高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000年度版)

3

内容

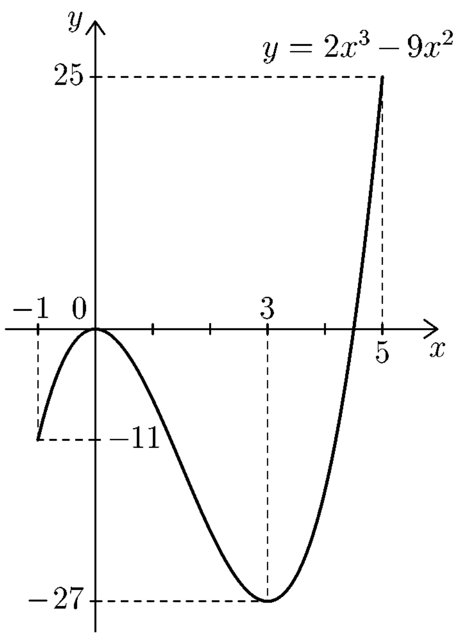
◎ 三角関数

◎ 指数

◎ 対数

◎ 導関数

◎ 関数の増減

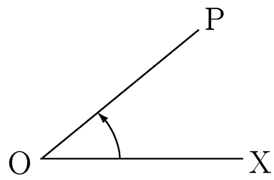


電子・光システム工学科

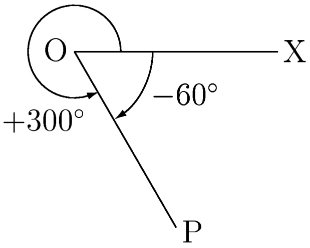
井上 昌昭 著

＜一般角＞

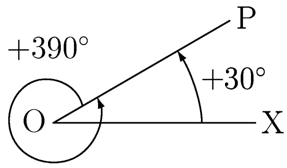
OX を固定した線とし、点 O を中心に、OP が回転する。OX を始線と言い、OP を動径という。反時計まわりをプラス方向、時計まわりをマイナス方向として、始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



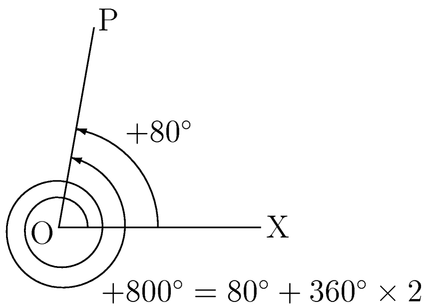
例 1 (1)



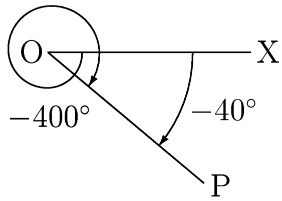
(2)



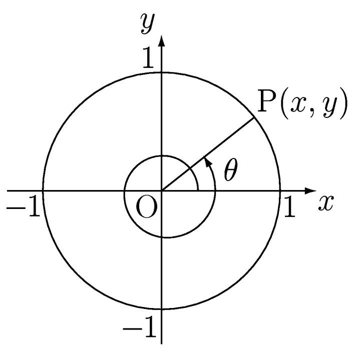
(3)



(4)



[一般角の三角関数]



一般角 θ に対する三角関数を $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の場合と同様に、点 P の座標 (x, y) で

$$\cos\theta = x\ ,\quad \sin\theta = y\ ,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して、

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

例 2 $\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$, $\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問 次の三角関数を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 450^\circ$　(2) $\cos(-90^\circ)$　(3) $\tan 510^\circ$

(4) $\sin(-240^\circ)$　(5) $\cos 600^\circ$　(6) $\tan 850^\circ$

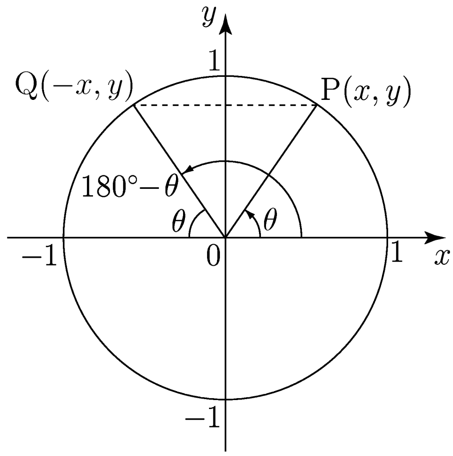
＜三角関数の性質１＞

例　$\cos\theta = x$，$\sin\theta = y$ のとき、点 $\mathrm{P}(x, y)$ と y 軸に関して対称な点 $\mathrm{Q}(-x, y)$ は角 $180^\circ - \theta$ を表す点である。従って

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -x \\ \sin(180^\circ - \theta) &= y \\ \tan(180^\circ - \theta) &= \frac{y}{-x}\end{aligned}$$

となる。これを $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ で表すと

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -\cos\theta \\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin\theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

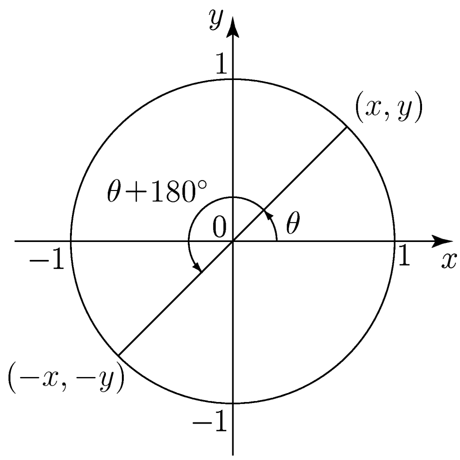


問１　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(\theta + 180^\circ) =$

(2) $\cos(\theta + 180^\circ) =$

(3) $\tan(\theta + 180^\circ) =$

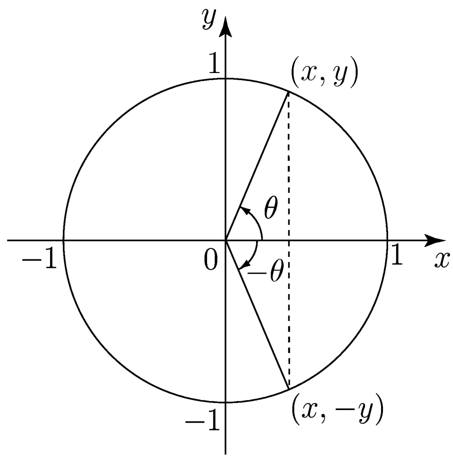


問２　右図を参考にして、次の三角関数の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。

(1) $\sin(-\theta) =$

(2) $\cos(-\theta) =$

(3) $\tan(-\theta) =$

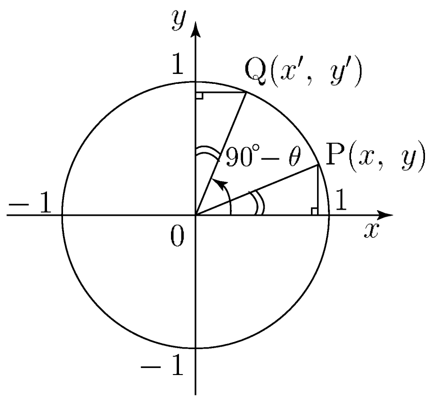


＜三角関数の性質２＞

問 1　右図のように角度 θ を表す点を P $(x,\ y)$, 角度 $90^\circ - \theta$ を表す点を Q $(x',\ y')$ とすると

$$x' = y \quad , \quad y' = x$$

の関係がある。これを参考にして次の値を $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ で表せ。



(1)　$\sin(90^\circ - \theta) =$　　　　(2)　$\cos(90^\circ - \theta) =$

例　$\sin 20^\circ =\ 0.342,\ \ \cos 20^\circ =\ 0.9397,\ \ \tan 20^\circ =\ 0.364$ である。
これは三角比の表で調べるわけだが，この表には 0° から 90° までしか書いていない。前ページの例を参考にすると

$$\sin(160^\circ) = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = 0.342$$
$$\cos(160^\circ) = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -0.9397$$
$$\tan(160^\circ) = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.364$$

