高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2000 年度版)

2

内容

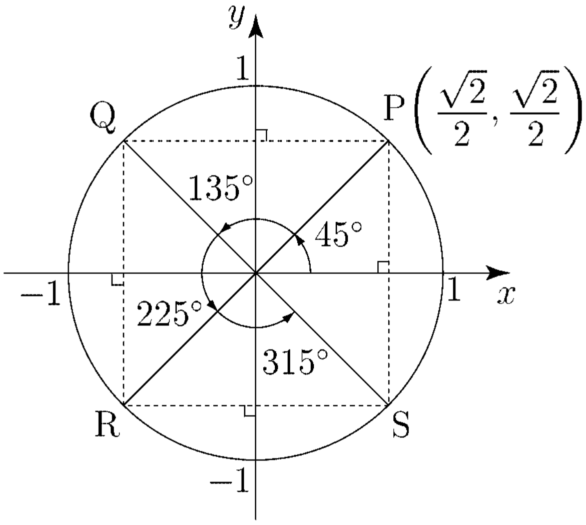
◎　因数分解

◎　数列

◎　1次関数

◎　2次関数

◎　三角比



電子・光システム工学科
井上　昌昭　著

＜方程式と恒等式＞

文字 x に関する等式には２種類ある。

例１ (1) 等式 $3x-10=2$ を満たす数 x は $x=4$ だけである。

(2) 等式 $x^2-9=0$ を満たす数 x は $x=3$ または $x=-3$ の２個しかない。

例２ (1) 等式 $2(x-1)+3(x+4)=5x+10$ は x がどんな数でも成り立つ。

(2) 等式 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例１のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。
例１の (1) を未知数 x に関する１次方程式、例１の (2) を未知数 x に関する２次方程式という。
これに対し、例２は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を（常に成り立つ式という意味で）**恒等式**（こうとう）という。例２の (2) のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問１ 例２の (2) を確かめたい。以下の x の値を代入して、$(x+2)\times(x+3)$ と x^2+5x+6 の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x=-1$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(2) $x=1$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(3) $x=2$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(4) $x=3$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

(5) $x=4$ のとき $(x+2)(x+3)=$ 　　　　, $x^2+5x+6=$

問２ 次の式を展開せよ。

(1) $(x+\alpha)^2$ 　　　　(2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x+\alpha)(x-\alpha)$ 　　　　(4) $(x+\alpha)(x+\beta)$

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)$ 　　　　(6) $(x+\alpha)(x-\beta)$

<2次式の因数分解1>

例 169を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10+3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1+3)^2$$
$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2+3)^2$$
$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3+3)^2$$
$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4+3)^2$$
$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5+3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ。すなわち(1)は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の(1)式のように x を使って表せ。

(1) $1^2 + 8 \times 1 + 16 = (1+4)^2$
$2^2 + 8 \times 2 + 16 = (2+4)^2$
$3^2 + 8 \times 3 + 16 = (3+4)^2$
$10^2 + 8 \times 10 + 16 = (10+4)^2$

(2) $3^2 - 4 \times 3 + 4 = (3-2)^2$
$5^2 - 4 \times 5 + 4 = (5-2)^2$
$7^2 - 4 \times 7 + 4 = (7-2)^2$
$10^2 - 4 \times 10 + 4 = (10-2)^2$

(3) $5^2 - 4 = (5+2) \times (5-2)$
$6^2 - 4 = (6+2) \times (6-2)$
$7^2 - 4 = (7+2) \times (7-2)$
$8^2 - 4 = (8+2) \times (8-2)$

(4) $1^2+5\times1+6 = (1+2)\times(1+3)$
$4^2+5\times4+6 = (4+2)\times(4+3)$
$7^2+5\times7+6 = (7+2)\times(7+3)$
$8^2+5\times8+6 = (8+2)\times(8+3)$

<2次式の因数分解2>

前ページより
$$
\begin{aligned}
&x^2+6x+9=(x+3)^2\\
&x^2+8x+16=(x+4)^2\\
&x^2-4x+4=(x-2)^2\\
&x^2-4=(x+2)(x-2)\\
&x^2+5x+6=(x+2)(x+3)
\end{aligned}
$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。たとえば、最後の式は

