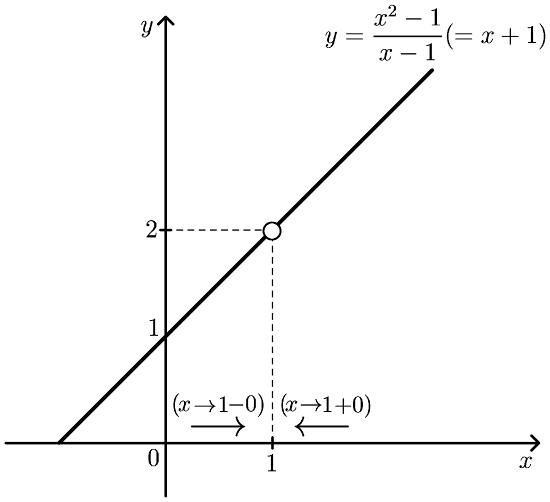
例１ 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x=1$ で定義されないが、$x=1$ における左極限と右極限は

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=2\ \ ,\ \ \lim_{x\to1+0}f(x)=2$$

のように一致する。このような場合は単に

$$\lim_{x\to1}f(x)=2$$

と書く。



一般の関数 $f(x)$ に対し、$x=a$ における左極限と右極限が同じ値 α に収束するとき、すなわち

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\alpha\ \ ,\ \ \lim_{x\to a+0}f(x)=\alpha$$

の両方の式がなりたつのとき、単に

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$$

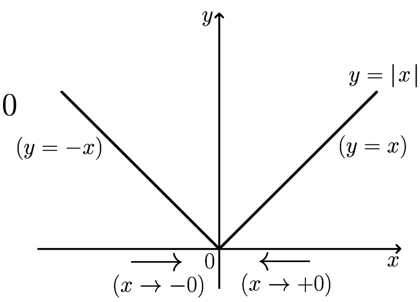
と書く。

例２ $f(x)=|x|$（絶対値）の場合

(1) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $\displaystyle\lim_{x\to-0}|x|=\lim_{x\to-0}(-x)=0$

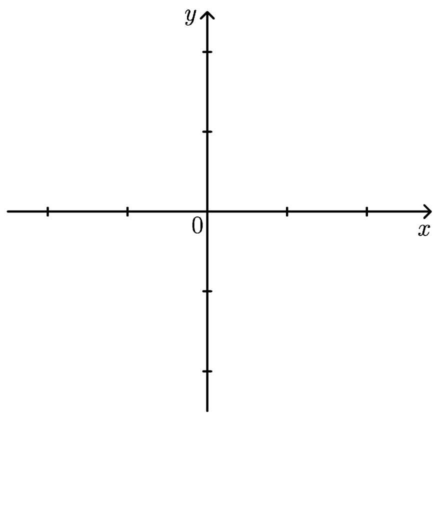
(2) $x>0$ のとき $|x|=\ x$ より $\displaystyle\lim_{x\to+0}|x|=\lim_{x\to+0}x=0$

よって (1) と (2) より $\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$

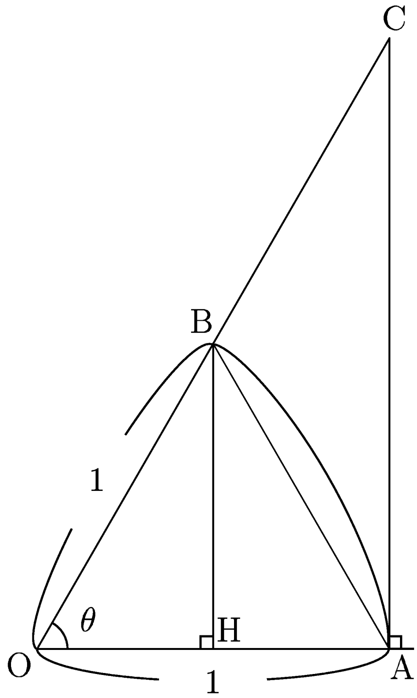


問 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$ に対し、次の極限値を求め、$y=\dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=$　　　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=$



＜三角関数の極限１＞



鋭角 θ（ラジアン）に対し、
半径１，中心角 θ の扇形 OAB
の面積を S とすると、ワークブック４
の４ページより

$$S = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{\theta}{2} \quad （半径\ r = 1）$$

となる。右図において、

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{OB}} = \sin\theta \ , \ \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}} = \tan\theta$$

