高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

4

内容

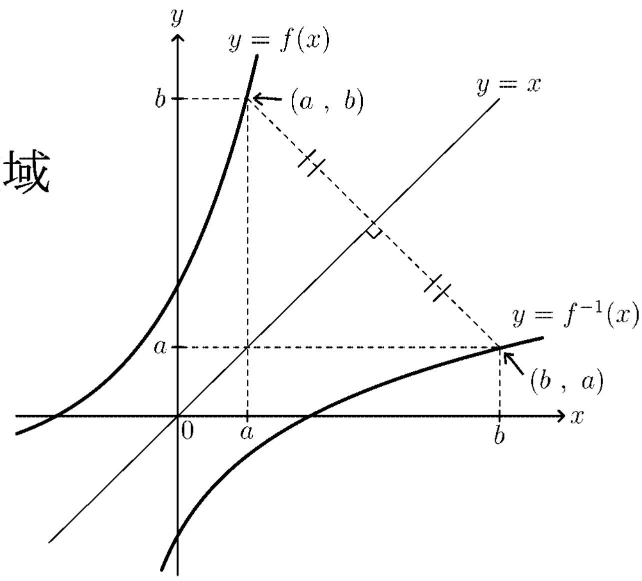
◎　三角関数のグラフ

◎　関数の定義域と値域

◎　逆関数

◎　極限

◎　整関数の微分



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

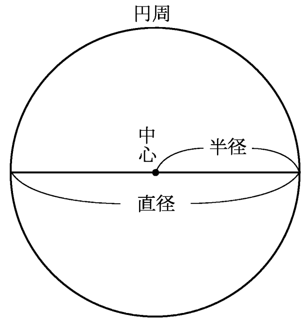
＜円周率＞

古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから

$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$



となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267 ～ BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して、円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ、現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 ($\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma$) の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率} \quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味、曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後、円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ℓ とおくと

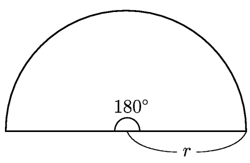
$$\pi = \frac{\ell}{2 \times 5} = \frac{\ell}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答})\ \ \ell = 10\pi\ (\text{cm})}$$

問 1　次の半径の円周を求めよ。

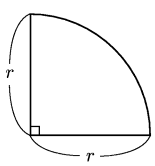
(1)　半径 3cm　　　(2)　半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

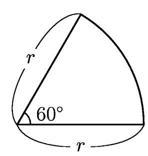
(1)　半径 r の半円の弧の長さ



(2)　半径 r の $\dfrac{1}{4}$ 円の弧の長さ



(3)　半径 r, 中心角 60° の弧の長さ

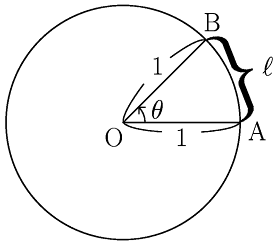


＜弧度法１＞

右図のように、角度 θ を、半径１の円の弧 AB の長さ ℓ で表す方法を**弧度法**という。単位をラジアンで表し、

$\theta^\circ = \ell$（ラジアン）

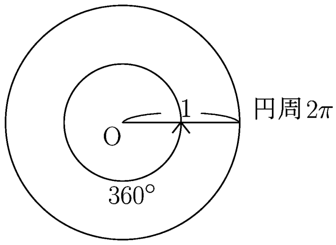
と記す。



例 (1) $\theta = 360^\circ$ のとき、半径１の円周の長さは 2π だから

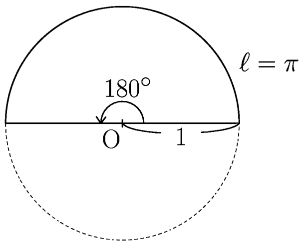
$360^\circ = 2\pi$（ラジアン）

である。（π は円周率 $\fallingdotseq 3.14$）



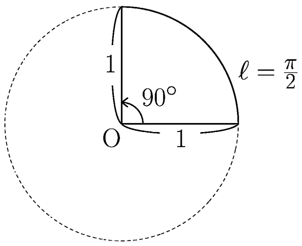
(2) $\theta = 180^\circ$ のとき、半径１の半円の長さは π だから

$180^\circ = \pi$（ラジアン）



(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、半径１の円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さは $\dfrac{\pi}{2}$ だから

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）



以上の例から、１（ラジアン）は弧の長さが１に対する角度 θ で、

１（ラジアン）$= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$

である。

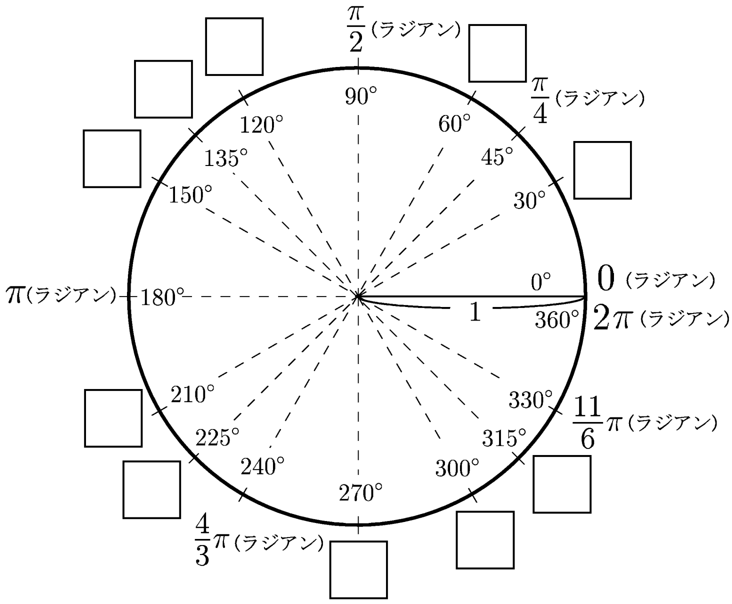
（注） 360°，180°，90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°		45°	60°		120°		150°		210°	225°		270°	300°		330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π			$\frac{4}{3}\pi$			$\frac{7}{4}\pi$		2π

< 弧度法2 >

問1　右図は半径1の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の $\boxed{}$ 内に弧度法による角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例　0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1)　$420° = 360° + 60° = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \frac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

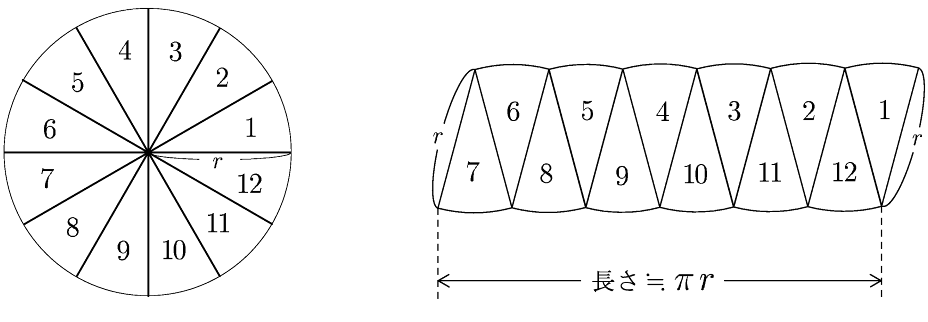
(2)　$-510° = -360° - 150° = -2\pi - \frac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\frac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

問2　次の角度を弧度法で表せ。

(1)　540°　　(2)　$-240°$　　(3)　600°

(4)　$-390°$　　(5)　840°　　(6)　$-405°$

問3　1ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)

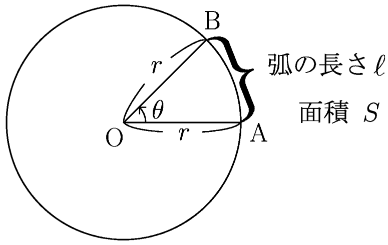


(1)　半径 r の円周の長さ ℓ を求めよ。　　$\ell =$

(2)　半径 r の円の面積 S を求めよ。　　$S =$

＜弧度法3＞

中心角 θ、半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



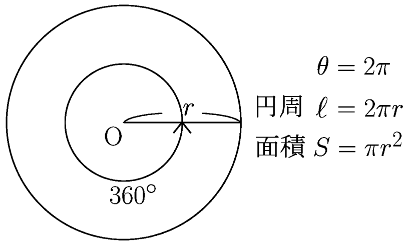
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは

ℓ は円周の長さだから

$\ell = 2\pi r$

であり S は円の面積だから

$S = \pi r^2$

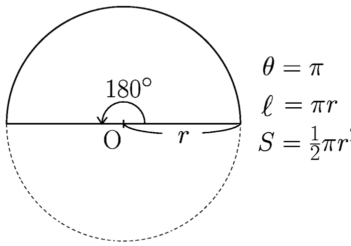


(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは

(1) の半分であるから

$\ell = \pi r$

$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$

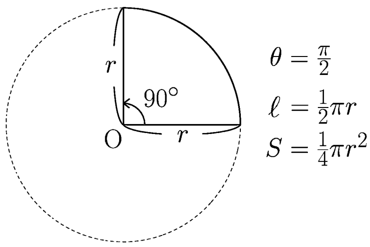


(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90^\circ$ のときは

(1) の $\dfrac{1}{4}$ であるから

$\ell = \dfrac{1}{2}\pi r$

$S = \dfrac{1}{4}\pi r^2$



問1　次の表を完成させよ。

度数法	45°	60°		120°		360°
弧度法 θ			$\frac{\pi}{2}$		π	
弧の長さ ℓ			$\frac{1}{2}\pi r$			$2\pi r$
面積 S					$\frac{1}{2}\pi r^2$	πr^2

問2　上の表を参考にして、一般に角度が θ（ラジアン）であるとき弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を θ と r を用いて表せ。

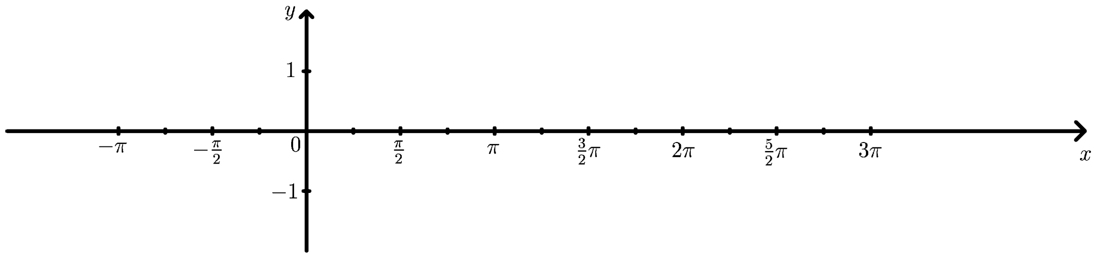
$\ell =$　　　　　　　　　　$S =$

＜三角関数のグラフ＞

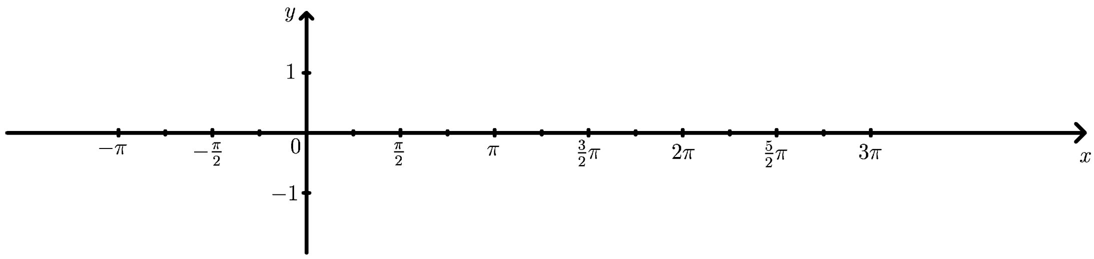
問　表を完成し、$y=\sin x$ と $y=\cos x$ および $y=\tan x$ のグラフを書け。

x	度数法		$-135°$		$-45°$	$0°$		$90°$		$180°$	$225°$		$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$		2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y=\sin x$