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}=(x+2)(x+3)&=(x+2)\times x+(x+2)\times 3\\
&=x^2+2x+3x+6\\
&=x^2+5x+6\\
&=\text{左辺}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & x+2 & \\
\times) & x+3 & \\
\hline
 & 3x+6 & \cdots\ (x+2)\times 3\\
+)\ x^2+2x & & \cdots\ (x+2)\times x\\
\hline
 & x^2+5x+6 &
\end{array}
$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x=10$ のときは

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}&=(10+2)(10+3)\\
&=(10+2)\times 10+(10+2)\times 3\\
&=10^2+2\times 10+3\times 10+2\times 3\\
&=10^2+5\times 10+6=\text{左辺}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 12 & \\
\times) & 13 & \\
\hline
 & 36 & \cdots\ 12\times 3\\
+) & 120 & \cdots\ 12\times 10\\
\hline
 & 156 &
\end{array}
$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。
この式を

$$\text{左辺}=x^2+(2+3)x+2\times 3=(x+2)(x+3)=\text{右辺}$$

と考え、2 と 3 のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。
すなわち

$$\boxed{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 1 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$

(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$

(4) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

＜２次式の因数分解３＞

前ページの結果から任意の数 $\alpha,\ \beta$ に対して次の因数分解の公式が得られた。

(Ⅰ) $x^2+2\alpha x+\alpha^2=(x+\alpha)^2$

(Ⅱ) $x^2-2\alpha x+\alpha^2=(x-\alpha)^2$

(Ⅲ) $x^2-\alpha^2=(x+\alpha)(x-\alpha)$

(Ⅳ) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

例１ 上の公式 (Ⅰ), (Ⅱ) の例をあげる。

(1) $x^2+10x+25=x^2+2\times 5\times x+5^2=(x+5)^2$

(2) $x^2-12x+36=x^2-2\times 6\times x+6^2=(x-6)^2$

例２ 上の公式 (Ⅲ) の例をあげる。

(1) $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

(2) $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

例３ 上の公式 (Ⅳ) の例をあげる。

(1) $x^2+4x+3=x^2+(3+1)x+3\times 1=(x+3)(x+1)$

(2) $x^2+7x+10=x^2+(5+2)x+5\times 2=(x+5)(x+2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+4x+4

(2) $x^2-8x+16$

(3) $x^2+14x+49$

(4) x^2-25

(5) x^2-5

(6) x^2+5x+4

(7) x^2+6x+5

(8) x^2+6x+8

(9) x^2+8x+7

(10) $x^2+8x+12$

＜２次式の因数分解４＞

前ページの (IV) の式

$$\boxed{\text{(IV)}\quad x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

の β のかわりに $-\beta$ を代入すると

$$\boxed{\text{(V)}\quad x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha(-\beta)=(x+\alpha)(x-\beta)}$$

が得られ、さらに α のかわりに $-\alpha$ を代入すると

$$\boxed{\text{(VI)}\quad x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=(x-\alpha)(x-\beta)}$$

が得られる。

例１ (V) の例をあげる。

(1) $x^2+3x-10=x^2+(5-2)x+5\times(-2)=(x+5)(x-2)$

(2) $x^2+x-20=x^2+(5-4)x+5\times(-4)=(x+5)(x-4)$

(3) $x^2-2x-15=x^2+(3-5)x+3\times(-5)=(x+3)(x-5)$

(4) $x^2-x-6=x^2+(2-3)x+2\times(-3)=(x+2)(x-3)$

例２ (VI) の例をあげる。

(1) $x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3)\times(-4)=(x-3)(x-4)$

(2) $x^2-7x+6=x^2+(-6-1)x+(-6)\times(-1)=(x-6)(x-1)$

(3) $x^2-5x+6=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)=(x-3)(x-2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+4x-5

(2) x^2+3x-4

(3) x^2+x-12

(4) x^2-x-2

(5) x^2-2x-3

(6) $x^2-3x-18$

(7) x^2-6x+8

(8) x^2-8x+7

(9) x^2-4x+3

(10) $x^2-7x+10$

＜２次方程式と因数分解１＞

一般の係数 $a,\ b,\ c$ に対し、2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解の公式はワークブック 1 (40 ページ) より