であるから、

$$\mathrm{BH} = \sin\theta \ , \ \mathrm{AC} = \tan\theta$$

となる。

問１　三角形 OAB の面積 S_1 を θ で表せ。

問２　三角形 OAC の面積 S_2 を θ で表せ。

問３　右上図から

$$S_1 \ < \ S \ < \ S_2$$

である。この不等式を θ で表せ。

問４　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して、問３で得られた不等式を次の形にせよ。

$$\boxed{} \quad < \quad \theta \quad < \quad \boxed{}$$

□の中を $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を使って表せ。

＜三角関数の極限 2＞

前ページの結果より、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \qquad \sin\theta \ < \ \theta \ < \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

がわかる。

問 1 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin\theta > 0$ である。$(*)$ 式を $\sin\theta$ で割ることによって次の不等式が得られる。□ の中に適当な数字および数式を入れよ。

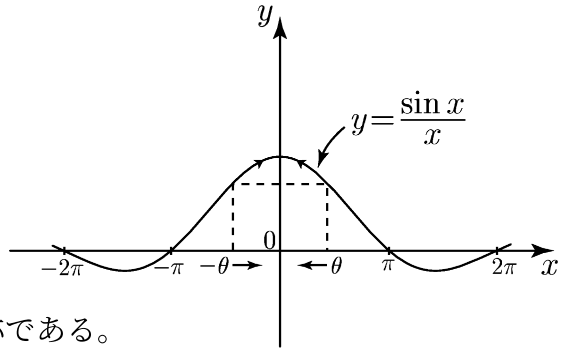
$$(**) \qquad \boxed{\qquad\quad} \ < \ \frac{\theta}{\sin\theta} \ < \ \boxed{\qquad\quad}$$

問 2 $\cos 0 = 1$ より $\theta \to +0$(右極限) のとき $\cos\theta \to 1$ である。
不等式 $(**)$ から次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta}{\sin\theta} =$$

問 3 上の結果を利用して次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} =$$



問 4 関数 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ のグラフは

$$\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}$$

より、右図のように y 軸に関し左右対称である。
従って

$$\underset{\substack{x \to +0 \\ (\text{右極限})}}{\lim} \frac{\sin x}{x} = \underset{\substack{x \to -0 \\ (\text{左極限})}}{\lim} \frac{\sin x}{x}$$

のように右極限と左極限が一致する。4 ページの例 2 と同様に考えて、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

< 三角関数の極限3 >

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ = \ 1}$$

が成り立つ。

例 1 $\cos 0 = 1$ ， $\sin 0 = 0$ ， $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{(1-\cos\theta)\times(1+\cos\theta)}{\theta \quad \times (1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \times \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right) = 1 \times \frac{0}{1+1} = 0$$

例 2 加法定理 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ と上の結果より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta)-\sin x}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta - \sin x}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x(\cos\theta - 1) + \cos x \sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left\{ -\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\sin x + \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos x \right\}$$

$$= -0 \times \sin x + 1 \times \cos x \ = \ \cos x$$

(注) ここで $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ， $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$ を用いた。

問 加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ と上の結果を
使って次の極限値を求めよ。(途中式も書くこと)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(x+\theta)-\cos x}{\theta}$$

＜三角関数の微分＞

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

より $\sin x$ の導関数は次の極限値

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

である。ここで 0 に近づく変数 h を θ に変えると、前ページの結果より

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \cos x$$

であるから $\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

問１　前ページの問の結果を用いて、$\cos x$ の導関数を求めよ。

$(\cos x)' =$

例　① $(2\sin x)' = (\sin x + \sin x)' = 2 \times (\sin x)' = 2\cos x$

② $$\begin{aligned}\left(x^2 + 2\sin x + 3\cos x\right)' &= \left(x^2\right)' + (2\sin x)' + (3\cos x)' \\ &= 2x + 2\cos x - 3\sin x\end{aligned}$$

問２　例にならって、次の関数を微分せよ。

(1) $(5\sin x - 4\cos x)' =$

(2) $(6 + 3x + x^2 - 2\sin x + 5\cos x)' =$

＜積の微分１＞

例　$h \to 0$ のとき

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \longrightarrow \big(\sin x\big)'$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \longrightarrow \big(\cos x\big)'$$

$$\cos(x+h) \longrightarrow \cos x$$

であるから

$$(\sin x \times \cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos(x+h)-\sin x\cos(x+h)+\sin x\cos(x+h)-\sin x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)\cos(x+h)+\sin x\left(\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right)\right\}$$

$$= \big(\sin x\big)' \times \cos x + \sin x \times \big(\cos x\big)'$$

$$= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

となる。

問　例を参考にして、一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数を $f(x)$，$g(x)$，$f'(x)$，$g'(x)$ で表せ。

$$\big(f(x) \times g(x)\big)' =$$

＜積の微分２＞

前ページの結果より、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数は

$$\boxed{\bigl(f(x)\times g(x)\bigr)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)}$$