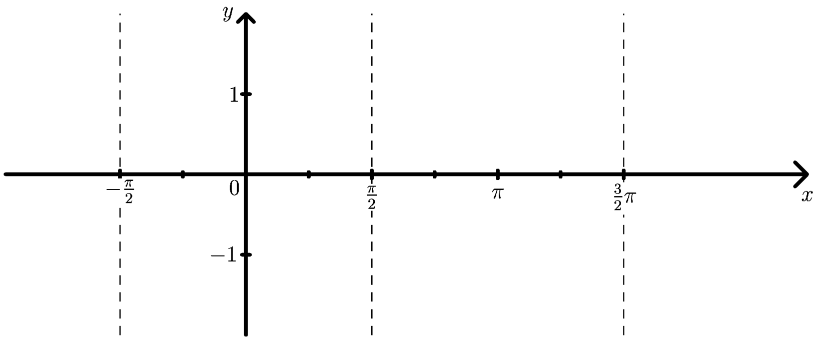


(2) $y=\cos x$



x	度数法	$-90°$		$-45°$		$0°$	$30°$		$60°$		$120°$		$150°$			$225°$		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		╳								╳								╳

(3) $y=\tan x$



＜正弦波１＞

定数 A，B，C に対し、正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを**正弦波**という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

であるが $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$，$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

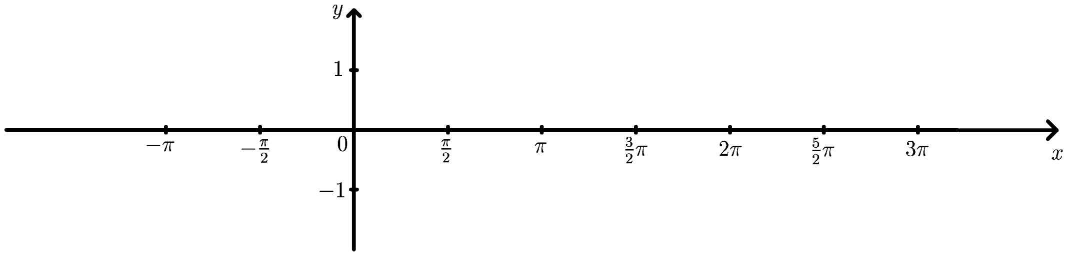
$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**」という。

一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において、（　　）の中の部分（この場合は $Bx + C$）を**位相**という。

問 次の表を完成し、$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

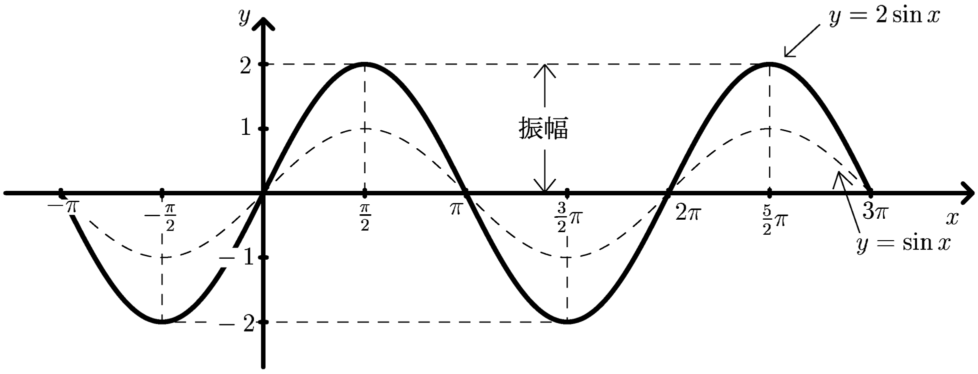
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



＜正弦波２＞

例 $y=2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、
それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0

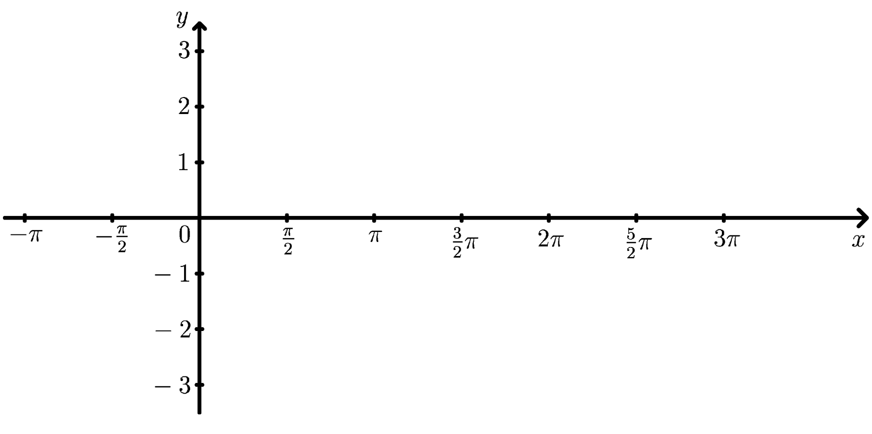


このグラフでは実線が $y=2\sin x$ のグラフであり、点線が $y=\sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、$y=2\sin x$ のグラフは $y=\sin x$ のグラフを y 軸方向に２倍したものである。このグラフの最大値は２であり、最小値はー２である。

このような場合に「この正弦波の**振幅は２**」という。

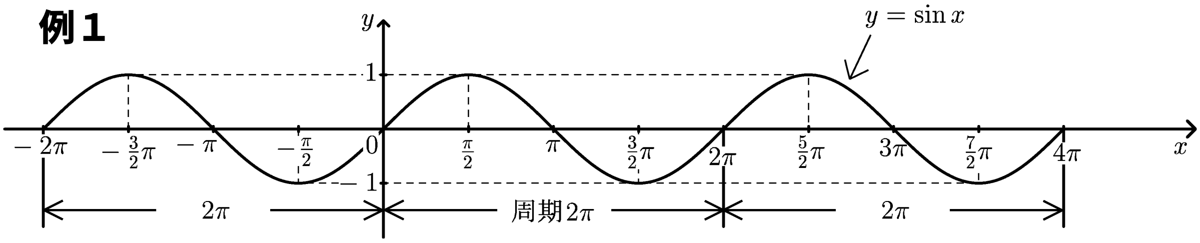
一般の正弦波の場合に、x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問 $y=-3\sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。



＜正弦波３＞

例１

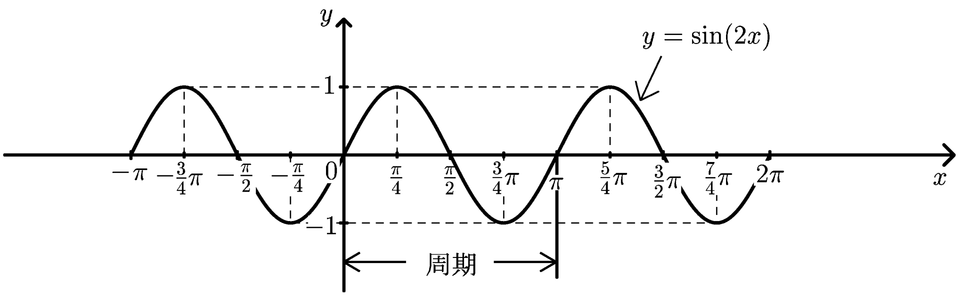


このグラフは $y = \sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい、一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$y = \sin x$ の周期は 2π である。

例２ $y = \sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

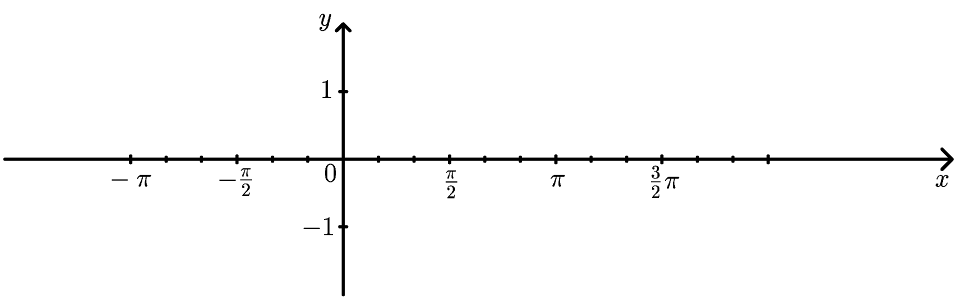


このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、

$y = \sin(2x)$ の周期は π である。

問 次の表を完成し、$y = \sin(3x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													

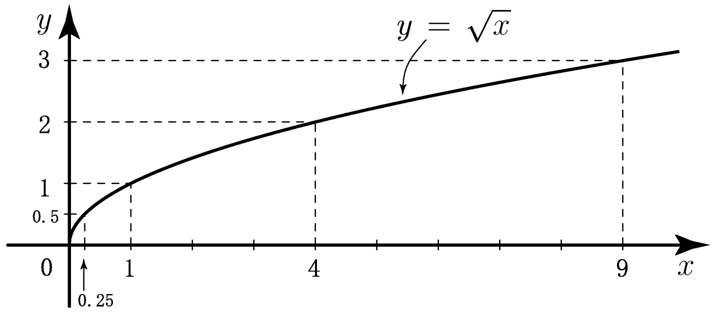


＜無理関数１＞

$\sqrt{\quad}$ のついた関数を通常**無理関数**という。

例１　$y = \sqrt{x}$ のグラフを書きたい。$\sqrt{\quad}$ の中は負になっていけないので x は 0 以上の数を考える。
x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「$\sqrt{\quad}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 ($x \geqq 0$) を**定義域**という。なお $\sqrt{\quad}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を**値域**という。