がわかる。

問 2　上の例と前のページの問等を参考にして、次の値をもとめよ。

(1)　$\sin 200^\circ =$　　　　$\cos 200^\circ =$　　　　$\tan 200^\circ =$

(2)　$\sin(-20^\circ) =$　　　　$\cos(-20^\circ) =$　　　　$\tan(-20^\circ) =$

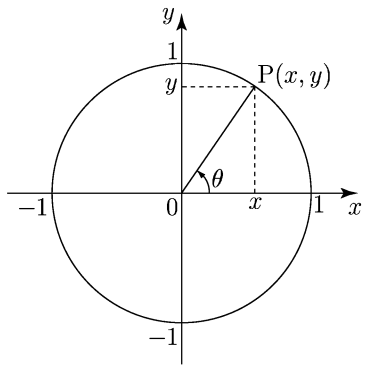
(3)　$\sin 70^\circ =$　　　　$\cos 70^\circ =$

＜三角関数の性質3＞

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると、三角関数の定義から

$$\sin\theta \;=\; y\ ,\quad \cos\theta \;=\; x\ ,\quad \tan\theta \;=\; \frac{y}{x}$$

である。ここで点 P は原点を中心とする半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の点だから



$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

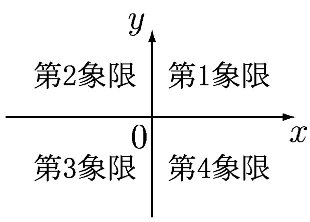
が成り立つ。

注) 記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta) \times (\cos\theta)$ の意味であり、$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)\ ,\quad \sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$$

問 1 $\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2 三角関数の定義から、sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり、第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



θ	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

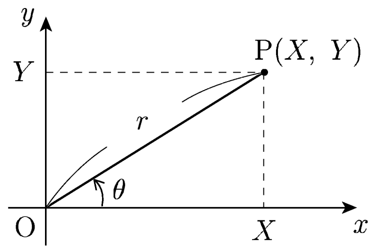
例 角度 θ は 0° から 180° までの間の角で、$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ である。このとき

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ だから $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

よって $\cos\theta \;=\; \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} \;=\; \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 3 角度 θ は -90° から 90° までの間の角で、$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

＜極座標＞



(図1)

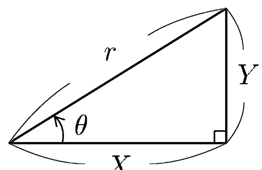
座標平面上の点 P$(X,\ Y)$ が図 1 のように原点 O との距離が r で、x 軸からの角度が θ のとき $(X,\ Y)$ は r と θ によって決まる。図 2 より

$$\frac{X}{r} = \cos\theta\ ,\ \ \frac{Y}{r} = \sin\theta$$

だから

$$X = r\cos\theta\ ,\ \ Y = r\sin\theta$$

より



(図2)

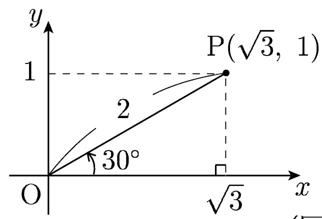
$$\boxed{(X,\ Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}$$ (極座標表示)

と表される。$(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)$ を点 P$(X,\ Y)$ の**極座標**という。

例 (1) 点 P$(\sqrt{3},\ 1)$ は図 3 より極座標になおすと

$$(\sqrt{3},\ 1) = (2\cos 30°\ ,\ 2\sin 30°)$$

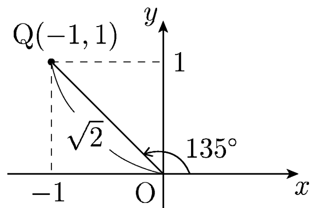
となる。



(図3)

(2) 点 Q$(-1,\ 1)$ は図 4 より

$$(-1,\ 1) = (\sqrt{2}\cos 135°\ ,\ \sqrt{2}\sin 135°)$$



(図4)

＜検算＞ 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

(1) $(2\cos 30°\ ,\ 2\sin 30°) = \left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 2\times\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(\sqrt{2}\cos 135°,\ \sqrt{2}\sin 135°) = \left(\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2},\ \frac{2}{2}\right) = (-1,\ 1)$

問 次の座標を極座標になおせ。

(1) $(3,\ 3)$

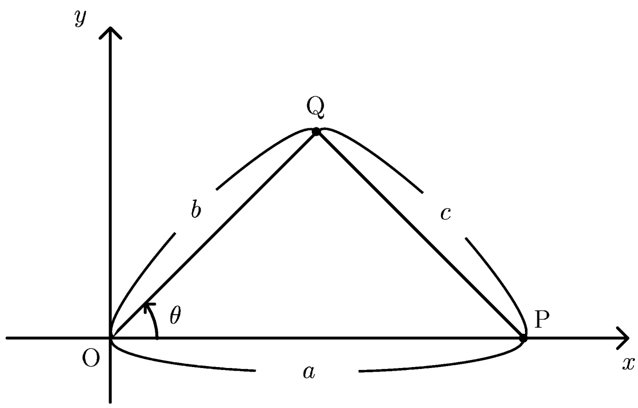
(2) $(-1,\ \sqrt{3})$

(3) $(\sqrt{3},\ -1)$

(4) $(-2,\ -2\sqrt{3})$

＜余弦定理1＞

問 (1) 右図の点 P と Q の座標を
a と b および角度 θ で表せ。



P(　　　,　　　)

Q(　　　,　　　)

Q は極座標を使う。

(2) 平面上の２点間の距離の公式（ワークブック２）を使って、
PQ^2 を a と b と θ を用いて表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

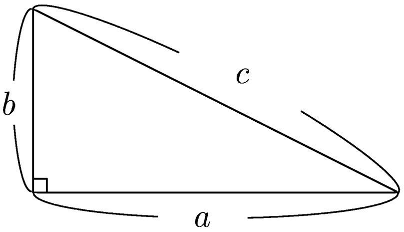
(3) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いることによって PQ^2 を簡単にせよ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

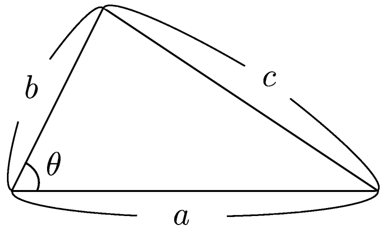
(4) (3) の結果を用いて、c^2 を a と b と $\cos\theta$ だけを使って表せ。

$c^2 =$

＜余弦定理２＞



（図１）



（図２）

図１のように直角三角形の場合はピタゴラスの定理より

$$c^2 = a^2 + b^2$$

によって斜辺の長さ c を

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

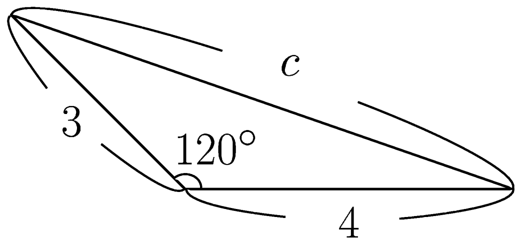
として求まるが、図２のように θ が 90° 以外の場合はそうはならない。

問１ 前ページの結果を用いて、c^2 を a と b と θ で表せ。

$$c^2 =$$

（注）この式を**余弦定理**という

例 右図の場合に



$$c^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

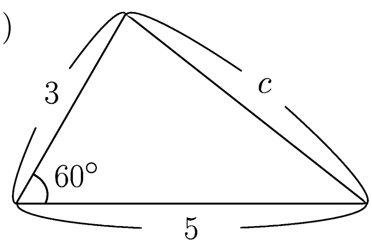
が成り立つ。ここで $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$ より

$$c^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 12 = 37$$

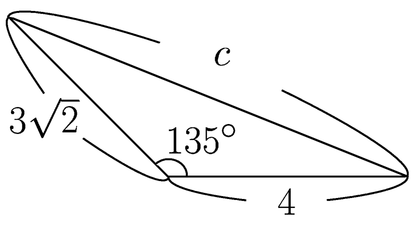
であるから $c = \sqrt{37}$。

問２ 三角形が以下の場合に c を求めよ。

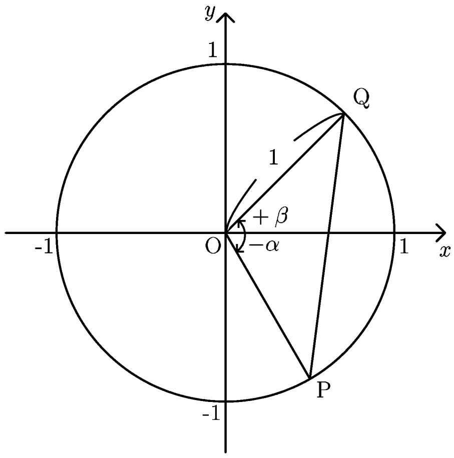
(1)