である。

例 (1) $\bigl(x^3\sin x\bigr)' = \bigl(x^3\bigr)'\times\sin x + x^3\times(\sin x)'$

$$= 3x^2\sin x + x^3\cos x$$

(2) $\bigl(\cos^2 x\bigr)' = (\cos x\times\cos x)'$

$$\begin{aligned}&= (\cos x)'\times\cos x + \cos x\times(\cos x)'\\&= -\sin x\times\cos x + \cos x\times(-\sin x)\\&= -2\sin x\cos x\end{aligned}$$

問 次の関数の微分せよ。

(1) $(x\sin x)' =$

(2) $\bigl(x^2\cos x\bigr)' =$

(3) $\bigl(\sin^2 x\bigr)' =$

＜商の微分１＞

例　$h \longrightarrow 0$ のとき

$$\sin(x+h) \quad \longrightarrow \quad \sin x$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \quad \longrightarrow \quad (\sin x)'$$

であるから

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin(x+h)} - \dfrac{1}{\sin x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\dfrac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \right\} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h)\sin x} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ - \frac{\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \right\} = -\frac{(\sin x)'}{\sin x \sin x} \\
&= -\ \frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\ \frac{\cos x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

問　例を参考にして、一般の関数 $g(x)$ に対する次の関数の導関数を $g(x)$ と $g'(x)$ で表せ。

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

＜商の微分２＞

前ページの結果より

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}}$$

が成り立つ。

例 (1) $\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$

(2) $\left(\frac{1}{x+\sin x}\right)' = -\frac{(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2} = -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

(2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$

(3) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' =$

(4) $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' =$

< 分数関数の微分 >

分数関数 $\dfrac{\square}{\triangle}$ の微分は、$\dfrac{\square}{\triangle} = \square \times \dfrac{1}{\triangle}$ と考え

積の微分 $(\square \times \bigcirc)' = (\square)' \times \bigcirc + \square \times (\bigcirc)'$

と商の微分 $\left(\dfrac{1}{\triangle}\right)' = -\dfrac{(\triangle)'}{(\triangle)^2}$ を組み合わせてできる。

例

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left(\sin x \times \frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= (\sin x)' \times \left(\frac{1}{\cos x}\right) + (\sin x) \times \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'}{\cos x} + (\sin x) \times \left\{-\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}\right\}$$

$$= \frac{(\sin x)' \times \cos x - (\sin x) \times (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \times \cos x - (\sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問　次の関数を微分し、できるだけ簡単にせよ。

(1)　$\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)' =$

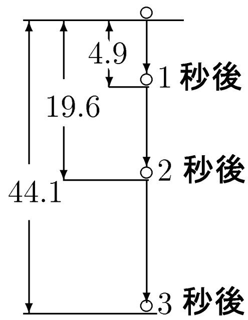
(2)　$\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' =$

＜ 速度 ＞

例 (自由落下) 物体を高い所まで持って上がり、静かに手を放すと地上に向かって落下する。 t 秒後に y (m) 落下するとすれば、

$$y = 4.9t^2$$

であることが実験からわかる。 $f(t) = 4.9t^2$ とすれば
1 秒後は　$y = f(1) = 4.9 \times 1^2 = 4.9$ (m)
2 秒後は　$y = f(2) = 4.9 \times 2^2 = 19.6$ (m)
3 秒後は　$y = f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1$ (m)　である。



この落下速度を調べたい。 $\boxed{(\text{速度}) = \dfrac{(\text{動いた距離})}{(\text{時間})}}$ だから、

1 秒後から 3 秒後までの平均速度は

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6 \quad (\text{m/s})$$

問 1　1 秒後から 2 秒後までの平均速度を求めよ。
(解)

h を微少時間とする。1 秒後から $(1 + h)$ 秒後の平均速度は、

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{4.9 \times (1+h)^2 - 4.9 \times 1^2}{h} = 4.9 \left\{ \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \right\} = 4.9 \times (2 + h)$$

である。ここで $h \to 0$ とすれば、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \{4.9 \times (2 + h)\} = 9.8$$