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

である。

例 2 次方程式

$$x^2-5x+6=0$$

の解を求める。$a=1,\ b=-5,\ c=6$ を解の公式にあてはめると

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$\dfrac{5+1}{2}=3,\quad \dfrac{5-1}{2}=2$ より　　(答) $x=3$ または $x=2$

(別解)

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

と因数分解されるから

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)\times(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ または } x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \underline{x=2 \text{ または } x=3}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2-4x+3=0$　　(2) $x^2-6x+5=0$

(3) $x^2-5x+4=0$　　(4) $x^2+2x-3=0$

(5) $x^2-x-6=0$　　(6) $x^2+7x+10=0$

(7) $x^2-6=0$　　(8) $x^2+3x+1=0$

＜ 2 次方程式と因数分解 2 ＞

前ページの例のように 2 次方程式の解と因数分解の関係は

$$x^2 + \square x + \triangle = 0 \text{ の解が } \alpha \text{ と } \beta \iff x^2 + \square x + \triangle = (x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。

例 1 $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は $\underline{\ x = -3 \ \text{ と } \ x = 1\ }$ であるから

$$x^2 + 2x - 3 = \bigl(x - (-3)\bigr)(x-1) = (x+3)(x-1)$$

と因数分解できる。

例 2 $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問 1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 3 $2x^2 + 4x - 6 = 2\left(x^2 + 2x - 3\right) = 2(x+3)(x-1)$

この式は例 1 の結果を使った。

一般に

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ の解が } \ x = \alpha \ \text{ または } \ x = \beta} \cdots (1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)} \cdots (2)$$

と因数分解できる。逆に (2) であれば (1) がわかる。

問 2 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 3x - 10$

(2) $x^2 + 2x - 15$

(3) $x^2 - 7$

(4) $x^2 - x - 3$

(5) $2x^2 - 4x - 6$

(6) $3x^2 + 9x - 12$

(7) $4x^2 + 4x + 1$

(8) $2x^2 - 5x - 3$

＜数列＞

ある規則に従って並んでいる数の列を数列という。数列の各数を項といい、最初の項から順に、**第 1 項、第 2 項、$\cdots$、第 n 項**と呼ぶ。特に、第 1 項を**初項**という。

例 次の数列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$$

は初項が 1、第 2 項が 4、第 3 項が 9 であるが、これを

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$$

と書き直すと、第 n 項は n^2 であることがわかる。

第 n 項が n についての式で書けるとき、これを**一般項**という。
第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

例題 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 4$ (2) $a_n = 3 \times 2^n$

(解) (1) $a_1 = 2 \times 1 - 4 = -2,$ $a_2 = 2 \times 2 - 4 = 0$
$a_3 = 2 \times 3 - 4 = 2,$ $a_4 = 2 \times 4 - 4 = 4$

(2) $a_1 = 3 \times 2^1 = 6,$ $a_2 = 3 \times 2^2 = 12$
$a_3 = 3 \times 2^3 = 24,$ $a_4 = 3 \times 2^4 = 48$

問 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3n - 2$

(2) $a_n = 2n^2$

(3) $a_n = n^3$

(4) $a_n = 2 \times 3^n$

(5) $a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

＜等差数列＞

数列の各項と 1 つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を**等差数列**といい、前の項との差を**公差**という。

例 1 奇数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は初項 1、公差 2 の等差数列である。

例 2 数列

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots$$

は初項 4、公差 3 の等差数列である。一般項を a_n とすると

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 13, \quad a_5 = 16$$

であるが、

$$\begin{aligned} a_2 &= 4+3 \\ a_3 &= 4+3\times 2 \\ a_4 &= 4+3\times 3 \\ a_5 &= 4+3\times 4 \end{aligned}$$

と考えると、一般項は $a_n = 4 + 3 \times (n-1)$ である。

問 1 初項が a、公差が d の等差数列

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問 2 例 1 の一般項 a_n を求めよ。

問 3 等差数列

$$3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad 23,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

＜等差数列の和＞

例題　1から100までの和を求めよ。

(解)　$S=1+2+\cdots+99+100$ を逆に並べて、加えると101が100個できる。

$$\begin{array}{rrrrrrr} & S = & 1+ & 2+\cdots+ & 99+ & 100 & \\ +) & S = & 100+ & 99+\cdots+ & 2+ & 1 & \\ \hline & 2S = & 101+ & 101+\cdots+ & 101+ & 101 & = 101\times 100 \end{array}$$