(2)



＜加法定理１＞



問

(1) 右図において点 Q の座標を
を極座標表示せよ。

Q$\Bigl($ $\quad\quad$, $\quad\quad$ $\Bigr)$

(2) 右図において点 P の座標を
極座標表示すると $\mathrm{P}\bigl(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)\bigr)$
となるが、2 ページ問 2 の性質を用いて、P の座標を $\cos\alpha$
と $\sin\alpha$ で表せ。

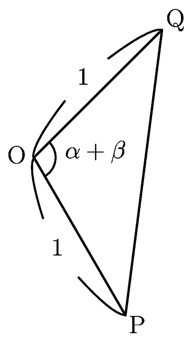
P$\Bigl($ $\quad\quad$, $\quad\quad$ $\Bigr)$

(3) 平面上の 2 点間の距離の公式 $\bigl($ ワークブック 2 $\bigr)$ を使って、
PQ^2 を α と β で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(4) (3) で得られた PQ^2 の式を展開し、$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ を使ってできるだけ簡単な式になおせ。

$\mathrm{PQ}^2 =$



(5) 右図の三角形 OPQ に対し、余弦定理
を使って、PQ^2 を $\alpha + \beta$ で表せ。

$\mathrm{PQ}^2 =$

(6) (4) と (5) で得られた式が等しいことから、$\cos(\alpha+\beta)$ を
$\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

＜加法定理２＞

前ページの結果より

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が成立することが分かった。これをコサインの**加法定理**という。

例 75° は 45° と 30° の和であるから、

(1) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 75^\circ$ は $\cos^2(75^\circ)+\sin^2(75^\circ)=1$ から計算してもできないことはないが２重根号 $\left(\sqrt{}\right.$ の中に $\sqrt{}$ がある$\left.\right)$ がでてくる。それをさけるために２、３ページで導いた三角関数の性質

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を使って、次のようにすればよい。

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\cos(90^\circ-75^\circ)=\cos\bigl((90^\circ-45^\circ)+(-30^\circ)\bigr)\\&=\cos(90^\circ-45^\circ)\cos(-30^\circ)-\sin(90^\circ-45^\circ)\sin(-30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ(-\sin 30^\circ)\\&=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

問 105° は 60° と 45° の和であることを利用して、次の値を求めよ。

$\cos 105^\circ=$

$\sin 105^\circ=$

＜加法定理３＞

問１　前ページの例の (2) を参考にして、$\sin(\alpha+\beta)$ を
$\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

$\sin(\alpha+\beta) =$

注）　この式をサインの加法定理という。

問２　前ページの例の結果を使って次の値を求めよ。

(1) $\cos 165^\circ =$

(2) $\sin 165^\circ =$

例 15° は 45° から 30° を引いた角度である。三角関数の性質

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

とサイン、コサインの加法定理を使うと、次のように求まる。

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \cos 45^\circ \cos(-30^\circ) - \sin 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\bigl(45^\circ + (-30^\circ)\bigr) \\
&= \sin 45^\circ \cos(-30^\circ) + \cos 45^\circ \sin(-30^\circ) \\
&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

問３　例を参考にして、次式を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ だけを用いて表せ。

(1) $\cos(\alpha-\beta) =$

(2) $\sin(\alpha-\beta) =$

＜加法定理４＞

例　9 ページの例より $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

ここで分母の有理化をするために分母と分子に $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ をかけると

$$\tan 75^\circ = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

（別解）　$\cos 75^\circ$ と $\sin 75^\circ$ の一方しかわかっていない場合は次のように考える。

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}}{\frac{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}{1 - \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}$$

問１　$\tan 105^\circ$ を求めよ。

問２　上の別解を参考にして $\tan(\alpha+\beta)$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ だけを用いて表せ。

$\tan(\alpha+\beta) =$

この式をタンジェントの加法定理という。

＜累乗根1＞

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m=1$ のときは $\dfrac{n}{1}=n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。
$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2=2}$ である。

このx は無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の**2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x=\sqrt{2}}$ と書く。

例2 体積が 2 である立方体のいっぺんの長さを x とすると $\boxed{x^3=2}$ である。

この x は無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の**3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x=\sqrt[3]{2}}$ と書く。

例3 $x=\sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4=2}$ である。

x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 つの**4 乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して、n 乗すると a になる正の数を x とする。
つまり $\boxed{x^n=a}$ $(x>0)$ である。この x を a の**n 乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[n]{a}}$ と書く。
平方根、立方根、n 乗根等をまとめて **累乗根**（るいじょうこん） という。
また記号 $\sqrt{}$、$\sqrt[3]{}$、$\sqrt[n]{}$ をまとめて**根号**という。
(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}}$ と書く。

例4 累乗根は常に無理数とは限らない。たとえば

$$\sqrt{49}=7,\quad \sqrt[3]{0.125}=0.5,\quad \sqrt[4]{81}=3,\quad \sqrt[5]{32}=2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{121}$　(2) $\sqrt[3]{27}$　(3) $\sqrt[3]{64}$

(4) $\sqrt[4]{16}$　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$　(6) $\sqrt[5]{243}$

＜ 累乗根 2 ＞

例1　$\sqrt[3]{2}$ は 3 乗して 2 になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ がなりたつ。

例2　$x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$

より $x = \sqrt[3]{10}$　つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ がなりたつ。

例3　$y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$　つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ がなりたつ。

(注) $\sqrt[n]{}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または 0(ゼロ)) がはいる。
負の数は根号の中に入れない。

例4　(1)　$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問　次式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$

(2)　$\sqrt[4]{7} \times \sqrt[4]{10}$

(3)　$\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{24}}$

(4)　$\dfrac{\sqrt[5]{36}}{\sqrt[5]{12}}$

＜累乗根3＞

例1 (1) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times 5}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}=2\times\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\times 2}=\sqrt[4]{2^4}\times\sqrt[4]{2}=2\times\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$

問1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{48}$　　(2) $\sqrt[4]{80}$　　(3) $\sqrt[4]{64}$

例2 $x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3=\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$
$$=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5\times 5=5^2$$

よって $x^3=5^2$ より $x=\sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$$

がなりたつ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式がなりたつ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$$

例3 (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(2) $\sqrt[3]{8^4}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^4=2^4=16$

問2 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$　　(2) $\sqrt[3]{27^2}$

(3) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$　　(4) $\sqrt[5]{32^3}$

＜整数指数＞

例 1 自然数 n と m に対し、$n > m$ ならば

$$(*) \qquad \boxed{2^n \div 2^m = 2^{n-m}}$$

が成り立つ。今 $n = m$ のとき $(*)$ の左辺は 1 であり、右辺は 2^0 となる。そこで

$$\boxed{2^0 = 1} \quad \text{(ゼロ乗=1)}$$

と定めることにする。$(*)$ 式で $n = 0$ のとき左辺は $\dfrac{1}{2^m}$ であり、右辺は 2^{-m} であるから

$$\boxed{2^{-m} = \frac{1}{2^m}}$$

と定めると、全ての整数 n と m に対して $(*)$ 式が成り立つ。

一般に正の数 a と自然数 m に対し

$$\boxed{a^0 = 1 \ \text{(ゼロ乗=1)} \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

と定めることにする。このように決めると全ての整数 n と m に対し

$$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

が成り立つ。

例 2 $5^0 = 1 \quad , \quad 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$$3^5 \times 9^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{9^2} = \frac{3^5}{3^4} = 3$$

$$(2^3)^{-2} = \frac{1}{(2^3)^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

問 次の値を求めよ。

(1) 1^0　　(2) 2^{-1}　　(3) 3^{-2}

(4) 4^{-3}　　(5) $2^8 \times 4^{-3}$　　(6) $9^3 \times 27^{-2}$

(7) $(3^2)^{-1}$　　(8) $(4^{-1})^3$　　(9) $(2^{-4})^{-1}$

＜分数指数１＞

例１ 自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\,\text{個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m\times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

(1) $$2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

(2) $$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例２ (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$