である。この値 9.8(m/s) が、ちょうど 1 秒後の **瞬間の速度** を意味する。この値は極限の形から、$y = f(t)$ の $t = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を意味する。

問 2　$f(t) = 4.9t^2$ として 2 秒後の瞬間の速度 $f'(2)$ を求めよ。

(解)　$f'(2) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

問 3　$f(t) = 4.9t^2$ として t 秒後の瞬間の速度 $f'(t)$ を求めよ。

(解)　$f'(t) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限でもあるから、導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す（全て同じ意味である）。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数（ x についての微分）であることを明記するためにある。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = 3x^2 - 4x + 5$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\qquad \dfrac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 5t^2 - 3t$ $\qquad \dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\qquad \dfrac{dS}{dr} =$

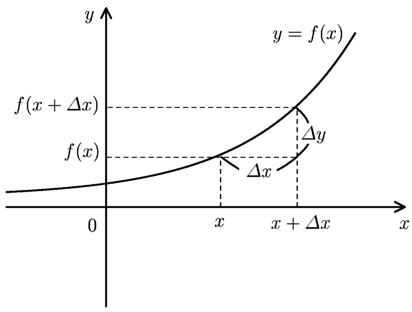
(5) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad \dfrac{dV}{dr} =$

$<$ 増分記号 $\varDelta$ (デルタ) $>$

関数　$y = f(x)$　と　x　の増分　$\varDelta x$　に対して、
y　の増分を

$$\varDelta y = f(x + \varDelta x) - f(x)$$

とおくと、導関数　$f'(x)$　は　$\varDelta x \to 0$　のとき
の平均変化率　$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$　の極限だから　$\dfrac{dy}{dx}$　と書く。



$$f'(x) = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号　$\varDelta x$　は、変数　x　の増えた量を表す。変数　x　が他の文字変数に変わっても同様である。

例　$\displaystyle \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(x + \varDelta x)^3 - x^3}{\varDelta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\varDelta t \to 0} \frac{(t + \varDelta t)^4 - t^4}{\varDelta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\sin(u + \varDelta u) - \sin(u)}{\varDelta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問　次の極限値を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{(x + \varDelta x)^5 - x^5}{\varDelta x} =$

(2) $\displaystyle \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\sin(t + \varDelta t) - \sin(t)}{\varDelta t} =$

(3) $\displaystyle \lim_{\varDelta u \to 0} \frac{\cos(u + \varDelta u) - \cos(u)}{\varDelta u} =$

＜ 合成関数 ＞

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとき、関数 $g(f(x))$ を考えることができる。この関数を $f(x)$ と $g(x)$ の **合成関数** という。

例1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$

$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$

問1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3,\ g(x) = 2x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \cos x,\ g(x) = 2x + 3$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = x^2 + 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^4 + 3,\ g(x) = \log_2 x,$ $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。たとえば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x\ ,\quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 + 2x + 3)^5$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \sin(4x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

＜合成関数の微分 1＞

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad \Big(= \sin\big((x+\Delta x)^3\big) - \sin(x^3)\Big)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\right)$$

$$= (\sin u)' \times (x^3)'$$

$$= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

問 関数 $y = \cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^4$ とおくと、 $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^4 - x^4$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx} =$

＜合成関数の微分 2＞

問 1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき、$\dfrac{dy}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ を、$\dfrac{dy}{du}\left(= \lim_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)$ と $\dfrac{du}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \qquad\qquad}$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(u^7\right)' \times \left(x^3 + 5x^2\right)' = 7u^6 \times \left(3x^2 + 10x\right) = 7\left(x^3 + 5x^2\right)^6\left(3x^2 + 10x\right)$$

問 2 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 + 3x - 1)^5$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(3x + 4)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^3 + 5x^2)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

＜ネピアの数１＞

数列 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を考える。

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \ , \ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \ , \ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} \fallingdotseq 2.44 \ , \ a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.48 \ , \ \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59 \ , \ \cdots \ , \ a_{100} \fallingdotseq 2.70 \ , \ \cdots \ , \ a_{1000} \fallingdotseq 2.716 \ , \ \cdots \ , \ a_{10000} \fallingdotseq 2.718$$