よって　$S=\dfrac{101\times 100}{2}=5050$　である。

問1　1から1000までの和

$$S=1+2+\ \cdots\ +999+1000$$

を求めよ。

問2　1から n までの和

$$S=1+2+\ \cdots\ +(n-1)+n$$

を求めよ。

問3　偶数列の第50項までの和

$$S=2+4+6+\ \cdots\ +96+98+100$$

を求めよ。

問4　奇数列の第50項までの和

$$S=1+3+5+\ \cdots\ +95+97+99$$

を求めよ。

＜等比数列１＞

数列の各項と一つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。

例１　数列

$$5\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 40\ ,\ 80\ ,\ 160\ ,\ \cdots$$

は、前の項を 2 倍してできる数列であるから、公比が 2 , 初項が 5 の等比数列である。

例２　数列

$$4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \cdots$$

は初項が 4 , 公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

問１　次の等比数列の初項と公比を求めよ。

(1)　$1\ ,\ 4\ ,\ 16\ ,\ 64\ ,\ 256\ ,\ \cdots$

(2)　$81\ ,\ 27\ ,\ 9\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(3)　$\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ 4\ ,\ \cdots$

(4)　$2\ ,\ -2\ ,\ 2\ ,\ -2\ ,\ 2\ ,\ \cdots$

問２　次の数列が等比数列になるように $\boxed{}$ に適当な数を入れよ。

(1)　$3\ ,\ 6\ ,\ \boxed{}\ ,\ 24\ ,\ \boxed{}$

(2)　$8\ ,\ -4\ ,\ \boxed{}\ ,\ \boxed{}\ ,\ \frac{1}{2}$

$<$ 等比数列 2 $>$

例 数列

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96\ ,\ \cdots$$

は初項 3、公比 2 の等比数列で、一般項を a_n とすると、

$a_1 = 3,\ \ a_2 = 3 \times 2,\ \ a_3 = 3 \times 2^2,\ \ a_4 = 3 \times 2^3,\ \ a_5 = 3 \times 2^4,\ \ \cdots$

であるから、

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

になる。

(注) 整数指数 (ワークブック 3) で詳しく説明するが、$2^0 = 1$ (ゼロ乗 $= 1$) と約束する。一般の数 r に対し $\boxed{r^0 = 1}$ と定める。このように定めると、上の例の場合 $n = 1$ のとき $a_1 = 3 \times 2^0 = 3$ となって、一般項 a_n の式が全ての自然数 n に対して成立する。

問 1 初項 a, 公比 r の等比数列

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ ar^4\ ,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問 2 次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ 81\ ,\ \cdots$

(2) $5\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 40\ ,\ 80\ ,\ \cdots$

(3) $16\ ,\ 8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(4) $27\ ,\ -9\ ,\ 3\ ,\ -1\ ,\ \dfrac{1}{3}\ ,\ \cdots$

＜等比数列の和＞

例題　初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解) S に公比 3 をかけて、S から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{rcl} S & = & 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\ -)\ 3S & = & \phantom{5 + {}} 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\ \hline -2S & = & 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \times 3^{100} \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \dfrac{5(3^{100} - 1)}{2}$

問 1　例題と同じ数列で、第 n 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$$

を求めよ。

問 2　初項 a, 公比 r の等比数列の第 n 項までの和

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

を求めよ。

問 3　次の数列の和

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$$

を求めよ。

＜数列の類推＞

例題　奇数列 $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$ の第 n 項までの和を

$$a_n = 1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)$$

とする。第５項までを求め、一般項を類推せよ。

(解)　$a_1 = 1$,　$a_2 = 1+3 = 4 = 2^2$,　$a_3 = 1+3+5 = 9 = 3^2$,

$a_4 = 1+3+5+7 = 16 = 4^2$,　$a_5 = 1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

より $a_n = n^2$ と類推される。

問１　２つの数列

$a_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$　,　$b_n = \dfrac{6}{n\times(2n+1)}a_n$

に対し、共に第５項まで求め、b_n の一般項を類推せよ。

$a_1 =$　　$a_2 =$　　$a_3 =$　　$a_4 =$　　$a_5 =$

$b_1 =$　　$b_2 =$　　$b_3 =$　　$b_4 =$　　$b_5 =$

$b_n =$

問２　２つの数列

$a_n = 1+2+3+\cdots+n$　,　$b_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