(2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$

(4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 次の値を求めよ。

(1) $144^{\frac{1}{2}}$　(2) $64^{\frac{2}{3}}$　(3) $81^{\frac{1}{4}}$

(4) $36^{\frac{3}{2}}$　(5) $8^{\frac{4}{3}}$　(6) $16^{\frac{5}{4}}$

(7) $25^{-\frac{1}{2}}$　(8) $27^{-\frac{2}{3}}$　(9) $64^{-\frac{4}{3}}$

＜分数指数２＞

例1 $x=\sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$ より $x=\sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$$

例2 $\sqrt[6]{2^3}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

問1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[10]{4^5}$　(2) $\sqrt[12]{5^3}$　(3) $\sqrt[3]{7^6}$　(4) $\sqrt[4]{9^6}$

例3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

(別解)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

例4 $\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5}\times\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{5\times5^3\times5^2}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(別解)　$\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{6}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=5^1=5$

例5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$

(別解)　$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

問2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{100}\times\sqrt[6]{100}$　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{4}}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$　(4) $\left(\sqrt[6]{\sqrt{8}}\right)^2$

＜指数法則＞

分数指数や整数指数を定義しておくと、次の指数法則が成立する。

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して

$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$, $2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$

$3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$, $4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 (1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^5}$　　(2) $\sqrt[4]{a^5} \div \sqrt[4]{a}$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^8}$　　(4) $\sqrt[3]{a^5} \div (\sqrt[3]{a})^2$

(5) $(\sqrt[3]{a})^{\frac{6}{5}}$　　(6) $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{-2}}}\right)^3$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{6}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

（注）ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

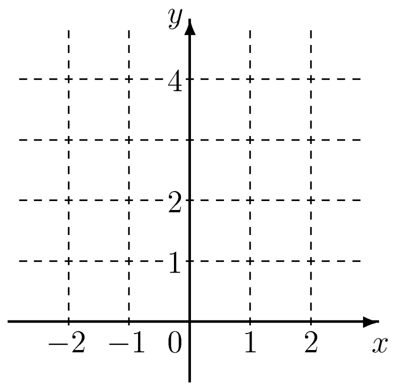
(1) $(5^4 \times 7^2)^{\frac{1}{3}} \times (5^2 \times 7^4)^{\frac{1}{3}}$　　(2) $\sqrt[4]{54} \times \sqrt[4]{24}$

＜指数関数＞

問 関数が以下の場合に、表を完成し、グラフを書け。

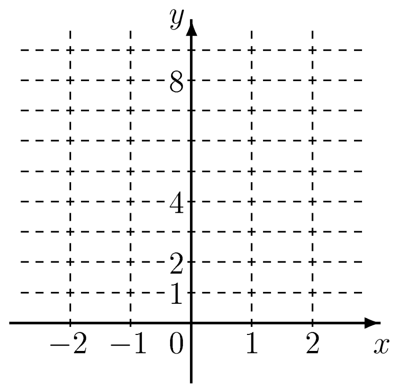
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



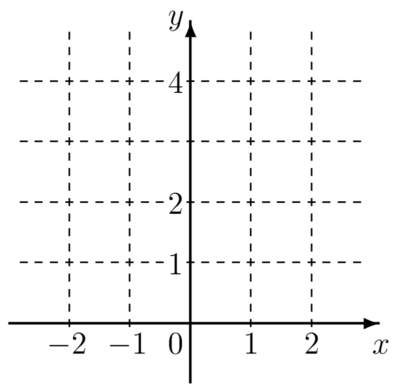
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



< 指数方程式 >

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$　(2) $4^x = 0.5$　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より (答) $x = \dfrac{7}{2}$

(2) $4^x = 0.5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1$ より (答) $x = -\dfrac{1}{2}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow -x = \dfrac{2}{3}$ より (答) $x = -\dfrac{2}{3}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$　(2) $3^x = 27$　(3) $3^x = 81$　(4) $3^x = \dfrac{1}{9}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$　(6) $10^x = 1$　(7) $10^x = 100$　(8) $10^x = 10\sqrt{10}$

(9) $10^x = 0.1$　(10) $10^x = 0.01$　(11) $2^x = 1$　(12) $2^x = 8$

(13) $2^x = 64$　(14) $2^x = \sqrt[3]{2}$　(15) $2^x = 2\sqrt[4]{2}$　(16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$　(18) $2^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(19) $2^x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(20) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.5$　(22) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$　(23) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.125$　(24) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4$　(26) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$　(27) $4^x = 1$　(28) $4^x = 2$

(29) $4^x = 8$　(30) $4^x = 32$　(31) $4^x = 0.25$　(32) $4^x = \sqrt{2}$

＜対数１＞

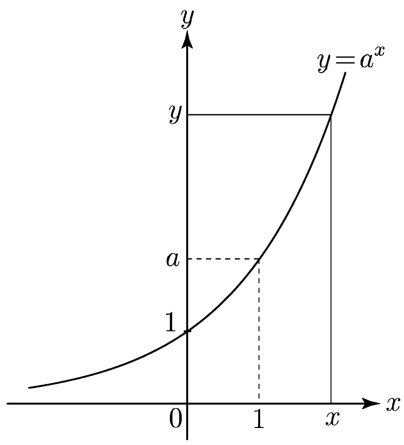
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を、a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例１　(1)　$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2)　$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問１　次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に、対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$　　(2) $10^{-1} = 0.1$　　(3) $5 = \log_2 32$　　(4) $\dfrac{2}{3} = \log_8 4$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば}\bigcirc\text{になるか？}}$ という意味である。

例２　(1)　$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2)　$\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問２　次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 32$　　　(2)　$\log_3 27$

(3)　$\log_{10} 10000$　　　(3)　$\log_5 125$

＜ 対数 2 ＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\frac{25}{100}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$　　(2) $\log_2 \sqrt{2}$　　(3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$　　(5) $\log_4 64$　　(6) $\log_4 1$

(7) $\log_6 \sqrt[3]{6}$　　(8) $\log_5 0.2$　　(9) $\log_{10} 0.01$

(10) $\log_7 \sqrt[3]{49}$　　(11) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(12) $\log_4 8$

例 2

$$\log_2(8\times 16) = \log_2\left(2^3\times 2^4\right) = \log_2\left(2^7\right) = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(2^4\right) = 3 + 4 = 7$$

より

$$\log_2(8\times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

がなりたつ。

一般に正の数 M と N に対して

$$\boxed{\log_2(M\times N) = \log_2 M + \log_2 N}$$

がなりたつ。

問 2 $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ の場合に次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2(M\times N)$

(2) $\log_2 M + \log_2 N$

＜対数３＞

例１　$\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right)=\log_2\left(\dfrac{2^5}{2^2}\right)=\log_2(2^3)=3$

$\log_2 32-\log_2 4=\log_2(2^5)-\log_2(2^2)=5-2=3$

より　$\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right)=\log_2 32-\log_2 4$

が成り立つ。

問１　$M=2^\alpha$, $N=2^\beta$ のとき次の対数の値を α と β で表せ。

(1) $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$

(2) $\log_2 M-\log_2 N$

例２　(1) $\log_2(M^2)=\log_2(M\times M)=\log_2 M+\log_2 M=2\log_2 M$

(2) $\log_2(M^3)=\log_2(M^2\times M)=\log_2(M^2)+\log_2 M=3\log_2 M$

問２　次の対数の値を $\log_2 M$ で表せ。

(1) $\log_2(M^4)$　　(2) $\log_2(M^5)$

問３　実数 α と r に対し $M=2^\alpha$ のとき次式を α と r で表せ。

(1) $\log_2(M^r)$

(2) $r\log_2 M$

問４　$\log_2 M=\log_2\left(\dfrac{M}{N}\times N\right)=\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)+\log_2 N$

を利用して $\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)$ を $\log_2 M$ と $\log_2 N$ で表せ。

$\log_2\left(\dfrac{M}{N}\right)=$

＜対数4＞

22ページと同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(\,M \times N\,) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) =$

問2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$\log_a(\,M^r\,) =$

例　(1)　$\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2)　$\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50 \times 20) = \log_{10} 1000 = 3$

(3)　$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3\left(6^2\right) - \log_3 4 = \log_3\left(\dfrac{6^2}{4}\right) = \log_3 9 = 2$