となり少しずつ増えながらある一定の値に近づく、その極限値を e で表す。

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e は無理数であり、その値は

$$e = 2.71828182845\cdots$$

であることが知られている。e をネピアの数ということもある。

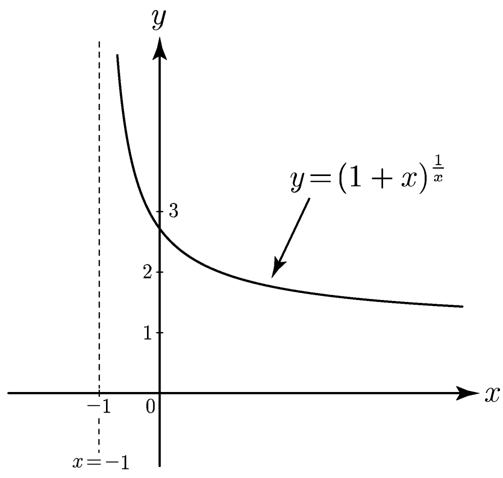
問 関数

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

を考える。この関数は $x=0$ と $x=-1$ で定義されていないが、グラフは右図のようになっている。
y 軸との交点 (y 切片) を求めたい。
y 切片は $x \to 0$ のときの極限値

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

である。この極限値を求めよ。



（ヒント $x = \dfrac{1}{n}$ とおいて $n \to \infty$ の極限を考える。）

＜ネピアの数２＞

前ページの結果から

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ (\fallingdotseq 2.718)$$

であることがわかる。変数 x を h に変えた式

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$$

を考える。この式から h が十分小さいとき、すなわち

$$h \fallingdotseq 0 \quad \text{ならば} \quad e \fallingdotseq (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

である。両辺を h 乗すれば

$$h \fallingdotseq 0 \quad \text{のとき} \quad e^h \fallingdotseq 1+h$$

だから

$$\Downarrow$$

$$e^h - 1 \fallingdotseq h$$

より

$$h \fallingdotseq 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{e^h-1}{h} \fallingdotseq 1$$

よって

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1}$$

がわかる。

例 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{2+h}-e^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^2(e^h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} e^2 \times \left(\frac{e^h-1}{h}\right) = e^2 \times 1 = e^2$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{3+h}-e^3}{h} =$

(2) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$

< 指数関数の微分 >

前ページの結果より

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$$

がわかった。関数 $f(x) = e^x$ に対する導関数

$$(e^x)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

の定義から

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

であることがわかる。一般に 1 以外の正の数 a に対して、

$$\boxed{(a^x)' = a^x \times \log_e a}$$

が成立する。

底が e (ネピアの数 $\fallingdotseq 2.7$) である対数 $\log_e x$ を**自然対数**

$(natural \quad logarithm)$ と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log x = \log_e x} \text{ (自然対数)}$$

(注) 自然対数 $\log_e x$ を $\ln x$ と記す場合もある。

例 1 $\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\log\left(\frac{1}{e}\right) = \log_e\left(\frac{1}{e}\right) = \log_e(e^{-1}) = -1$$

問 1 次の自然対数の値を求めよ。

(1) $\log e$ (2) $\log(e^2)$ (3) $\log 1$

例 2 $(2^x)' = 2^x \times \log_e 2 = 2^x \log 2$

問 2 次の指数関数の導関数を求めよ。

(1) $(3^x)' =$ (2) $(4^x)' =$

＜逆関数の微分＞

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x+\Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \cos^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(ヒント) 13 ページの結果および $\dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$ を使う

＜対数関数の微分１＞

対数関数の逆関数は指数関数である。つまり

$$y = \log x = \log_e x \Longleftrightarrow x = e^y$$

である。自然対数 $y = \log x$ の導関数は前ページより

$$(\log x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

よって

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \text{(自然対数関数の微分)}$$

が成り立つ。一般に 1 以外の正の数 a に対して

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e}$$

が成り立つ。

(注) この微分公式は以下のようにして証明される。

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{x} = t$ とおくと $h \to 0$ のとき $t \to 0$ であるから

$$(\log_a x)' = \lim_{t\to 0}\frac{1}{tx}\log_a (1+t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

となるのでここで $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ より

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

$<$ 対数関数の微分 2 $>$

例　関数 $y = \log(x^2+3x+4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2+3x+4$　とおくと　$y = \log u$　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log u)' \times (x^2+3x+4)'$$
$$= \frac{1}{u} \times (2x+3) = \frac{1}{x^2+3x+4} \times (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

問 1　例にならって、次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^4+3x+1)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log(2+\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log(3-\cos x)$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2　上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し
合成関数 $y = \log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx} = \Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を
$f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)' =$

＜ 対数微分法 ＞

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (前ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