例２　無理関数 $y = \sqrt{x+1}$ を考える。
$\sqrt{\quad}$ の中は 0 以上だから

$$x + 1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq -1$$

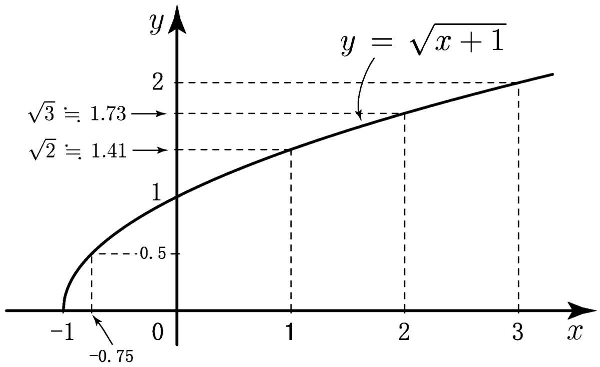
より

$\boxed{\text{定義域} \ : \ x \geqq -1}$

であり、値域は $\sqrt{\quad} \geqq 0$ だから

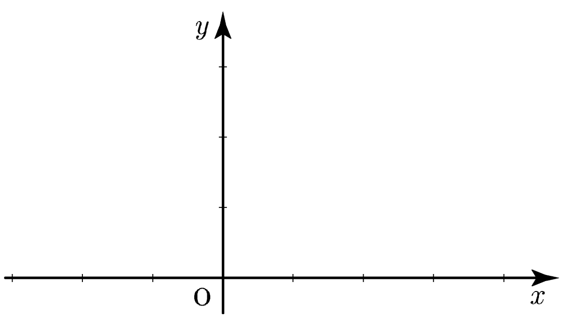
$\boxed{\text{値 域} \ : \ y \geqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。

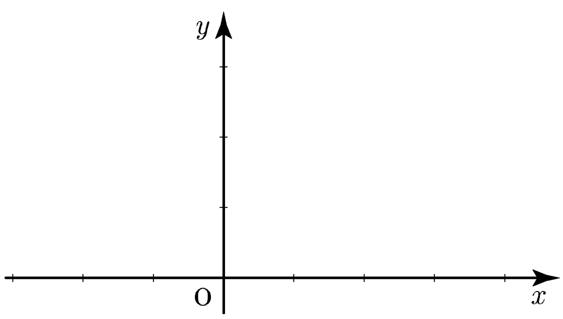


問　以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1) $y = \sqrt{x+2}$

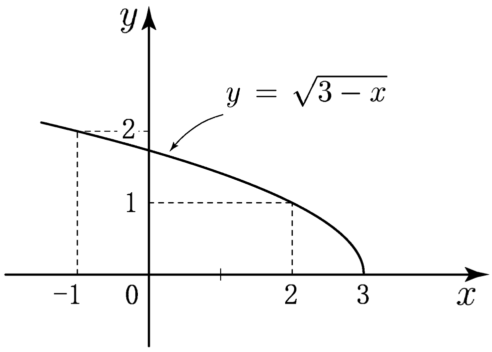


(2) $y = \sqrt{x-1}$



＜無理関数２＞

例１　無理関数 $y=\sqrt{3-x}$ を考える。



$\sqrt{\ }$ の中は０以上だから

$3-x \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geqq x$

より

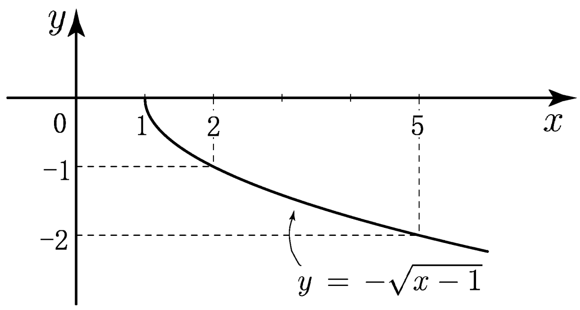
$\boxed{\text{定義域}\ :\ x \leqq 3}$

また $\sqrt{\ } \geqq 0$ より

$\boxed{\text{値域}\ :\ y \geqq 0}$

である。グラフは右図のようになる。

例２　無理関数 $y=-\sqrt{x-1}$ を考える。



$\sqrt{\ }$ の中は０以上だから

$x-1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq 1$

より

$\boxed{\text{定義域}\ :\ x \geqq 1}$

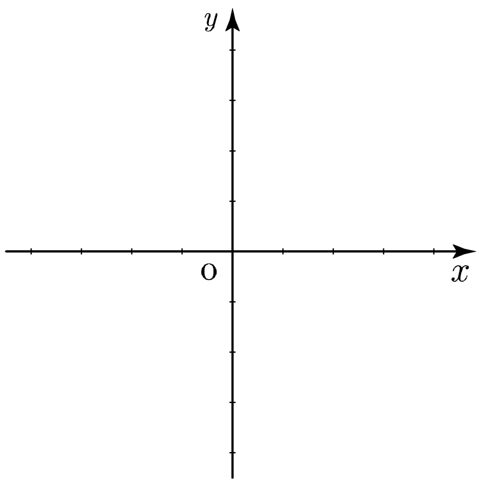
また $\sqrt{\ } \geqq 0$ より $-\sqrt{\ } \leqq 0$
だから

$\boxed{\text{値域}\ :\ y \leqq 0}$

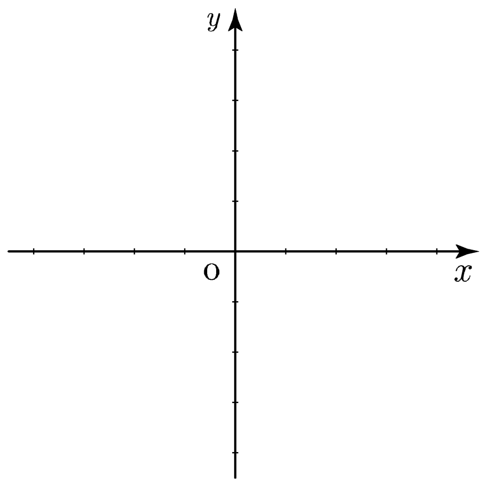
となる。グラフは右図のようになる。

問　以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを書け。

(1) $y=\sqrt{-x+1}$



(2) $y=-\sqrt{x+2}$



＜無理関数3＞

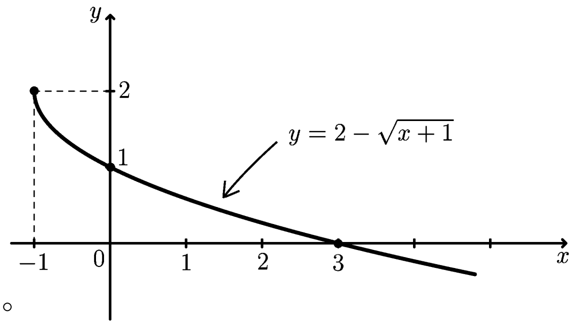
例1 無理関数 $y=2-\sqrt{x+1}$ の
定義域は $x+1 \geqq 0$ より

$\boxed{\text{定義域：} x \geqq -1}$

である。値域は $\sqrt{\quad} \geqq 0$ だから
$2-\sqrt{\quad} \leqq 2$ より

$\boxed{\text{値域：} y \leqq 2}$

となり、グラフは右図のようになる。



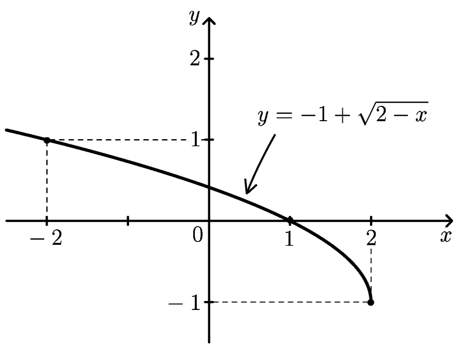
例2 無理関数 $y=-1+\sqrt{2-x}$ の
定義域は $2-x \geqq 0$ より

$\boxed{\text{定義域：} 2 \geqq x}$

である。値域は $\sqrt{\quad} \geqq 0$ だから
$-1+\sqrt{\quad} \geqq -1$ より

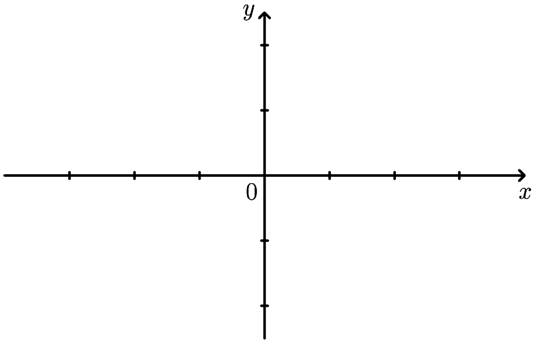
$\boxed{\text{値域：} y \geqq -1}$

となり、グラフは右図のようになる。

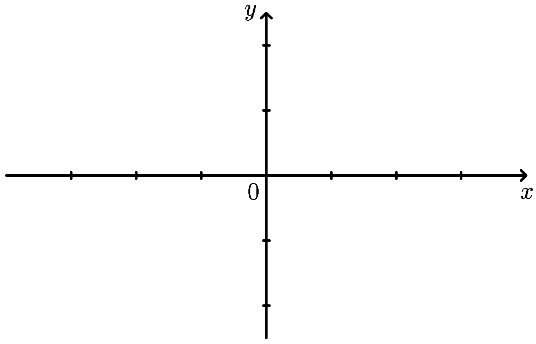


問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

(1) $y=-1+\sqrt{x+1}$



(2) $y=1-\sqrt{2-x}$



＜分数関数１＞

例１　分数関数 $y=\dfrac{1}{x}$ を考える。

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$\times$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$x=0$ のときは分母が 0 になるから定義できない。従って定義域は 0 以外のすべての実数となる。

$\boxed{\text{定義域}: x\neq 0}$

$y=\dfrac{1}{x}$ を変形すると

$$xy=1$$

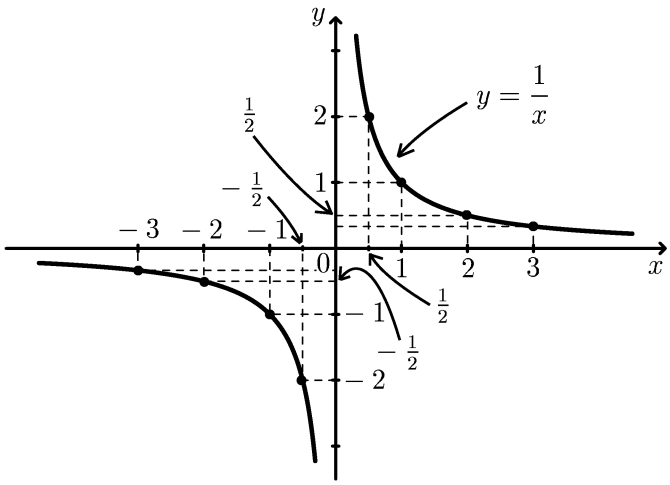
より y は 0 にならない。結局

$$y=\frac{1}{x}\neq 0$$

となり、y は 0 以外のすべての実数の値を取る。

$\boxed{\text{値域}: y\neq 0}$

となり、グラフは右図のようになる。



例２　分数関数 $y=\dfrac{1}{x-2}$ を考える。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$\times$	2	1	$\frac{1}{2}$