問3　次式を簡単にせよ。

(1)　$\log_2 12 - \log_2 3$

(2)　$\log_3 18 + \log_3\left(\dfrac{9}{2}\right)$

(3)　$\log_6 18 + 2\log_6 2 + \log_6 3$

(4)　$\log_{10} 40 + \log_{10} 250 + \log_{10} 0.1$

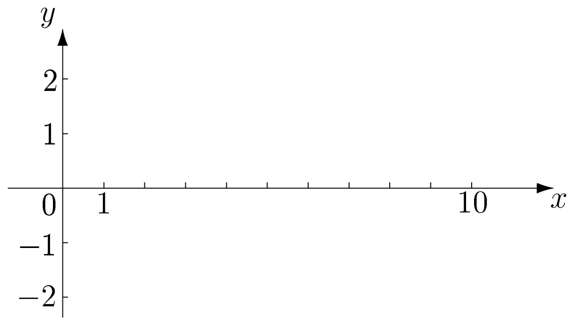
＜対数関数＞

問　次の関数に対し、表を完成させ、定義域 (括弧内の x の範囲) 内で、グラフの概形を書け。

(1) $y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

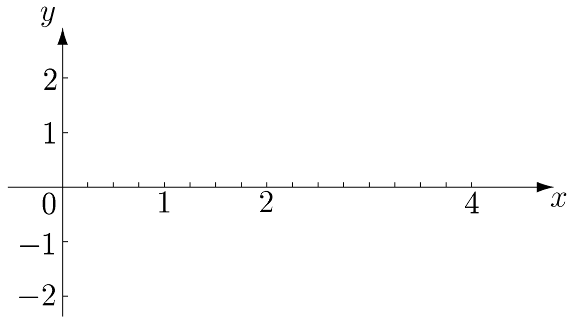
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



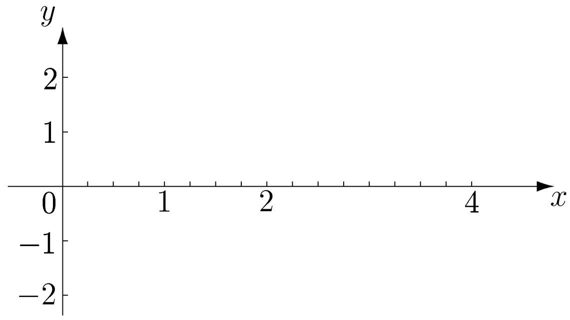
(2) $y = \log_2 x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



＜関数の値＞

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例1 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \qquad \left(f(\square) = \square^2 + 5 \times \square - 4 \right)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 3^2 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問1 $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(2) =$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$, $f(1) =$, $f(2) =$, $f(3) =$

(3) $f(x) = 2^{x+1}$, $f(-3) =$, $f(0) =$, $f(3) =$

(4) $f(x) = \log_2(3x + 1)$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(5) =$

例2 $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h)$$

問2 $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a+h)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^3$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

(2) $f(x) = 4x + 5$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

(3) $f(x) = 2x^2 - 3$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

(4) $f(x) = 5x^2 + 6x$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

＜接線＞

放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると、

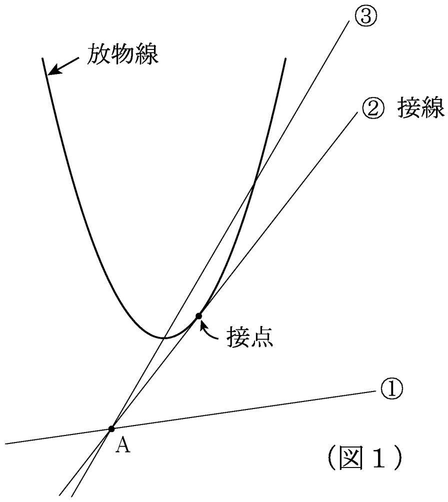
①:交点なし

②:交点は 1 個

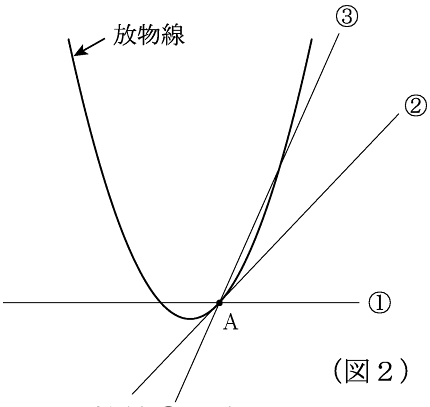
③:交点は 2 個

となる。直線②を**接線**といい、そのときの交点を**接点**という。

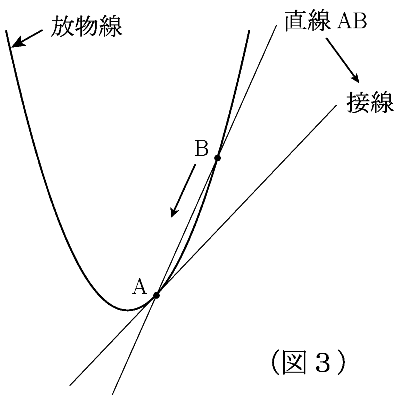
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線②が接線であり、点 A が接点である。



（図１）



（図２）



（図３）

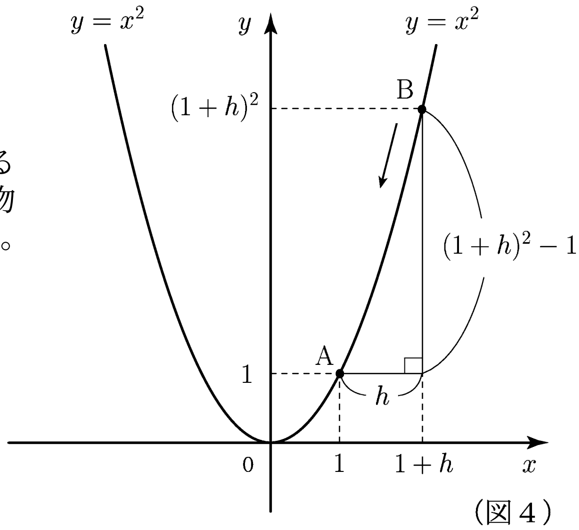
図 2 の接線②を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y=x^2$ 上の点 A $(1\,,1)$ を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(\ 1+h\ ,(1+h)^2\ )$ とする (図 4)。

(1) 直線 AB の傾きを h で表せ。

(2) $h=0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。

(3) $h=0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。



（図４）

＜ 極限 1 ＞

前ページの問の結果より、放物線 $y = x^2$ 上の点 A$(1,1)$ と B$(1+h\ ,\ (1+h)^2)$ に対し、直線 AB の傾きは

$$\text{直線 AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

となる。ここで

$$h = \quad 0.1 \quad \text{のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = \quad 0.01 \quad \text{のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \quad \text{のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \quad \text{のとき AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.0001$$

となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。このことを記号→を使って

(1) $\qquad h \to 0$ 　のとき　直線 AB の傾き $\to 2$

とか

(2) $\qquad h \to 0$ 　のとき $\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h \;\to\; 2$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の**極限値**または単に**極限** (limit) という。(2) を記号 lim を使って次のように書く。

(3) $$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

例 (1) $$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-25}{h}$$

$<$ 極限 2 $>$

例 1 (1) $h \to 0$ のとき $3h \to 0$ である。つまり $\lim_{h\to 0} 3h = 0$

(2) $h \to 0$ のとき $(2+h)(3+h) \to 6$ つまり $\lim_{h\to 0}(2+h)(3+h) = 6$

（注）(1) は $\lim_{h\to 0} 3h = 3 \times 0 = 0$ ， (2) は $\lim_{h\to 0}(2+h)(3+h) = (2+0)\times(3+0) = 6$

と考える。このように $h \to 0$ の極限値は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合、$\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の式で $h=0$ を代入

すると $\dfrac{0}{0}$ の形で答が分からないので、$\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h)$

の形になおしてから $h = 0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{3(1+2h+h^2)-3}{h} = \lim_{h\to 0}(6+3h) = 6$

(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h} - \lim_{h\to 0}\dfrac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12$

（注）ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ を用いた。

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{5(1+h)^2-5}{h}$　　(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{3(2+h)^2-12}{h}$

(3) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h}$　　(4) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^3-27}{h}$