に対し、共に第５項まで求め、b_n を a_n で表せ。

$a_1 =$　　$a_2 =$　　$a_3 =$　　$a_4 =$　　$a_5 =$

$b_1 =$　　$b_2 =$　　$b_3 =$　　$b_4 =$　　$b_5 =$

$b_n =$

＜関係式＞

2 個以上の文字を含む等式には次の 2 種類がある。

<1. 恒等式>

例 1 (1) 等式 $3(x-y)+2(x+2y)=5x+y$ は x と y がどんな数でも成立する。

(2) 等式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ は x と y がどんな数でも成立する。

<2. 関係式>

例 2 (1) 等式 $x+y=3$ を満たす数 x と y は

$$\begin{cases} x=0.5 \\ y=2.5 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=1.2 \\ y=1.8 \end{cases}, \begin{cases} x=1.9 \\ y=1.1 \end{cases}, \begin{cases} x=2.1 \\ y=0.9 \end{cases}$$

など無数にある。しかし $x=y=2$ のような場合は $x+y=3$ を満足しないのでだめである。

(2) 等式 $y=2x$ を満たす数 x と y は

$$\begin{cases} x=0.5 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=1.2 \\ y=2.4 \end{cases}, \begin{cases} x=1.9 \\ y=3.8 \end{cases}, \begin{cases} x=2.1 \\ y=4.2 \end{cases}$$

など無数にある。しかし $x=y=1$ のような場合は $y=2x$ を満足しないのでだめである。

$x+y=3$ や $y=2x$ などの等式を x と y の**関係式**という。x と y の関係式は x と y がどんな数でも成立するというわけではない。

(注) x と y の関係式が 2 個ある場合を**連立方程式**という。たとえば

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y=2x \end{cases}$$

の両方の関係式を満たす x と y は $x=1, y=2$ だけである。

問 次の関係式を $y=$ の形にせよ。

(1) $3x-y=0$ 　(2) $4x+2y=6$ 　(3) $xy=5$ 　(4) $x^2-2x+y=0$

$y=$ 　　$y=$ 　　$y=$ 　　$y=$

＜関数＞

例 1 秒速 5m の速度で 1 秒間走ると 5m 進み、2 秒間走ると 10m 進み、3 秒間走ると 15m 進む。一般に x 秒間走ると y m 進むとすれば

$$y = 5x$$

の関係がある。この関係を表にすると以下のようになる。

x(s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(m)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

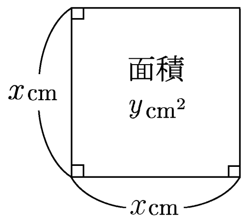
x の値が上の段のときの y の値が下の段に書いてある。

この例の x と y のように、いろいろな値をとる文字を**変数**という。

例 2 一辺が $x$cm の正方形の面積を $y$cm² とすると

$$y = x^2$$

の関係がある。



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

例 1、例 2 のように変数 x と y があって、x の値を決めるとそれにつれて y の値も決まるとき、y は x の**関数**という。例 1 のように y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の **1 次関数**という。例 2 のように y が x の 2 次式で表されるとき、y は x の **2 次関数**という。関数をあらわす式は前ページの関係式で $y =$ の形にした式と考えてよい。