分母が 0 になってはならないので $x-2\neq 0$ より

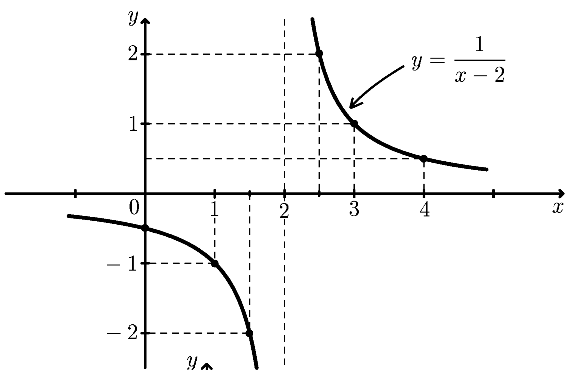
$\boxed{\text{定義域}: x\neq 2}$

となり、値域は上と同様に

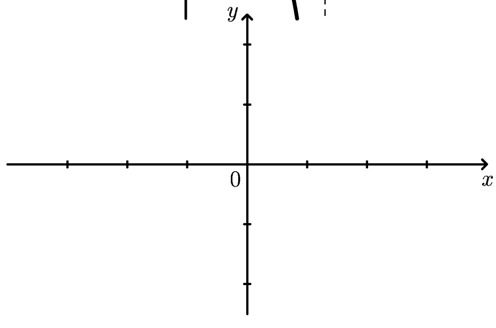
$\boxed{\text{値域}: y\neq 0}$

であり、グラフは右図のようになる。

このグラフは $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に $+2$ だけ平行移動したものである。



問　分数関数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ の定義域と値域を求め、右にグラフを描け。



＜分数関数２＞

例 分数関数 $y=3+\dfrac{1}{x-2}$

を考える。定義域は分母 $\neq 0$

より

$\boxed{\text{定義域} : x \neq 2}$

である。一方逆数 $\dfrac{1}{\square} \neq 0$ より

$$y-3=\frac{1}{x-2} \neq 0$$

であるから $y-3 \neq 0$ より

$\boxed{\text{値域} : y \neq 3}$

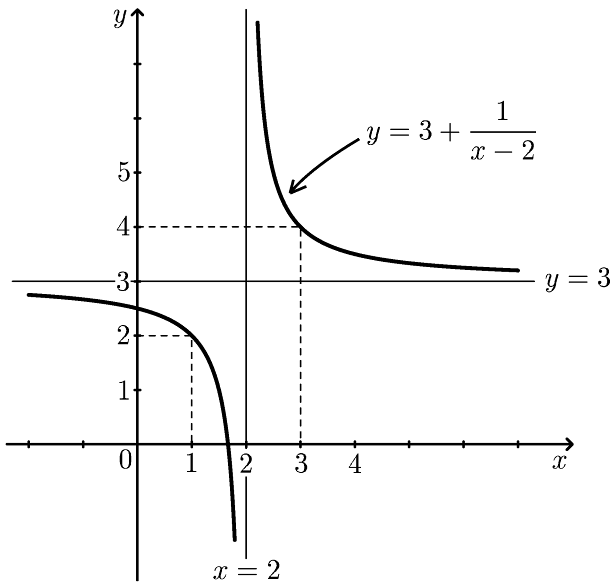
となる。このグラフは

右図のように $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを

x 軸方向に $+2$、y 軸方向に $+3$

だけ平行移動したものである。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2		2	1	$\frac{1}{2}$
y	2.5	2	1		5	4	3.5



このグラフは x の値が 2 に近づくほど直線 $x=2$ に近づき、x の値が

2 から遠ざかるほど直線 $y=3$ に近づく。

この 2 直線 $x=2, y=3$ を分数関数 $y=3+\dfrac{1}{x-2}$ の

漸近線（ゼンキンセン）という。

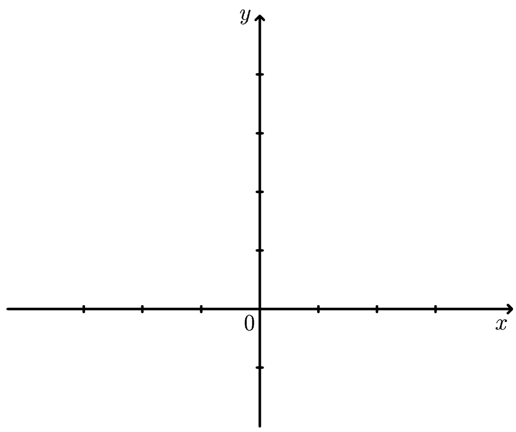
問 分数関数 $y=2+\dfrac{1}{x+1}$

定義域と値域および

漸近線を求め、右に

そのグラフを描け。

(漸近線のグラフも描く。)

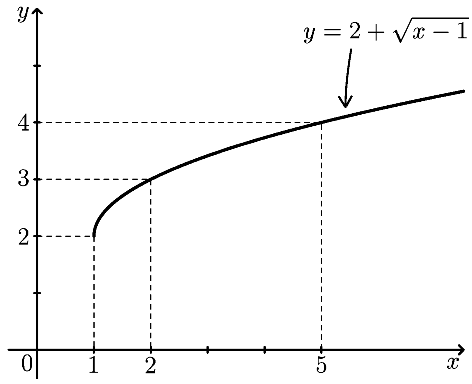


<関数1>

y が x の関数 $y=f(x)$ であるとき、変数 x を**独立変数**といい、
y は x によって変わるから変数 y を**従属変数**という。
関数 $y=f(x)$ において、独立変数 x の範囲を**定義域**、
従属変数 y の範囲を**値域**という。

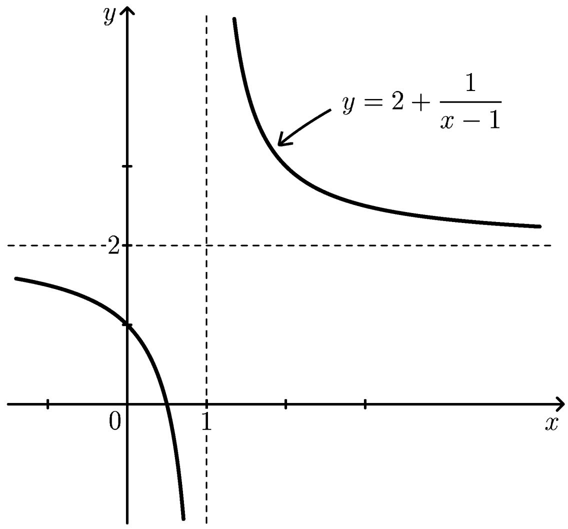
例1 無理関数 $f(x)=2+\sqrt{x-1}$
は $\sqrt{\quad}$ の中が 0 以上の制限
があるから、$x-1 \geqq 0$ より
$f(x)$ の <u>定義域は　$x \geqq 1$</u> 。

$y=2+\sqrt{x-1}$ とおくと $\sqrt{\quad} \geqq 0$
より <u>値域は　$y \geqq 2$</u> 。



例2 分数関数 $f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$
は分母が 0 以外であるから
$x-1 \neq 0$ より $x \neq 1$ 。
$f(x)$ の <u>定義域は 1 以外の全ての実数</u> である。

$y=2+\dfrac{1}{x-1}$　とおくと
$\dfrac{1}{x-1} \neq 0$ より $y \neq 2$ 。
<u>値域は 2 以外の全ての実数</u> である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x)=2-\sqrt{x-1}$　　(2) $f(x)=2+\sqrt{1-x}$　　(3) $f(x)=1+\dfrac{1}{x+2}$

定義域＿＿＿＿＿＿　定義域＿＿＿＿＿＿　定義域＿＿＿＿＿＿

値域＿＿＿＿＿＿　値域＿＿＿＿＿＿　値域＿＿＿＿＿＿

＜関数２＞

例１ 対数関数 $f(x)=\log_4(x-2)$ を考える。一般に対数

$$\bigcirc=\log_4\square$$

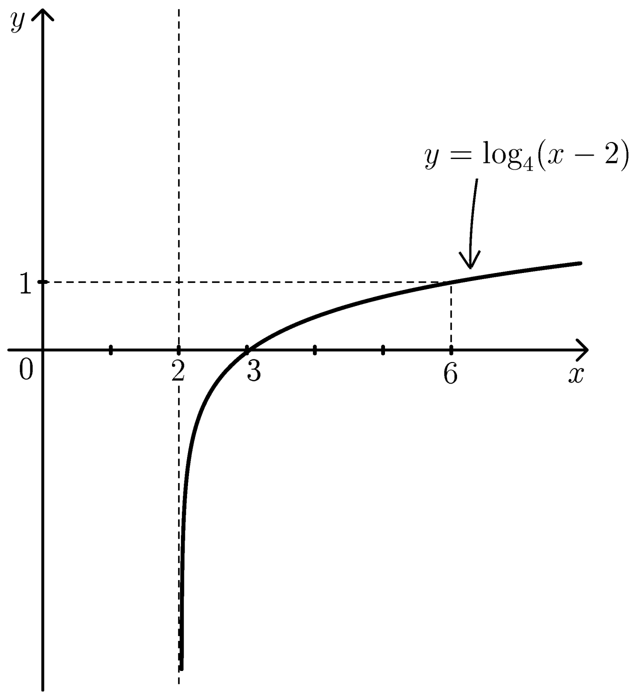
に対し、□内にはいる数を**真数**という。上の対数を指数の形にすると

$$\square=4^{\bigcirc}\ >0$$

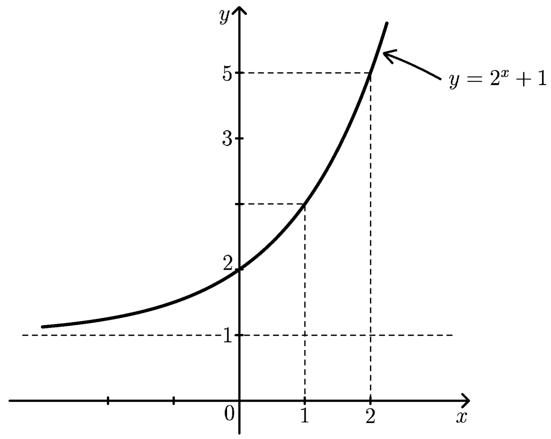
より真数は正でなければならない。従って真数 $=x-2>0$ より $f(x)$ の <u>定義域は $x>2$</u> である。又 $y=\log_4(x-2)$ とおくと

$$x-2=4^y$$

となり指数 y に制限はないので<u>値域は実数全体</u>である。



例２ 指数関数 $f(x)=2^x+1$ を考える。指数 x に制限はないので $f(x)$ の <u>定義域は実数全体</u>である。一方 $y=2^x+1$ とおくと $2^x>0$ より $2^x+1>1$ であるから<u>値域は $y>1$</u> である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x)=\log_2(1-x)$　(2) $f(x)=2^x-1$　(3) $f(x)=2-3^x$