例 3 (1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{5(a+h)-5a}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{3(a+h)^2-3a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{3(a^2+2ah+h^2)-3a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6a+3h) = 6a$

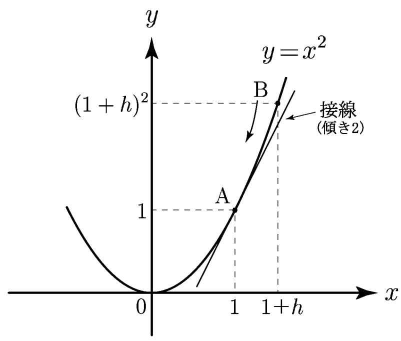
問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{3(a+h)-3a}{h}$　　(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

(3) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

＜接線の傾き＞

例 1　放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(1, 1)$ における接線の傾きは、放物線上の点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限と考えられる (27 ページ参照)。

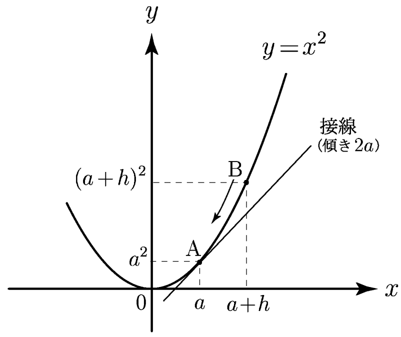


点 B の座標を $\mathrm{B}\big(1+h, (1+h)^2\big)$ とすれば 28 ページより

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}(\text{直線 AB の傾き}) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = 2$$

となる。

例 2　放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における接線の傾きを求めたい。右図の点 B の座標を $\mathrm{B}\big(a+h, (a+h)^2\big)$ とすると、



$$\text{直線の傾き} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

となる。点 B を点 A に近づけると、$h \to 0$ となるので

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

となる。

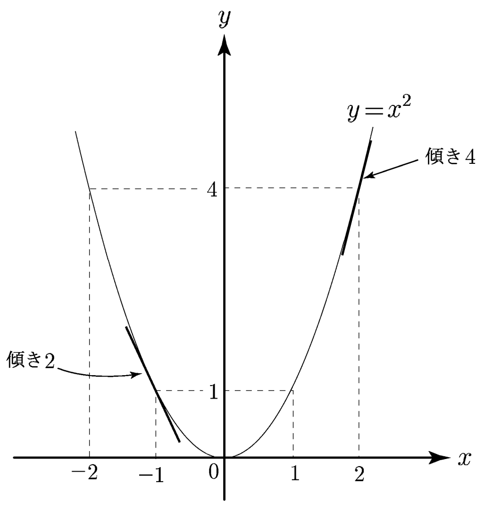
例 3　例 2 の結果から放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における接線の傾きは $2a$ である。

(1)　$a = 2$ のとき点 $(2, 4)$ における接線の傾きは

$$2a = 2 \times 2 = 4$$

(2)　$a = -1$ のとき点 $(-1, 1)$ における接線の傾きは

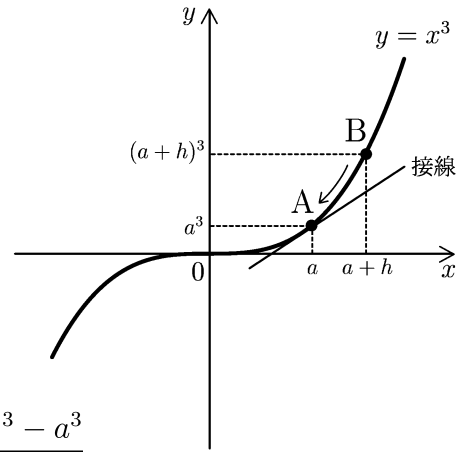
$$2a = 2 \times (-1) = -2$$



問　放物線 $y = x^2$ 上の点 A が以下の場合に、点 A における接線の傾きを求めよ。

(1)　$\mathrm{A}(3, 9)$　　(2)　$\mathrm{A}(0, 0)$　　(3)　$\mathrm{A}(-2, 4)$

＜微分係数１＞

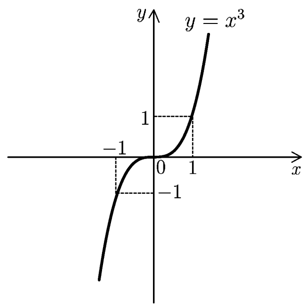


例１ ３次関数 $y = x^3$ のグラフは右図のような曲線である。この曲線上の点 A$(a\,,\ a^3)$ を接点とする接線を求めたい。この曲線上に A 以外の点 B をとり、点 B を点 A に近づけたとき直線 AB の傾きが接線の傾きに近づく。点 B の座標を B$(a+h\,,\ (a+h)^3)$ とすると

$$直線\,\mathrm{AB}\,の傾き = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$$

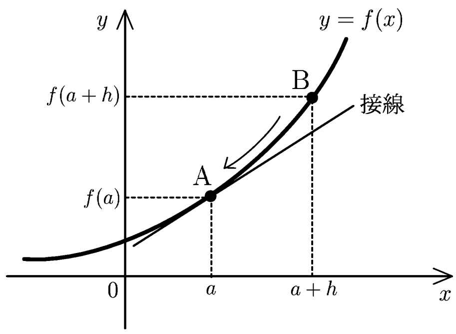
であり、29 ページの結果より

$$接線の傾き = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2$$



問１ 例１の結果より、曲線 $y = x^3$ 上の点 A$(a\,,\ a^3)$ における接点の傾きは $3a^2$ である。点 A が以下の場合に接線の傾きを求めよ。

(1) A$(1, 1)$　　　(2) A$(0, -0)$　　　(3) A$(-1, -1)$



一般の関数 $y = f(x)$ のグラフは座標平面上の曲線になる。この曲線上の点 A$(a\,,\ f(a))$ における接線の傾きは、

$$接線の傾き = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

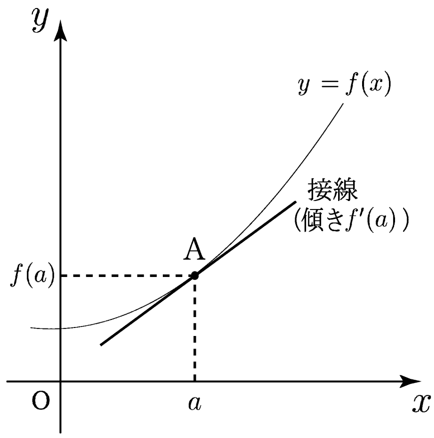
となる。この極限値を $f'(a)$ と書き、関数 $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**という。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$　（微分係数）

問２ 前ページ例２及びこのページの例１の結果を使って次を求めよ。

(1) $f(x) = x^2$ のとき $f'(a) =$　　　(2) $f(x) = x^3$ のとき $f'(a) =$

＜微分係数２＞



$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における
接線の傾きは

$$\boxed{f'(a) \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$ （微分係数）

であり、これを $x=a$ における $f(x)$ の微分係数
という。

例１ $f(x) \ = \ 5x^2$ のとき

$$f(a) \ = \ 5a^2 \quad , \quad f(a+h) \ = \ 5(a+h)^2$$

より

$$f'(a) \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{5(a+h)^2-5a^2}{h}$$

$$= \ \lim_{h\to 0}\frac{5(a^2+2ah+h^2)-5a^2}{h} \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{10ah+5h^2}{h}$$

$$= \ \lim_{h\to 0}(10a \ + \ 5h) \ = \ 10a$$

例２ $f(x) \ = \ x^2-4x$ のとき

$$f(a) \ = \ a^2-4a \quad , \quad f(a+h)=(a+h)^2-4(a+h)$$

より

$$f'(a) \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-4(a+h)-(a^2-4a)}{h}$$

$$= \ \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-4a-4h-a^2+4a}{h} \ = \ \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-4h}{h}$$