問 x の関数 y が以下の場合に、表の空欄をうめよ。

(1) $y = 2x + 1$

x	1	2	3	4	5	6
y						

(2) $y = 3x^2$

x	-1	0	1	2	3	4
y						

＜座標平面＞

数直線は直線上に数をならべ、直線上の点の位置によって数値を表す。逆に直線上の点の位置は数値によって表される。

これと同様に平面上の点の位置を数値によって表したい。

右図のように両方も原点で直角に交わっている２本の数直線を考える。このような図で

横の数直線を $\boldsymbol{x}$ **軸** または 横軸

縦の数直線を $\boldsymbol{y}$ **軸** または 縦軸

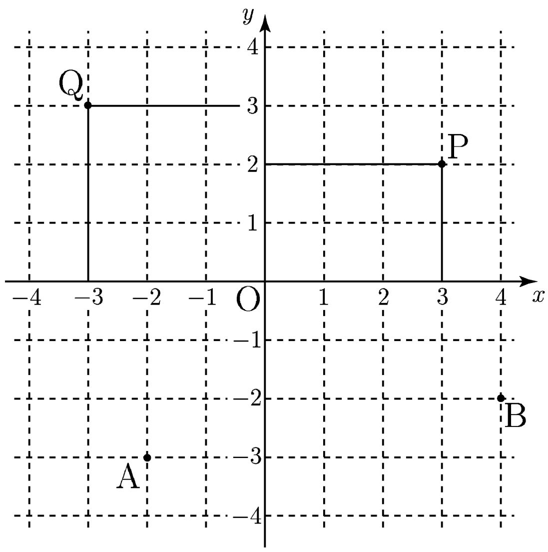
x 軸と y 軸を合わせて**座標軸**

座標軸の交点Ｏを**原点**

という。また

x 軸の正の方向は 右向き

y 軸の正の方向は 上向き



とする。このことを強調するため、先に矢印をつける。座標軸のある平面を**座標平面**という。

右図の点Ｐの位置を表すには、Ｐから x 軸、y 軸に垂直にひいた直線が x 軸、y 軸と交わる点の目盛り３と２を読みとり、$(3, 2)$ と書く。このとき

３をＰの $\boldsymbol{x}$ **座標**　，２をＰの $\boldsymbol{y}$ **座標**　，$(3, 2)$ を点Ｐの**座標**

という。座標をはっきり表すため、点Ｐを $\mathrm{P}(3, 2)$ とも書く。

問１　図の点Ｑの座標は $(-3, 3)$ である。点Ａと点Ｂの座標を書け。

問２　次の点の位置を図の中にはっきり示せ。

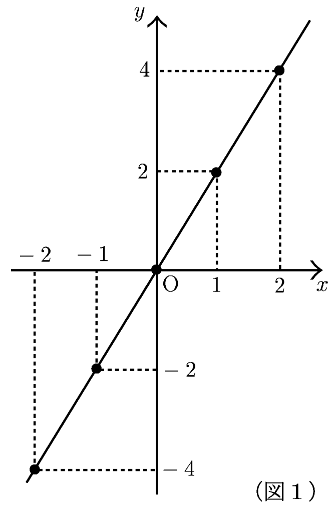
$\mathrm{C}(2, 0)$　，$\mathrm{D}(0, -4)$　，$\mathrm{E}(2, 3)$　，$\mathrm{F}(-4, 2)$　，$\mathrm{G}(-3, -2)$　，$\mathrm{H}(2, -3)$

< １次関数のグラフ１ >

例　１次関数 $y = 2x$ を考える。 $x = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ における y の値を表にすると以下のようになる

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

関係式 $y = 2x$ を満足する x, y は表より $(-2, -4)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ である。これらの点を右の座標平面上にかき入れると、図１のように全ての点が同一直線上にある。

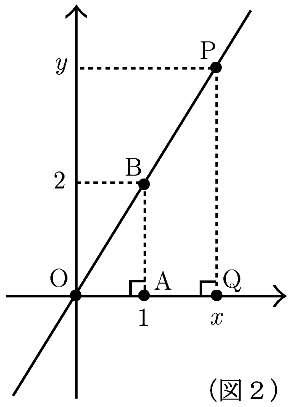


（図１）

逆に この直線上の任意の点を (x, y) とすれば x 座標と y 座標の間に $y = 2x$ の関係がある。この直線を関数 $y = 2x$ の **グラフ** という。

一般に x と y の関係式を満足する x, y を座標とする点 (x, y) を集めたものを、その関係式のグラフという。１次関数のグラフは直線になる。

問　上の例の下線部分を確かめたい。
この直線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とし、 A, B, Q, O の座標を $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 2)$, $\mathrm{Q}(x, 0)$, $\mathrm{O}(0, 0)$ とする。（ただし x は正の数とする）



（図２）

(1)　次の各線分の長さを求めよ。（単位不用）

OA ＝　　　, AB ＝　　　, OQ ＝　　　, QP ＝

(2)　三角形 OAB と三角形 OQP は相似だから

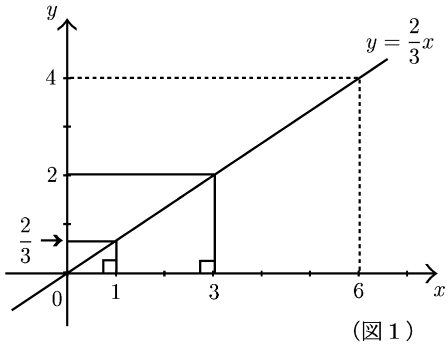
$$\mathrm{QP} : \mathrm{OQ} = \mathrm{AB} : \mathrm{OA}$$