定義域＿＿＿＿　定義域＿＿＿＿　定義域＿＿＿＿

値域＿＿＿＿　値域＿＿＿＿　値域＿＿＿＿

<関数3>

例1 三角関数 $f(x) = 3 + 2\sin x$ を考える。正弦関数の角度 x の範囲に制限はないから、関数 $f(x)$ の定義域は実数全体である。

一方

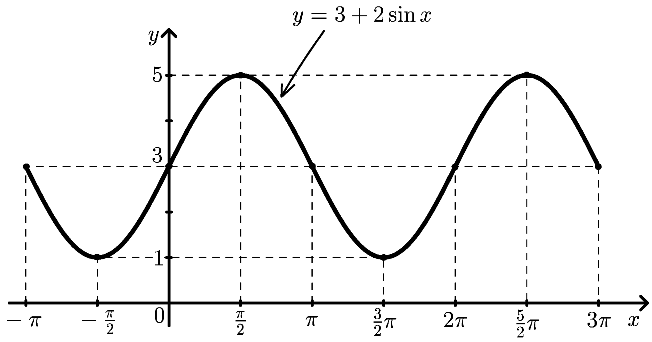
$-1 \leqq \sin x \leqq 1$

$-2 \leqq 2\sin x \leqq 2$

より

$3 - 2 \leqq 3 + 2\sin x \leqq 3 + 2$

$1 \leqq 3 + 2\sin x \leqq 5$　だから 値域は $1 \leqq y \leqq 5$ である。



例2 三角関数 $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$ を考える。$\cos x$ の角度 x に制限はないから、関数 $f(x)$ の定義域は実数全体である。

一方

$-1 \leqq \cos(2x) \leqq 1$

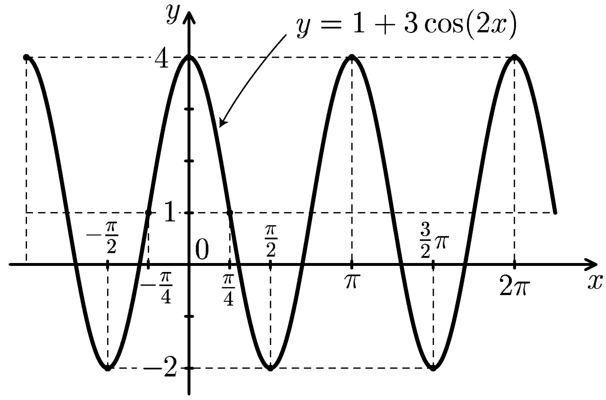
$-3 \leqq 3\cos(2x) \leqq 3$

より

$1 - 3 \leqq 1 + 3\cos(2x) \leqq 1 + 3$

$-2 \leqq 1 + 3\cos(2x) \leqq 4$

だから 値域は $-2 \leqq y \leqq 4$ である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x) = 3 + \sin x$

定義域 ________

値域 ________

(2) $f(x) = 1 + 2\cos x$

定義域 ________

値域 ________

(3) $f(x) = 2 + 3\sin x$

定義域 ________

値域 ________

(4) $f(x) = 2 + 4\cos(3x)$

定義域 ________

値域 ________

＜関数 4＞

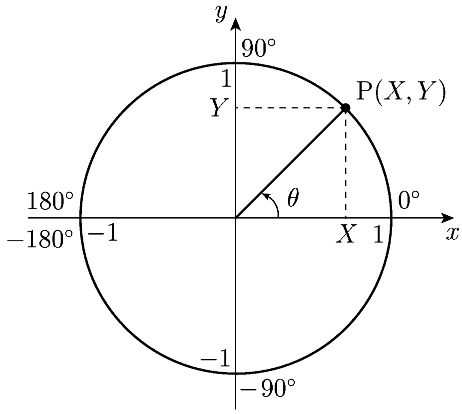
例 1 角度 θ が右図のようなとき

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

であった。θ が $90°$ または $-90°$ のときは x 座標が 0 $(X=0)$ となるので分母が 0 になるから定義されない。一般に $\tan\theta$ の定義域は

$$\pm 90°,\ \pm 270°,\ \pm 450°,\ \cdots$$

以外の角度である。弧度法で表すと、



$\tan\theta$ の定義域は $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

である。正接関数 $y=\tan x$ のグラフは 5 ページのようになる。5 ページのグラフより 値域は実数全体 である。

例 2 関数 $f(x)=\tan(2x)$ を考える。一般に $\tan(\square)$ は

$$\square \neq \pm\frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

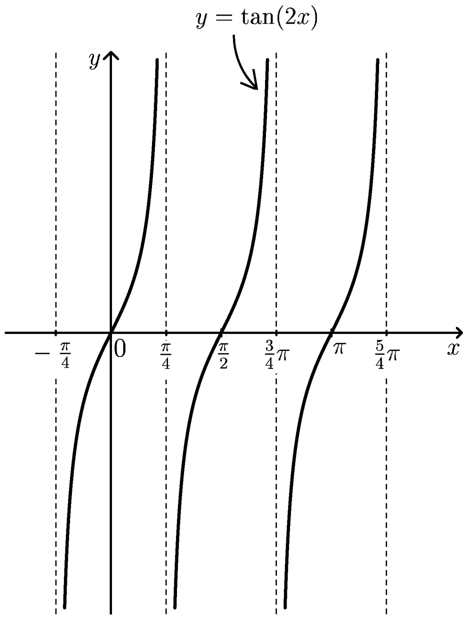
という制限があるから

$$2x \neq \pm\frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

より

$$x \neq \pm\frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi$$

であるから、$f(x)$ の 定義域は $\pm\frac{\pi}{4} \pm \frac{n}{2}\pi$（$n$ は整数）以外のすべての実数 である。また 値域は実数全体 である。



問 次の関数の定義域と値域を求めよ。

(1) $f(x)=\tan(3x)$

定義域 __________

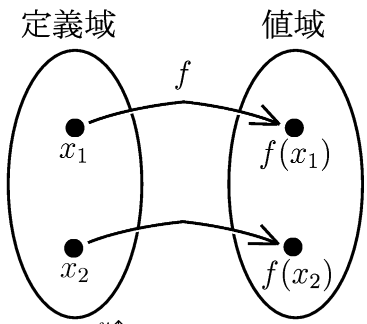
値域 __________

(2) $f(x)=\tan(\pi x)$

定義域 __________

値域 __________

＜１対１関数＞

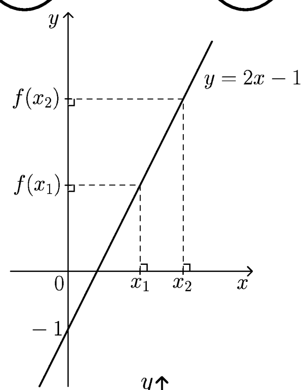


関数 $y=f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり

(∗)　$\underline{x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)}$

が成り立つとき、関数 $y=f(x)$ は **１対１**であるという。

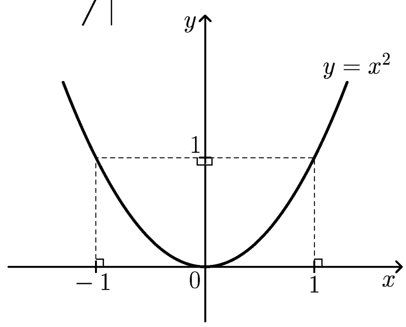
例１　$f(x)=2x-1$ のとき、
関数 $y=f(x)$ は１対１である。



例２　$f(x)=x^2$ のとき、
定義域を実数全体とすれば、関数
$y=f(x)$ は１対１ではない。
なぜなら、$x_1=-1$，$x_2=1$ のとき

$$f(x_1)=f(x_2)=1$$

となり (∗) 式が成立しないから。

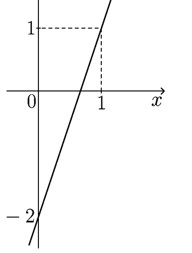


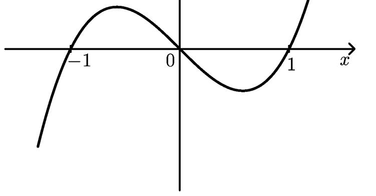
（注）　このような x_1，x_2 が１組でもあれば１対１ではない。

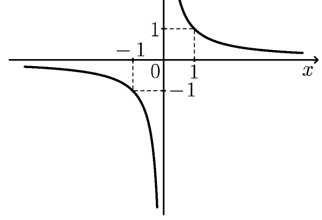
問　次の関数が１対１であるかどうか判定せよ。

(1) $y=3x-2$　　(2) $y=x^3-x$　　(3) $y=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0)$

(答)＿＿＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿＿＿　(答)＿＿＿＿＿＿







＜逆関数１＞

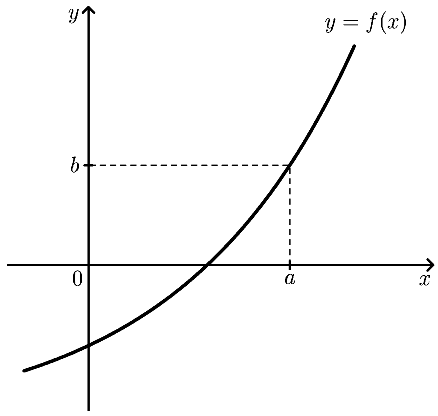
関数 $f(x)$ が 1 対 1 であるとき、y の値 b に対して、

$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。



例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 である。

$b = f(a)$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$b = 2a - 1$

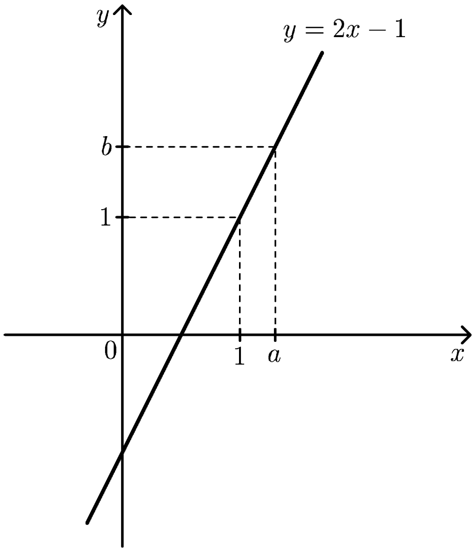
である。これを a について解くと

$a = \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。

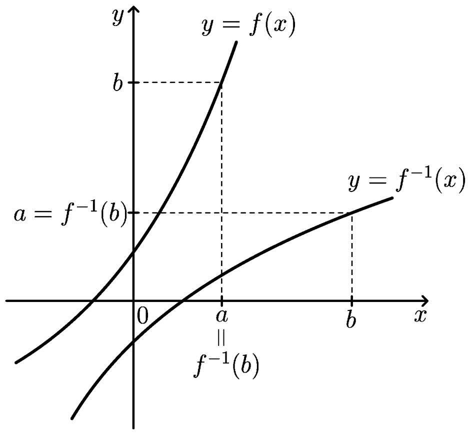


問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて 1 対 1 である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$ (2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ (3) $f(x) = \sqrt{x}$

（解） （解） （解）

＜逆関数２＞



関数 $y = f(x)$ が１対１のとき、y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の**逆関数**という。