（注）両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。
(解)

問 2 例と問 1 の結果を使って、一般の正数 $(a > 0)$ に対する指数関数 $y = a^x$ の導関数 $y' = (a^x)'$ を類推せよ。

(答) $(a^x)' =$

問 3 $a = e$（ネピア数）のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

$<$ x^r の微分 $>$

例 $y=\sqrt[3]{x^2}$ の導関数を求めたい。巾乗の形に直すと $y=x^{\frac{2}{3}}$ である。これを対数微分法で微分する。

両辺の自然対数をとると

$$\log y=\log(x^{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3}\log x$$

である。両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x}$$

であるから

$$y'=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x}\times y=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x}\times x^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\times x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

問1 一般の実数 r に対して、関数 $y=x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)'=$

問2 指数の定義 $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}, \dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$ と問1の結果を利用して、次の関数を微分せよ。(最後の答は根号で表せ)

(1) $(\sqrt[3]{x^4})'=$

(2) $(\sqrt{x})'=$

(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=$

(4) $(x\sqrt{x})'=$

＜ 微分の練習 ＞

問 1 今まで出てきた微分の結果をまとめたい。以下の導関数を書け。

(1) $(k)'=$ (k は定数)　(2) $(x^r)'=$ (r は定数)

(3) $(\sin x)'=$　(4) $(\cos x)'=$

(5) $(\tan x)'=$　(6) $(\log x)'=$

(7) $(a^x)'=$ $(a > 0,\ a \neq 1)$　(8) $(e^x)'=$

(9) $\big(f(x) \times g(x)\big)'=$
(積の微分)

(10) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'=$
(商の微分)

例 1 関数 $y = e^{\sin x}$ の導関数を求めたい。

$u = \sin x$ とおくと $y = e^u$ となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times (\sin x)' = e^u \times \cos x = e^{\sin x} \times \cos x$$

例 2 関数 $y = \sqrt{1 + \cos x}$ の導関数を求めたい。

$u = 1 + \cos x$ とおくと $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ となる。

合成関数の微分法より。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^{\frac{1}{2}})' \times (1 + \cos x)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (-\sin x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}}$$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^{-x^2}$　$\dfrac{dy}{dx} =$

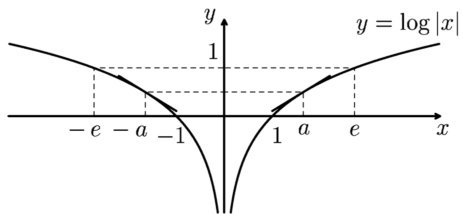
(2) $y = (2 + \sin x)^4$　$\dfrac{dy}{dx} =$

$<\log|x|$ の微分 $>$

例1 関数 $y=\log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より、 $y=\log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$

となる。

例2 関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。
$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\sin x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|x^3-3x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

＜原始関数＞

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は1つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

である。

問　次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 $=$

(2) x^5 の原始関数の一般形 $=$

(3) x^6 の原始関数の一般形 $=$

＜不定積分 1＞

$F'(x)=f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり、その一般形は

$$F(x)+C \qquad （C \text{ は任意の定数}）$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x)=f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x)+C} \qquad （C \text{ は任意定数}）$$

である。記号 $\int$ はインテグラル ($integral$) と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)'=x^2$ より $\displaystyle\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)'=x^3$ より $\displaystyle\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$

(注) 記号 $\int \boxed{}\, dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4dx=$

(2) $\displaystyle\int x^5dx=$

(3) $\displaystyle\int x^6dx=$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。

$$\int x^ndx= \qquad\qquad\qquad (n \text{ は定数})$$

問 3 問 2 の公式は n に例外がある。n は何であってはいけないか。

＜不定積分 2＞

$\Big(F(x)\Big)' = f(x)$ のとき $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ である。

ここで、任意定数 C は**積分定数**と言われる。

例 $\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n$ より $n \neq -1$ であれば両辺を $n+1$ で割って

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$$

だから

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C} \qquad\qquad (n \neq -1)$$

である。ただし $n = -1$ の場合はこの式は当てはまらない。

問 1 $x = x^1$、$1 = x^0$、$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$、$\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ と考えて、上の公式を使い、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x dx =$

(2) $\displaystyle\int 1 dx =$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x} dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx =$

（注）次式の右辺の様に、略記することもある。

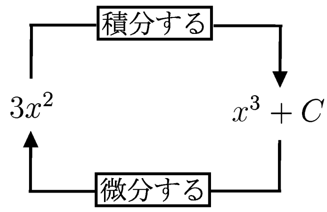
$$\int 1dx = \int dx、\qquad \int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x^2}$$