$$= \ \lim_{h\to 0}(2a \ + \ h \ - \ 4) \ = \ 2a \ - \ 4$$

問 $f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を求めよ。

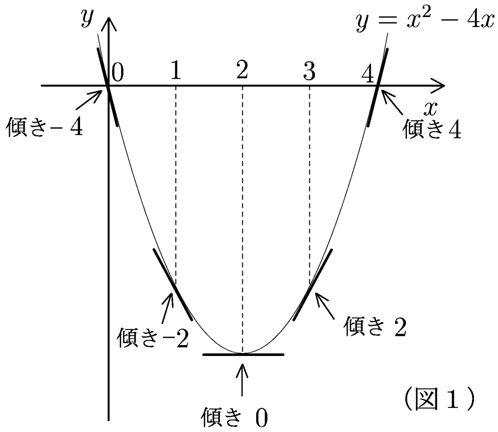
(1) $f(x) \ = \ 3x^2$, $f'(a) \ =$

(2) $f(x) \ = \ x^2+x$, $f'(a) \ =$

(3) $f(x) \ = \ x^2-3x$, $f'(a) \ =$

＜導関数１＞

＜元の関数 $f(x)=x^2-4x$ ＞



（図１）

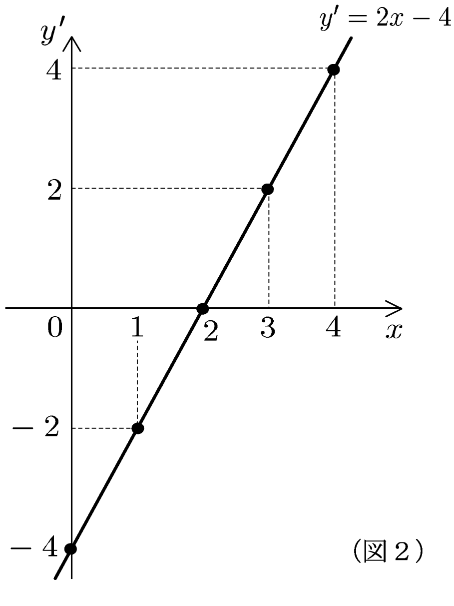
例 $f(x)=x^2-4x$ のとき、微分係数 $f'(a)$ は前ページ例２より

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a-4$$

であった。$f'(a)=2a-4$ は $x=a$ における接線の傾きを意味する。

$f'(0)=2\times 0-4=-4 \;\Rightarrow\; x=0$ における傾きは -4
$f'(1)=2\times 1-4=-2 \;\Rightarrow\; x=1$ における傾きは -2
$f'(2)=2\times 2-4=0 \;\Rightarrow\; x=2$ における傾きは 0
$f'(3)=2\times 3-4=2 \;\Rightarrow\; x=3$ における傾きは 2
$f'(4)=2\times 4-4=4 \;\Rightarrow\; x=4$ における傾きは 4

＜導関数 $f'(x)=2x-4$ ＞



（図２）

このように $f'(a)$ は a の値によって変わる。$f'(a)$ を a の関数と考え、a を x でおきかえた

$$f'(x)=2x-4$$

を、関数 $f(x)$ の**導関数**という。

元の関数 $f(x)$ のグラフ（図１）の傾きを表すのが導関数 $f'(x)$ である。

$$\boxed{y=x^2-4x \text{ の導関数を } y'=2x-4}$$

とも書く（図２）。

一般の関数 $f(x)$ に対し、$x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を a の関数とみて、a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \quad \bigl(f(x)\text{ の導関数}\bigr)$$

を $f(x)$ の導関数という。

問 31 ページ、32 ページの結果を利用して、$f(x)$ が以下の場合の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$ のとき $f'(x)=$

(2) $f(x)=x^3$ のとき $f'(x)=$

(3) $f(x)=3x^2$ のとき $f'(x)=$

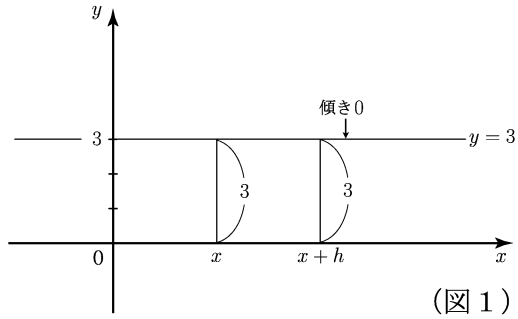
(4) $f(x)=x^2+x$ のとき $f'(x)=$

＜導関数２＞

例１　$f(x)=3$ のとき $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$

である。このように関数 $f(x)$ が x によらない数である場合を**定数関数**という。定数関数のグラフは図１のように傾きが 0 (ゼロ) の直線である。



（図１）

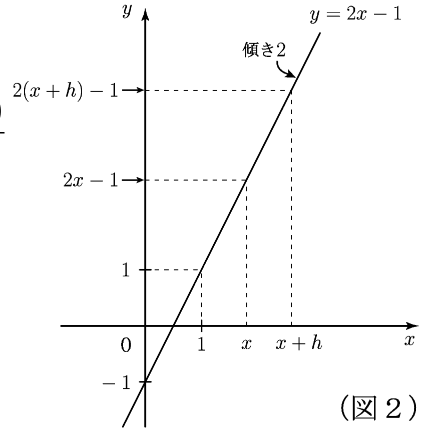
例２　$f(x)=2x-1$ のとき

$$f(x+h)=2(x+h)-1$$

より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-1-2x+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$



（図２）

(注)　$f(x)$ が一次関数 (または定数関数) の場合 $y=f(x)$ のグラフは図 1、図 2 のような直線である。このとき導関数 $f'(x)$ はその直線の傾きを表す。

問１　$f(x)$ が以下の場合に導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=2$,　$f'(x)=$　　　　(2)　$f(x)=3x-4$,　$f'(x)=$

例３　$f(x)=x^3$ のとき導関数は $f'(x)=3x^2$ である。このことを略して

$$\boxed{\left(x^3\right)'=3x^2}$$

と書く。同様にして

$f(x)=x^2$ のとき $f'(x)=2x$ のことを　$\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$

$f(x)=x$ のとき $f'(x)=1$ のことを　$\boxed{\left(x\right)'=1}$

$f(x)=1$ のとき $f'(x)=0$ のことを　$\boxed{\left(1\right)'=0}$

と略記する。

問２　前ページおよびこのページの結果を利用して、次の導関数を求めよ。

(1)　$\left(3\right)'=$　　(2)　$\left(2x-1\right)'=$　　(3)　$\left(3x-4\right)'=$

(4)　$\left(3x^2\right)'=$　　(5)　$\left(x^2+x\right)'=$　　(6)　$\left(x^2-4x\right)'=$

＜ 導関数3 ＞

関数 $y=f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y=f(x)$ を「**微分**する」という。

例1 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad , \qquad \left(3x^2\right)' = 6x = 3 \times 2x$$

であった。従って

$$\left(3x^2\right)' = 3 \times \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に定数 K と関数 $f(x)$ に対して

$$\boxed{\left(Kf(x)\right)' = K \times \left(f(x)\right)'} \qquad \text{(定数倍の微分)}$$

が成り立つ。

例2 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \quad , \qquad \left(x\right)' = 1 \quad , \qquad \left(x^2+x\right)' = 2x+1$$

である。従って

$$\left(x^2+x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x\right)'$$

が成り立つ。

一般に 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\boxed{\begin{aligned} \left(f(x)+g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)' \\ \left(f(x)-g(x)\right)' &= \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)' \end{aligned}} \qquad \text{(和・差の微分)}$$

が成り立つ。

例3 (1) $\left(5x^3+7x^2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(7x^2\right)' = 5 \times \left(x^3\right)' + 7 \times \left(x^2\right)'$

$$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$$

(2) $\left(x^2-4x+3\right)' = \left(x^2\right)' - 4 \times \left(x\right)' + \left(3\right)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(x^3+5\right)'$

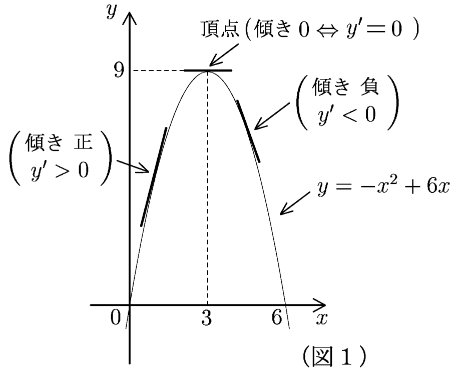
(2) $\left(4x^2-3x^3\right)'$

(3) $\left(2x^2-5x+6\right)'$

(4) $\left(5x^3-6x^2+7x-8\right)'$

＜関数の増減１＞

＜元の関数 $y = x^2 + 6x$ ＞



（図１）

例 ２次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは図１のような放物線である。このグラフは頂点は座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y' = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6$$