例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

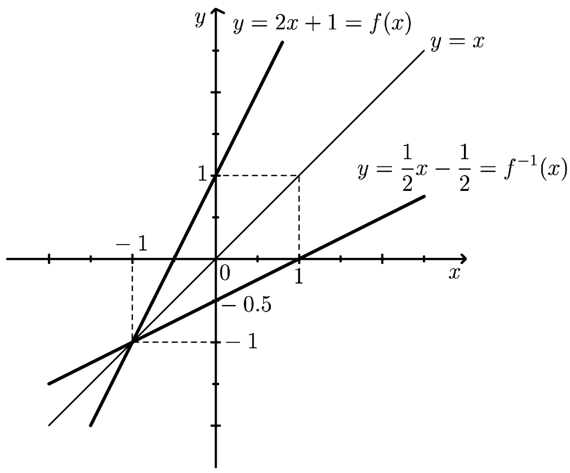
より

$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。



元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に書くと、右図のように直線 $y = x$ に関して対称になる。

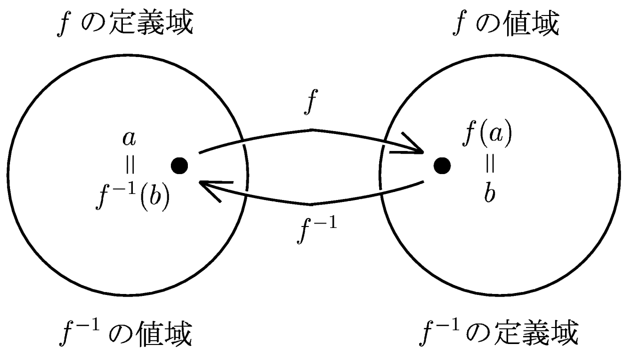
問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x + 2$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$　　(3) $f(x) = \sqrt{x}$

（解）　　（解）　　（解）

＜逆関数３＞

関数 $y=f(x)$ が１対１であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。

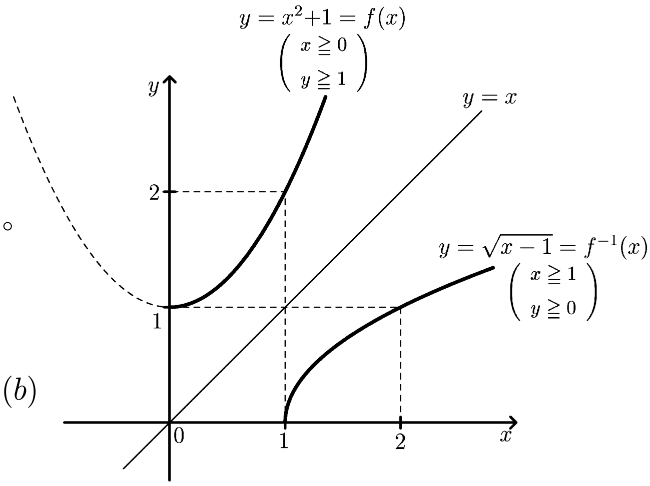


例 $f(x)=x^2+1$ のとき、f の定義域を $x \geqq 0$ に制限すれば $y=f(x)$ は１対１にある。この逆関数を以下のようにして求める。

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より

$$b=a^2+1 \iff a=\sqrt{b-1}=f^{-1}(b)$$
$$(a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1) \qquad (a \geqq 0\ ,\ b \geqq 1)$$



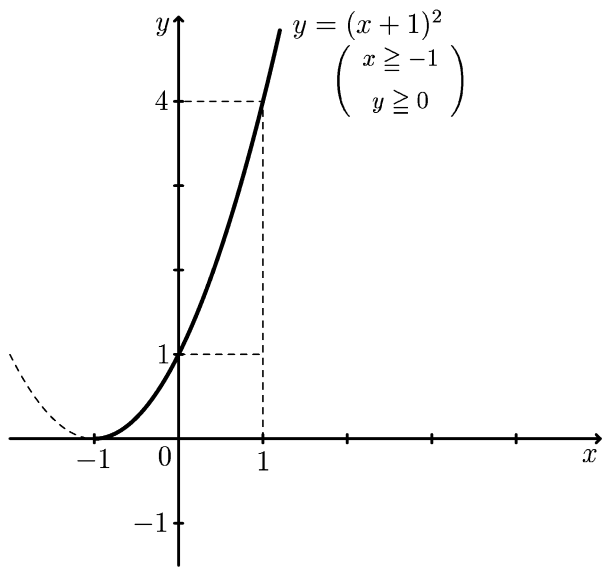
となる。b を x でおきかえると、逆関数

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\quad（定義域\ x \geqq 1）$$

が求まる。$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y=x$ に関し、対称になる。

問 $f(x)=(x+1)^2$ のとき f の定義域を $x \geqq -1$ に制限すれば $y=f(x)$ は１対１になる。この逆関数を求め、グラフを右図に書け。

（解）

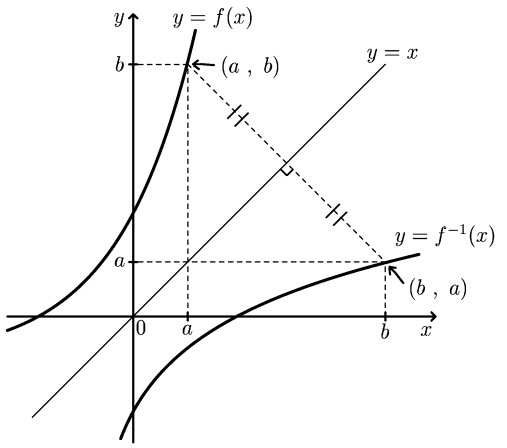


＜逆関数４＞

関数 $y=f(x)$ が１対１であるとき、$y=f(x)$ のグラフ上の点の座標を $(a\ ,\ b)$ とすると

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

より、点 $(b\ ,\ a)$ は逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。



このことから、逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y=f(x)$ のグラフを、直線 $y=x$ に関して、対称に折り返したものになっている。

例 $f(x)=3^x$ のとき、

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

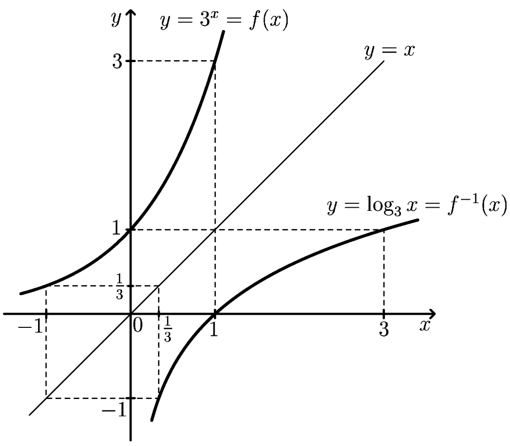
より

$$b=3^a \iff a=\log_3 b=f^{-1}(b)$$

であるから、逆関数は

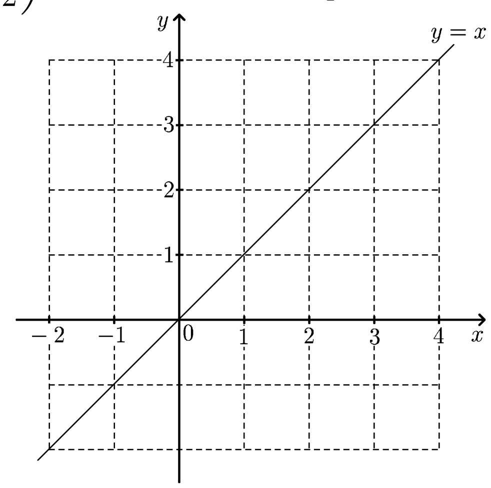
$$f^{-1}(x)=\log_3 x$$

である。対数関数 $y=\log_3 x$ は指数関数 $y=3^x$ の逆関数である。

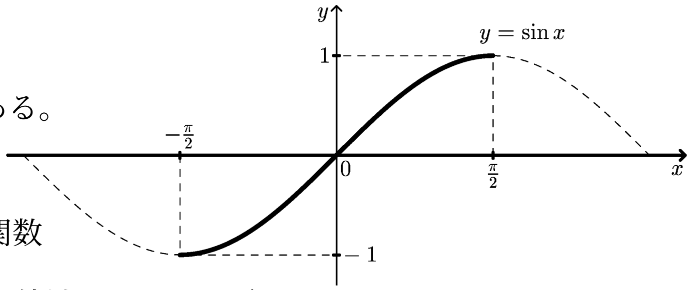


$y=\log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y=3^x$ のグラフを直線 $y=x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。

問 指数関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ と対数関数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを同じ座標平面上に書け。



＜逆三角関数１＞



正弦関数 $y = \sin x$ の通常の定義域は
実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。
この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に
制限すると、1 対 1 になる。このとき、関数

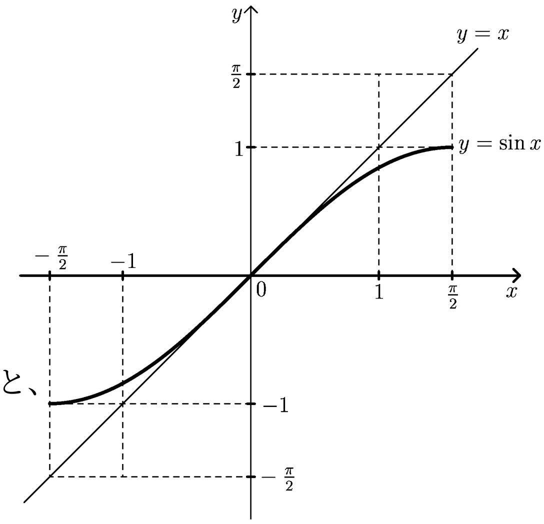
$$y = \sin x \quad （定義域\ -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ 値域\ -1 \leqq y \leqq 1）$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y = \sin^{-1} x \quad 又は \quad y = \arcsin x \quad （定義域\ -1 \leqq x \leqq 1,\ 値域\ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}）$$

（インバースサイン）　　（アークサイン）

と表す。$y = \sin^{-1} x$ のグラフは、$y = \sin x$ のグラフを
直線 $y = x$ に関して対称におり返したものである。



問１　右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。たとえば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2} = \sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で sin が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。表より $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であるから、

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

（答）$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

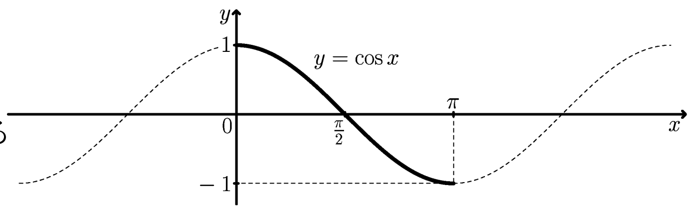
問２　表を完成せよ。

問３　次の値を求めよ。

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$　　　(2) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$　　　(3) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