問 2 $n = -1$ のとき、29 ページを参考にして次の不定積分を求めよ。

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx =$$

＜不定積分3＞

不定積分を求めることを**積分する**という。



例1　$(x^3)' = 3x^2$ より $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

例2　$(\sin x)' = \cos x$ より $\int \cos x dx = \sin x + C$

$(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ より $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

問1　微分の公式から、次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (-\sin x)\, dx =$

(2) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx =$

(3) $\int e^x dx =$

(4) $\int a^x \log a dx =$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

例3　(1) $(x^3)' = 3x^2$ より両辺を 3 で割ると $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ となる。これを積分で表すと

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C \text{ より } \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \text{ となる。}$$

(2) $\int 2^x \log 2 dx = 2^x + C$ より $\int 2^x dx = \dfrac{1}{\log 2} 2^x + C$

問2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin x dx =$

(2) $\int a^x dx =$

＜不定積分 4＞

微分の性質

$$\Big(kf(x)\Big)' = k \times f'(x) \qquad \text{（}k\text{ は定数）}$$

$$\Big(f(x) + g(x)\Big)' = f'(x) + g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\boxed{\begin{aligned} &\int kf(x)dx = k \times \int f(x)dx \qquad \text{（}k\text{ は定数）} \\ &\int \Big\{f(x) + g(x)\Big\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}}$$

が得られる。

例 1 $\displaystyle\int \left(9x^2 - 4x + 3\right) dx = 9\int x^2dx - 4\int xdx + 3\int dx$

$$= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 3 \times x + C$$

$$= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \qquad \text{（}C\text{ は積分定数）}$$

（注）例の様な不定積分では、積分定数は 1 つにまとめて書いておけばよい。

問 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 5x^2dx =$ (2) $\displaystyle\int (3 - 6x)\, dx =$

(3) $\displaystyle\int \left(6x^2 - 8x + 1\right) dx =$

例 2 $\displaystyle\int \left(-2x^2 - 3x + 6\right) dx - \int \left(x^2 - 3x + 5\right) dx$

$$= \int \Big\{\left(-2x^2 - 3x + 6\right) - \left(x^2 - 3x + 5\right)\Big\}dx = \int \left(-3x^2 + 1\right) dx = -x^3 + x + C$$

問 2 例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int \left(6x^2 - 6x - 3\right) dx + 2\int \left(-3x^2 + 4x - 1\right) dx$$

$=$

<不定積分5>

例　$\displaystyle\int (2x+1)^3 dx$ を求めたい。微分して $(\quad)^3$ となる関数の候補として $(\quad)^4$ を考えてみる。$(\quad)^4$ を(合成関数の微分法より)微分してみると

$$\left((2x+1)^4\right)' = 4 \times (2x+1)^3 \times (2x+1)' = 8(2x+1)^3$$

となる。よって

$$\int 8(2x+1)^3 dx = (2x+1)^4 + C$$

より

$$\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$$

問1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x+2)^5 dx =$

(2) $\displaystyle\int (4x-3)^7 dx =$

問2　定数 $a,\ b,\ n$ に対して、次の不定積分を求めよ。
ただし $a \neq 0$、$n \neq -1$ とする。

(1) $\displaystyle\int (ax+b)^3 dx =$

(2) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

問3　問2の(2)の式を使って、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\, dx =$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+1)^2} dx =$

＜不定積分 6＞

例 (1) $\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。微分して $\cos(\quad)$ になる関数の候補として $\sin(\quad)$ を考えてみる。

$$\Big(\sin(3x+2)\Big)' = \cos(3x+2) \times (3x+2)' = 3\cos(3x+2) \quad \text{より}$$

$$\int 3\cos(3x+2)dx = \sin(3x+2) + C$$

よって

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{4x-3}dx$ を求めたい。微分して $\dfrac{1}{(\quad)}$ となる関数の候補として $\log|(\quad)|$ を考えてみる。

$$\Big(\log|4x-3|\Big)' = \frac{1}{4x-3} \times (4x-3)' = \frac{4}{4x-3} \quad \text{より}$$

$$\int \frac{1}{4x-3}dx = \frac{1}{4}\log|4x-3| + C$$

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(4x-1)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+2)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1}dx =$

(4) $\displaystyle\int e^{3x+1}dx =$

問 2 定数 a、b に対し、次の不定積分を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\int \cos(ax+b)dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$