を求める。次に $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \iff -2x + 6 = 0 \iff x = 3$$

であるから $x = 3$ のとき傾き y' が 0（ゼロ）になるのでそこが頂点である。

$x = 3$ のとき $y = -x^2 + 6x = -3^2 + 6 \times 3 = 9$

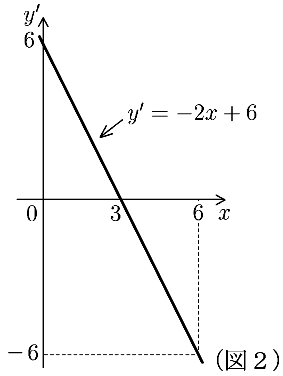
であるから頂点の座標は $(3, 9)$ である。

y' のグラフ（図２）より

$$x < 3 \text{ のとき } y' > 0$$
$$x = 3 \text{ のとき } y' = 0$$
$$x > 3 \text{ のとき } y' < 0$$

となる。$y' > 0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。$y' < 0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を**増減表**という。

＜導関数 $y' = -2x + 6$ ＞



（図２）

x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	9	↘

（注） 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

(1) $y' = 0$ となる x（この場合は $x = 3$）を求める。

(2) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より小さい数 x（例えば $x = 0$）を代入してプラスであれば（$x < 3$ の列で）y' の欄に $+$ と書き入れ、y の欄に ↗（右上がり）の記号を入れる。

(3) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より大きい数 x（例えば $x = 4$）を代入してマイナスであれば（$x > 3$ の列で）y' の欄に $-$ と書き入れ、y の欄に ↘（右下がり）の記号を入れる。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

$y' =$ 　　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

(2) $y = x^2 + 4x - 3$

$y' =$ 　　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

＜関数の増減 2＞

例　3 次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。
導関数のグラフ (図 2) より

$$\begin{array}{ccc} x < -1 & \text{のとき} & y' > 0 \\ x = -1 & \text{のとき} & y' = 0 \\ -1 < x < 1 & \text{のとき} & y' < 0 \\ x = 1 & \text{のとき} & y' = 0 \\ 1 < x & \text{のとき} & y' > 0 \end{array}$$

となる。$x = \pm 1$ のとき y の値は

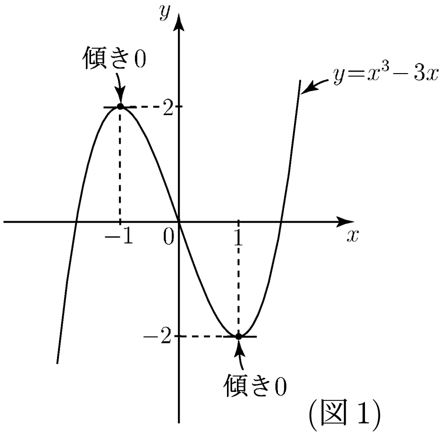
$x = -1$ のとき $y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$

$x = 1$ のとき $y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

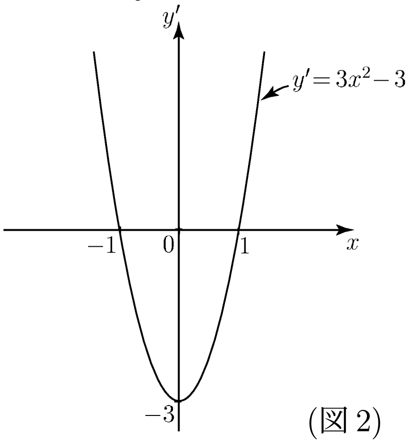
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

＜元の関数 $y = x^3 - 3x$ ＞



(図 1)

＜導関数 $y' = 3x^2 - 3$ ＞

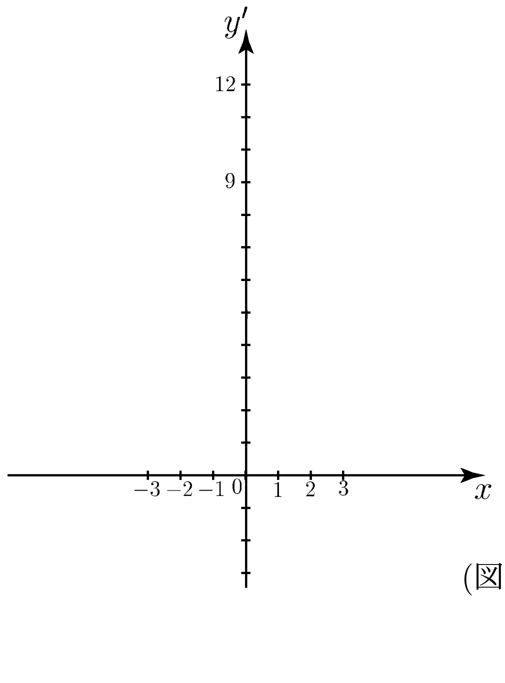


(図 2)

問　関数 $y = 12x - x^3$ を微分し、導関数 y' のグラフを図 3 に書き、増減表を作れ。

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					

$y' =$



(図 3)

＜関数の増減3＞

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合、たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$x = -2$ のとき
$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 \ > 0$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に $+$ 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し、$y' < 0$ となれば、y' の欄に $-$ 記号を書き入れる。(表 2)

(表 1)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

$\Downarrow$

(表 2)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

$\Downarrow$

(表 3)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

(表 4)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(6) y' が $+$ であれば傾き正であるから y は右上がり $\nearrow$ となる。
y' が $-$ であれば傾き負であるから y は右下がり $\searrow$ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

問 次の関数を微分し、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$ 　　, $y' =$

x					
y'					
y					

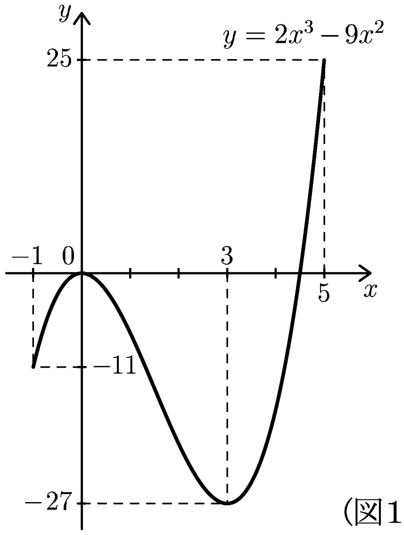
(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 　, $y' =$

x					
y'					
y					

＜最大・最小１＞

例題　次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leqq x \leqq 5)$$



(図1)

(解)　導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

を求め、$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 3$	3	$3 < x < 5$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	↗	0	↘	-27	↗	25

この表よりグラフは図１のようになるから

(答)　$x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり、$x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注)　最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leqq x \leqq 4)$$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-52	↗	0	↘	-27	↗	-16

のとき 増減表は右表のようになり、この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$, $x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。なお右表で x の欄の -2 と 0 の間の $\cdots$ は $-2 < x < 0$ の範囲という意味である。今後はこのように x の範囲を省略してよい.

問　次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad (\text{定義域 } 0 \leqq x \leqq 4)$$

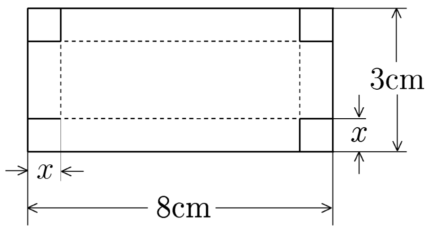
x	0		4
y'			
y			

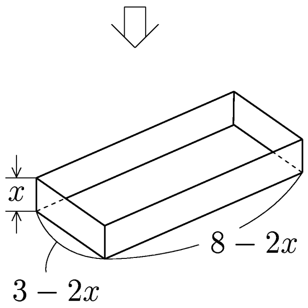
(答)　$x =$ 　　　　のとき最大値 $y =$

　　　$x =$ 　　　　のとき最小値 $y =$

＜最大最小 2＞

例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 $x$cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？





(解) 容器のたては $3-2x$(cm), よこは $8-2x$(cm), 高さは x(cm) だから、容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから、x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り、y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x=\frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき、最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 6cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 y(cm^3) を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					