この式を x, y を用いた分数で表せ。

(3)　y を x で表せ。

＜ １次関数のグラフ２ ＞

例１　１次関数 $y = \dfrac{2}{3}x$ のグラフは図１のような原点を通る直線である。このグラフは x が３増加すると y が２増加する。x が１増加すると y は $\dfrac{2}{3}$ 増加する。この増加率 $\dfrac{2}{3}$ をこの直線の **傾き** という。

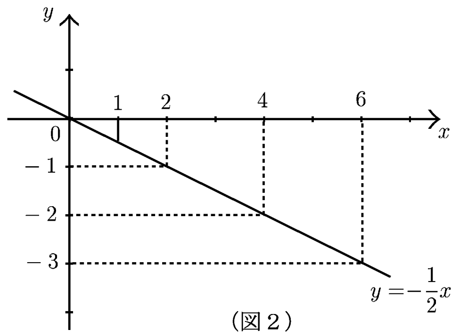


（図１）

$$\text{傾き} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

例２　１次関数 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフは図２のような原点を通る直線である。このグラフは x が２増加すると y が１減少する。これを y の増加量が -1 と考える。この直線の傾きは

$$\text{傾き} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$



（図２）

問１　図３の２つの直線①と②はある１次関数のグラフである。関数の式と傾きを書け。

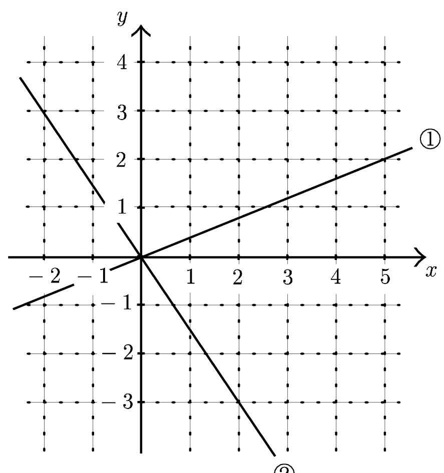
直線①：式　　　　　　　　，傾き

直線②：式　　　　　　　　，傾き

問２　次の１次関数のグラフを図３の中に書け。

(1)　$y = x$　　　　，(2)　$y = 3x$

(3)　$y = -\dfrac{2}{5}x$



（図３）

＜１次関数のグラフ３＞

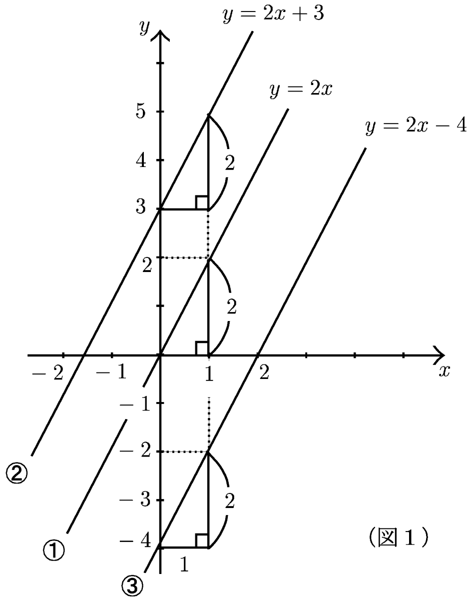
例　１次関数

①　$y = 2x$

②　$y = 2x + 3$

③　$y = 2x - 4$

のグラフは図１のような直線で、全て傾きが２である。②は①を y 軸方向に３だけ平行移動したものであり、③は①を y 軸方向に -4 だけ平行移動したものである。



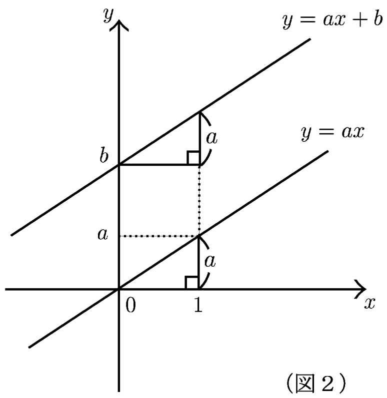
（図１）

直線と y 軸との交点の y 座標を y **切片** という。例の②の y 切片は３であり、③の y 切片は -4 である。

一般に１次関数