(4) $\displaystyle\int e^{ax+b}dx =$

＜積分記号＞

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big)=f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x)+C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big)=f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t)+C$$

のようになる。

例 1

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2 \quad \text{より} \quad \int 3x^2dx = x^3+C$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^3\right)=3t^2 \quad \text{より} \quad \int 3t^2dt = t^3+C$$

$$\frac{d}{du}\left(u^3\right)=3u^2 \quad \text{より} \quad \int 3u^2du = u^3+C$$

例 2

(1) $\displaystyle\int \left(t^2-4t+3\right)dt = \frac{1}{3}t^3-2t^2+3t+C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10-9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

＜置換積分法1＞

例題　$\displaystyle\int \cos\left(x^3\right) \times 3x^2 dx$ を求めよ。

(解)　微分して $\cos(\quad)$ になる関数の候補として $\sin\left(x^3\right)$ を考える。

$$y = \sin\left(x^3\right) \quad 、\quad u = x^3$$

とおくと、合成関数の微分法より

$$\Bigl(\sin\left(x^3\right)\Bigr)' = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = (\sin u)'\times\left(x^3\right)' = (\cos u)\times\left(3x^2\right) = \cos\left(x^3\right)\times 3x^2$$

より

$$\int \cos\left(x^3\right) \times 3x^2 dx = \sin\left(x^3\right) + C$$

(別解)　$u = x^3$ とおくと　$3x^2 = \left(x^3\right)' = \dfrac{du}{dx}$　より

$$\int \cos\left(x^3\right)\times 3x^2 dx = \int \cos(u)\frac{du}{dx}dx = \int \cos(u)du = \sin(u)+C = \sin\left(x^3\right)+C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos\left(x^4\right) \times 4x^3 dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos\left(x^5\right) \times 5x^4 dx =$

(3) $\displaystyle\int \cos\Bigl(g(x)\Bigr) \times g'(x) dx =$

＜置換積分法2＞

前ページの結果より

$$\int \cos\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx = \sin\Big(g(x)\Big) + C$$

が分かる。これを前ページの別解のように考える。

$$u = g(x) \text{ とおくと } g'(x) = \frac{du}{dx} \text{ だから}$$

$$\int \cos\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx = \int \cos(u) \times \frac{du}{dx}dx = \int \cos(u)du = \sin(u) + C = \sin\Big(g(x)\Big) + C$$

となる。

問1 $\int \sin u du = -\cos u + C$ を利用して次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin\left(x^3\right) \times 3x^2 dx =$

(2) $\int \sin\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx =$

問2 $\int e^u du = e^u + C$ 、$\int \frac{1}{u}du = \log|u| + C$ 、$\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$

を利用して、次の不定積分を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\int e^{g(x)} \times g'(x)dx$

(2) $\int \frac{1}{g(x)} \times g'(x)dx$

(3) $\int \Big\{g(x)\Big\}^n \times g'(x)dx$

問3 $u = g(x)$ とおいて、次の不定積分を変数 u だけの不定積分の形になおせ。

$$\int f\Big(g(x)\Big) \times g'(x)dx =$$

＜置換積分法３＞

前ページの結果より $u=g(x)$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ だから

$$\int f\big(g(x)\big)\times g'(x)dx=\int f(u)\times\frac{du}{dx}dx=\int f(u)du$$

となる。

例１ $\displaystyle\int x^2\left(x^3+1\right)^4dx$ を求めたい。

$$u=x^3+1 \text{ とおくと } \frac{du}{dx}=\left(x^3+1\right)'=3x^2$$

だから

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^4dx=\frac{1}{3}\times\int 3x^2\times\left(x^3+1\right)^4dx=\frac{1}{3}\int\left(x^3+1\right)^4\times 3x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(x^3+1\right)^4\times\left(x^3+1\right)'dx=\frac{1}{3}\int u^4\times\frac{du}{dx}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int u^4du=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5+C$$

例２ $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx$ を求めたい。

$$u=x^2+1 \text{ とおくと } \frac{du}{dx}=\left(x^2+1\right)'=2x$$

だから

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\times\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\times 2xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\times\left(x^2+1\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\times\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\times\log|u|+C=\frac{1}{2}\log|x^2+1|+C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\left(x^2+1\right)^5dx$　　(2) $\displaystyle\int x^3\cos\left(x^4+6\right)dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$　　(4) $\displaystyle\int\tan xdx$