＜逆三角関数２＞

余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数

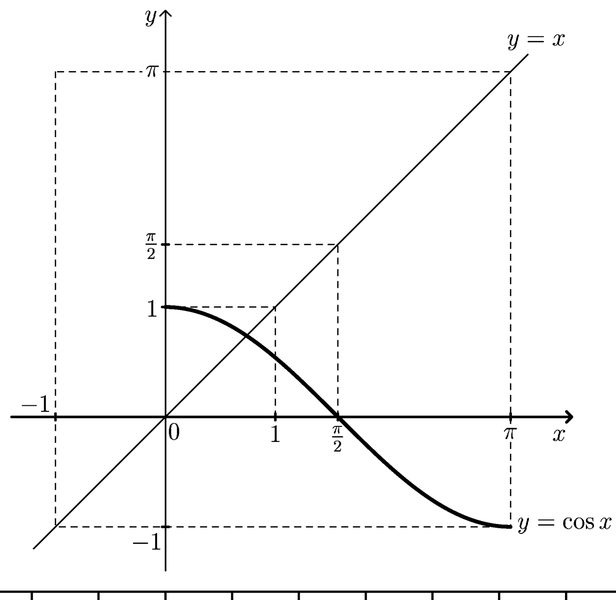


$y=\cos x$　（定義域 $0 \leqq x \leqq \pi$，値域 $-1 \leqq y \leqq 1$）

の逆関数が存在し、これを

$y=\cos^{-1} x$　又は　$y=\operatorname{arccos} x$　（定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$，値域 $0 \leqq y \leqq \pi$）
（インバースコサイン）（アークコサイン）

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは $y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称におり返したものである。



問１　右図の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。たとえば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で、$\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから（答）$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

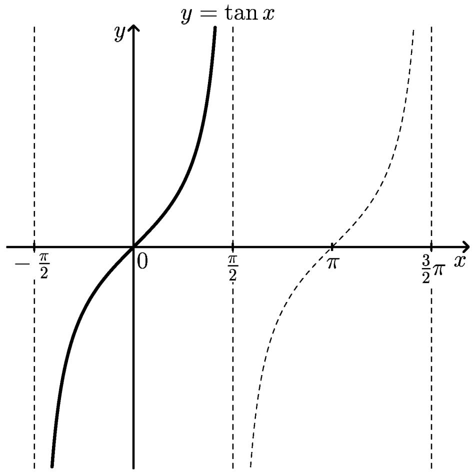
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問２　表を完成せよ。

問３　次の値を求めよ。

(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　(3) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

＜逆三角関数３＞



正接関数 $y=\tan x$ の通常の定義域は

$\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（n は整数）以外の実数であり、

値域は実数全体である。この関数の

定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、

１対１になる。そのとき、関数

$y=\tan x$　（定義域 : $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，値域 : 実数全体）

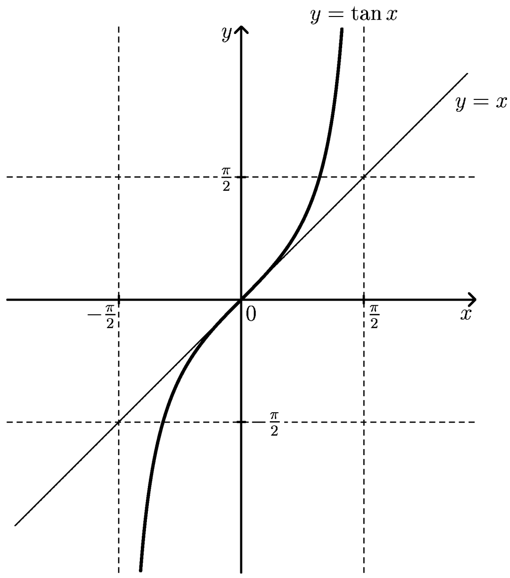
の逆関数が存在し、これを、

$y=\tan^{-1}x$　又は　$y=\arctan x$　（定義域 : 実数全体，値域 : $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$）

（インバースタンジェント）（アークタンジェント）

と表す。$y=\tan^{-1}x$ のグラフは $y=\tan x$ のグラフを

直線 $y=x$ に関して対称におり返したものである。



問１　右の座標平面上に $\tan^{-1}x$ のグラフを書け。

例　逆関数の定義より、

$$a=\tan^{-1}b \iff b=\tan a$$

である。たとえば、$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を

求めようとすると、

$$\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3}=\tan\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、$\tan\theta$ が

$\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから　（答）$\tan^{-1}(\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問２　表を完成せよ。

問３　次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1)=$　　(2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=$　　(3) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=$

＜数列の極限１＞

項がかぎりなく続く数列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ \cdots$$

を**無限数列**という。この無限数列において、a_n を第 n 項または一般項といい、上の無限数列を、単に $\{a_n\}$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ の極限のようす、つまり n をかぎりなく大きくしていくとき、項 a_n の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

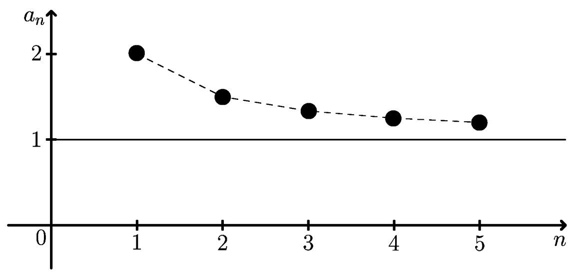
n をかぎりなく大きくすることを、$n \to \infty$ と表す。

（注） 記号 ∞ は「無限大」と読む。

例１ 数列

$$\frac{2}{1}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n+1}{n}\ ,\ \cdots$$

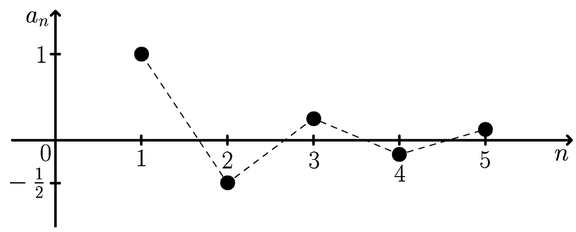
の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \dfrac{n+1}{n}$ の値は減少しながら、1 にかぎりなく近づいていく。



例２ 数列

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \cdots\ ,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ ,\ \cdots$$

の極限を考える。右図のように、$n \to \infty$ のとき、$a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ の値は増減を繰り返しながら、0 に限りなく近づいていく。



問 次の数列の極限の様子を調べよ。

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{2n-1}{2n}\ ,\ \cdots$$

< 数列の極限２ >

無限数列 $\{a_n\}$ において、$n \to \infty$ のとき、a_n の値が一定の数 α に限りなく近づく場合に $\{a_n\}$ は α に **収束する** といい、

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という。

例１　前ページの例より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

例２　$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{n} \to 0$ であるから、グラフを見なくても

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2+0} = \frac{3}{2}$$

等がわかる。

例３　$n \to \infty$ のとき $\dfrac{2}{n} \to 0,\ \dfrac{1}{n^2} \to 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

問.　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} =$

(2)　$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+1} =$

＜数列の極限３＞

数列には、一定の値に収束しないものがある。数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、 $\{a_n\}$ は**発散する**という。

例１　数列　$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$

を考える。$n \to \infty$ のとき、$a_n = n^2$ は限りなく大きくなる。

例１のようなとき、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**といい、

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty \quad (\text{又は } a_n \to +\infty)$$

または　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　(又は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$)　と表す。

例２　数列　$2,\ 0,\ -2,\ \cdots,\ 4-2n,\ \cdots$

を考える。　$n \to \infty$ のとき、$a_n = 4-2n$ は負の値をとりながら、その絶対値は限りなく大きくなる。

例２のようなとき、数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい、

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

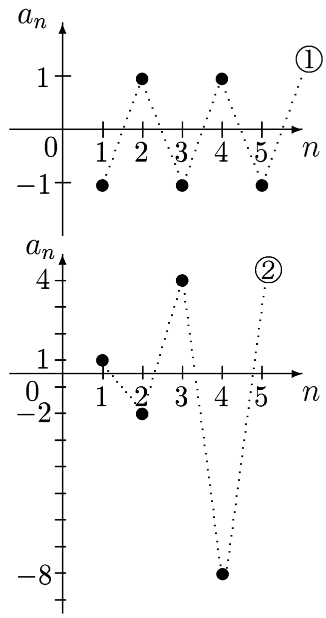
と表す。例２の場合は、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4-2n = -\infty$　となる。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n^3+n) \ =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (5-n^2) \ =$

＜数列の極限 4＞



例 1　次のような数列も発散する数列である。

① $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n, \cdots$

② $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^{n-1}, \cdots$

数列①、②では n を限りなく大きくしても、一定の値に収束しないし、正の無限大にも、負の無限大にも発散しない。このような数列は**振動する**という。

発散する数列 $\{a_n\}$ は次のような場合がある。

(1)　正の無限大に発散 $\cdots\cdots\cdots \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(2)　負の無限大に発散 $\cdots\cdots\cdots \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(3)　振動する

例 2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} -\left(\dfrac{4}{3}\right)^n = -\infty$

(4)　数列

$$-\frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \cdots, \left(-\frac{4}{3}\right)^n, \cdots$$

は振動する。

問　次の数列の極限を調べ、例 2 のように答えよ。

(1) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{27}{8}, \dfrac{81}{16}, \cdots, \left(\dfrac{3}{2}\right)^n, \cdots$

(2) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \cdots, \left(\dfrac{2}{3}\right)^n, \cdots$

(3) $-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \cdots, \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n, \cdots$

(4) $-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, -\dfrac{27}{8}, \dfrac{81}{16}, \cdots, \left(-\dfrac{3}{2}\right)^n, \cdots$

(5) $-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}, -\dfrac{27}{8}, -\dfrac{81}{16}, \cdots, -\left(\dfrac{3}{2}\right)^n, \cdots$

＜無限級数＞

無限級数 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

を**無限級数**という。数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第 n 項までの**部分和**という。部分和を作る数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

が収束して、その極限値が S (つまり $\lim_{n\to\infty} S_n =$) のとき、無限級数 (1) は S に**収束する**といい、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、 S を**無限級数の和**という。

例　無限級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分和を S_n とすると

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ -) & \frac{1}{2}S_n = & \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \hline & \frac{1}{2}S_n = & \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2^{n+1}} \end{array}$$

より

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \to \infty$ のとき $\frac{1}{2^n} \to 0$ だから

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(注)　この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を**無限等比級数**という。

問　次の無限級数の和 S を求めよ。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

＜循環小数＞

例1　$\dfrac{1}{3}$ を小数にすると、$\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$ であり、3 が無限に続く。

$\dfrac{4}{11}$ を小数にすると、$\dfrac{4}{11}=0.363636\cdots$ であり、3 と 6 が無限に続く。

このように同じ数が無限に繰り返される小数を**循環小数**という。

繰り返される最初と最後の数の上にドット (黒丸) を付けて表す。
例えば、

$$0.333\cdots=0.\dot{3}\quad,\quad 0.363636\cdots=0.\dot{3}\dot{6}$$

$$0.5123123123123\cdots=0.5\dot{1}2\dot{3}$$

等で表す。

例2　循環小数は分数で表される。例えば $0.\dot{1}\dot{2}=S$ とおくと、

$$\begin{aligned}S &= 0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots\\ &= 0.12+0.0012+0.000012+\cdots\\ &= 12\times\left(\frac{1}{100}\right)+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots\end{aligned}$$

のような無限等比級数となる。第 n 項までの部分和を S_n とおくと、

$$S_n=12\times\left(\frac{1}{100}\right)+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$-)\quad \frac{1}{100}S_n=12\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^n+12\times\left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}$$

$$\frac{99}{100}S_n=12\times\left(\frac{1}{100}\right)-12\times\left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}$$

より $S_n=\dfrac{12}{99}-\dfrac{12}{99}\times\left(\dfrac{1}{100}\right)^n$ である。$n\to\infty$ のとき、$\left(\dfrac{1}{100}\right)^n\to 0$
より

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{12}{99}-\frac{12}{99}\times\left(\frac{1}{100}\right)^n\right\}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

問　次の循環小数を分数になおせ。

$$S=0.\dot{7}=0.777\cdots$$

＜関数の極限＞

関数 $f(x)$ において、x が a 以外の値を取りながら、a に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づくことを、

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と表し、α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。a に近づく変数は x 以外でもよい。

例1 $\displaystyle \lim_{x \to 5} \left(x^2 - 3x\right) = 10, \quad \lim_{x \to 1} \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{h+3}{2h+1} = 3$

例2 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

例3 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(9+6h+h^2)-9}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{7x+3}{x+1} =$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} =$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} =$

(4) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} =$

＜パスカルの三角形＞

例 $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

問１ 次の展開式を求めたい。$\boxed{}$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$=\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4$$

(2) $(a+b)^5=(a+b)\left(\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4\right)$

$$=\boxed{}\times a^5+\boxed{}\times a^4b+\boxed{}\times a^3b^2+\boxed{}\times a^2b^3+\boxed{}\times ab^4+\boxed{}\times b^5$$

問２ $(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$(a+b)^0=1$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

$(a+b)^1=1\times a+1\times b$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1 1

$(a+b)^2=1\times a^2+2\times ab+1\times b^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1 2 1

$(a+b)^3=1\times a^3+3\times a^2b+3\times ab^2+1\times b^3$ ・・・・・・・・・・・・・・ 1 3 3 1

$(a+b)^4=\boxed{}\times a^4+\boxed{}\times a^3b+\boxed{}\times a^2b^2+\boxed{}\times ab^3+\boxed{}\times b^4$ ・・・・・・・ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

$(a+b)^5=\boxed{}\times a^5+\boxed{}\times a^4b+\boxed{}\times a^3b^2+\boxed{}\times a^2b^3+\boxed{}\times ab^4+\boxed{}\times b^5$ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a+b)^6=\boxed{}\times a^6+\boxed{}\times a^5b+\boxed{}\times a^4b^2+\boxed{}\times a^3b^3+\boxed{}\times a^2b^4+\boxed{}\times ab^5+\boxed{}\times b^6$

＜整関数の微分１＞

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、$f(x)$ を**整関数**という。
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

であった。$f(x)$ が整関数の場合にこの極限値を調べる。

例１ $f(x)=1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

例２ $f(x)=x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

例３ $f(x)=x^2$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^2\right)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

例４ $f(x)=x^3$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^3\right)' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2\end{aligned}$$

問 $f(x)=x^4$ のとき $f(x)$ を極限の計算によって求めよ。（途中式も書くこと）

$$\left(x^4\right)' = f'(x) =$$

< 整関数の微分 2 >

問 1 33、34 ページを参考にして、 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^5)' = f'(x) =$

問 2 $f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^6)' = f'(x) =$

問 3 下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$ である。

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問 4 n が一般の自然数のとき、 x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$(x^n)' =$

< 整関数の微分 3 >

導関数の定義から以下の性質がわかる。

関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$\big(kf(x)\big)' = k \times f'(x)$	(定数倍の微分)
$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$	(和の微分)
$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x)$	(差の微分)

が成り立つ。

例 (1) $(x^5+x^6)' = (x^5)' + (x^6)' = 5x^4 + 6x^5$

(2) $(7x^4)' = 7 \times (x^4)' = 7 \times 4x^3 = 28x^3$

(3) $(6x^5+5x^4)' = (6x^5)' + (5x^4)' = 30x^4 + 20x^3$

(4) $(x^7 - 4x^5 + 5x^2 - 8)' = (x^7)' - (4x^5)' + (5x^2)' - (8)'$

$= 7x^6 - 20x^4 + 10x$

(5) $\big((x^2+3)(x^2-4)\big)' = (x^4 - x^2 - 12)' = 4x^3 - 2x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x^3 - x^5)'$

(2) $(12x^5)'$

(3) $(4x^3 + 8x^5)'$

(4) $(7x^6 - 3x^4 + 5)'$

(5) $(10x^4 - 5x^3 + 16)'$

(6) $(4x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 9x)'$

(7) $\big((x-2)(x+3)\big)'$

(8) $\big((x^2-4)(x^2-5)\big)'$

＜ 極大・極小 1 ＞

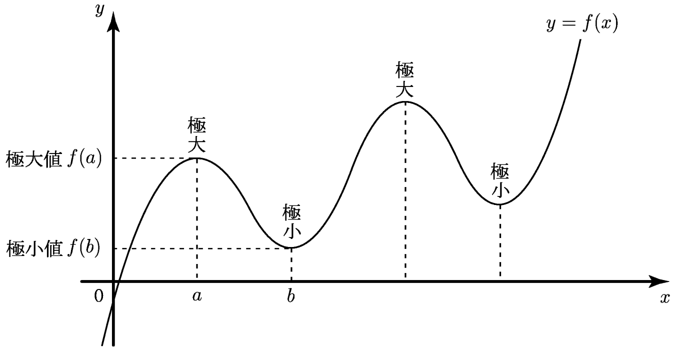
関数 $f(x)$ について、 a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい、 $f(x)$ を**極大値**という。

また、 b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



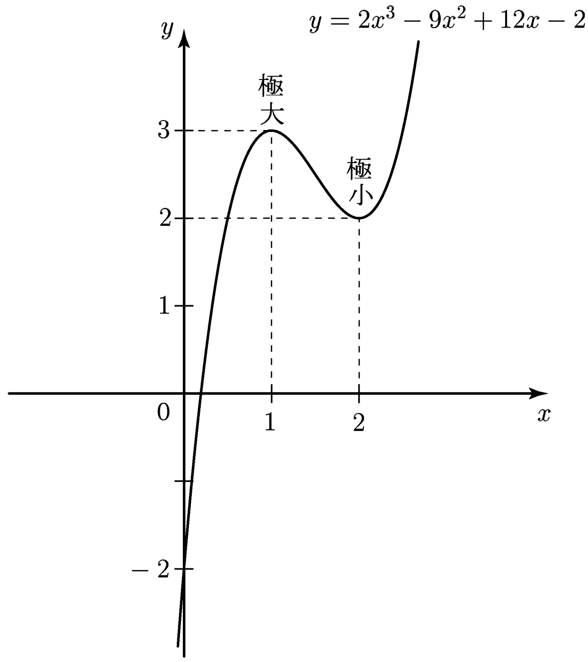
が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい、 $f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例　3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
		極大		極小	



増減表より

$x = 1$ のとき　極大値 $y = 3$

$x = 2$ のとき　極小値 $y = 2$

であることがわかる。

問　3 次関数 $y = x^3 - 3x^2$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$x =$ 　　　のとき極大値 $y =$

$x =$ 　　　のとき極小値 $y =$

x	
y'	
y	

＜極大・極小２＞

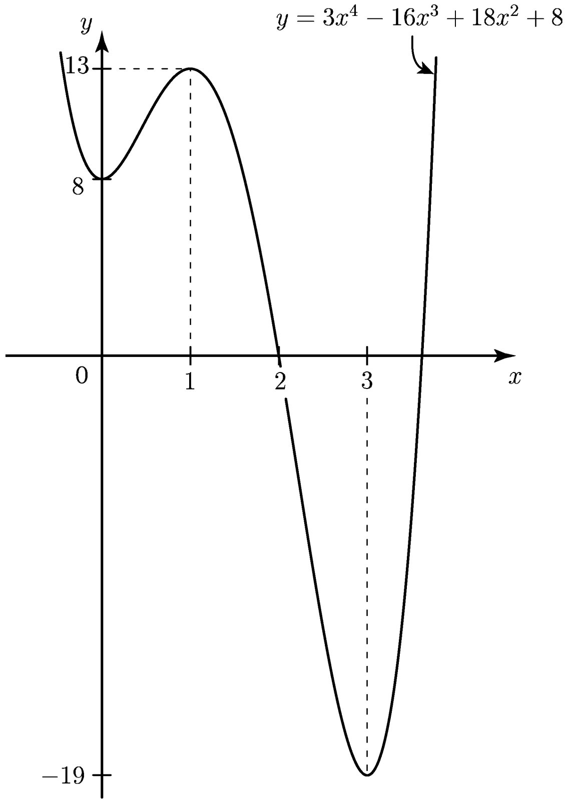
例　4次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$ の極値を調べるには、3次関数と同様に増減表を作ればよい。
微分すると

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\
&= 12x(x^2 - 4x + 3) \\
&= 12x(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

より、$x = 0,\ x = 1,\ x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	8	$\nearrow$	13	$\searrow$	-19	$\nearrow$
		極小		極大		極小	

増減表より
$x = 1$ のとき極大値 $y = 13$
$x = 0$ のとき極小値 $y = 8$
$x = 3$ のとき極小値 $y = -19$
であることがわかる。



問　以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1)　$y = x^4 - 2x^2 + 3$

x	
y'	
y	

(2)　$y = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$

x	
y'	
y	

＜分数関数の微分＞

例 分数関数 $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ の導関数 $f'(x)$ を求めたい。

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \quad \text{より} \quad f(x+h) = \frac{1}{x+h+3}$$

だから

$$\left(\frac{1}{x+3}\right)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h+3} - \dfrac{1}{x+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(x+3)-(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-h}{(x+h+3)(x+3)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-1}{(x+h+3)(x+3)}}{1} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$= \frac{-1}{(x+0+3)(x+3)} = -\frac{1}{(x+3)^2}$$

となる。つまり

$$\left(\frac{1}{x+3}\right)' = -\frac{1}{(x+3)^2}$$

である。これを指数で表すと

$$\Big((x+3)^{-1}\Big)' = -(x+3)^{-2}$$

となる。

問 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき

(1) $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$f'(x) =$

(2) (1) の結果を例のように指数を使って表せ。

＜無理関数の微分＞

例　無理関数 $f(x) = \sqrt{x+3}$ の導関数 $f'(x)$ を求めたい。

$f(x) = \sqrt{x+3}$ より $f(x+h) = \sqrt{x+h+3}$

だから

$$\left(\sqrt{x+3}\right)' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}\right)\times\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}{h \qquad \times\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h+3}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+3)-(x+3)}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0+3}+\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

より

$$\left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

である。これを指数で表すと

$$\left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

問　$f(x) = \sqrt{x}$ のとき

(1)　$f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$f'(x) =$

(2)　(1) の結果を例のように指数を使って表せ。