$$y = ax + b$$

のグラフは図２のように傾き a 、y 切片 b の直線である。

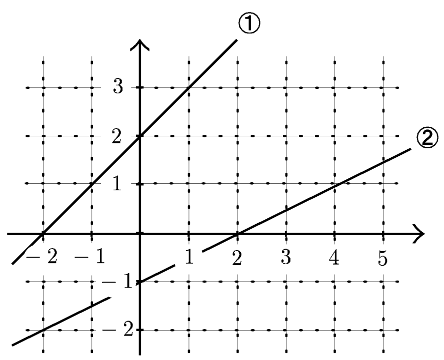


（図２）

問１　図３の２つの直線①と②はある１次関数のグラフである。１次関数の式を書け。

①

②



（図３）

問２　次の１次関数のグラフを図３の中に書け。

(1)　$y = x - 1$

(2)　$y = -2x + 3$

(3)　$y = \dfrac{2}{3}x - 2$

＜１次関数のグラフ４＞

例１　１次関数

$$y = 2(x-3)$$

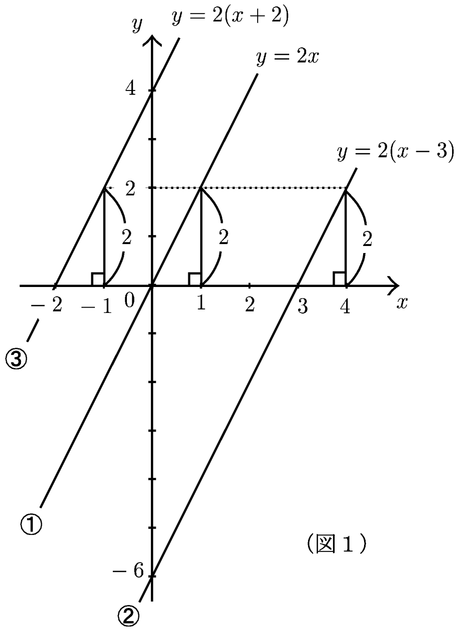
のグラフは図１の直線②である。

$$x = 3 \text{ のとき } y = 0$$

となる。②は $y = 2x$ のグラフ①を x 軸方向に３だけ平行移動したものである。x 軸と直線との交点の x 座標を x **切片** という。②の x 切片は３である。また

$$y = 2(x-3) = 2x - 6$$

より y 切片は -6 である。



（図１）

例２　１次関数

$$y = 2(x+2)$$

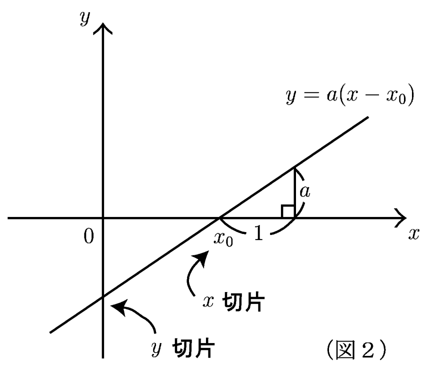
のグラフは図１の直線③である。この式から x 切片を見つけるには以下のようにする。x 軸は y 座標が０（ゼロ）なので、$y = 0$ とおくと

$$y = 0 \Rightarrow 2(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

より x 切片は -2 である。また

$$y = 2(x+2) = 2x + 4$$

より y 切片は４である。



（図２）

一般に１次関数

$$y = a(x - x_0)$$

のグラフは、傾きが a 、x 切片が x_0 の直線上である（図２）。

問　次の１次関数のグラフの傾き、x 切片、y 切片を求めよ。

(1)　$y = 3(x-2)$　　　(2)　$y = -(x-2)$

(3)　$y = 2x + 6$　　　(4)　$y = -2x - 8$

＜１次関数のグラフ５＞

例　１次関数

$$y = 2(x-4)+3$$

を考える。このグラフは

$x=4$ のとき $y=3$

だから点 (4,3) を通る

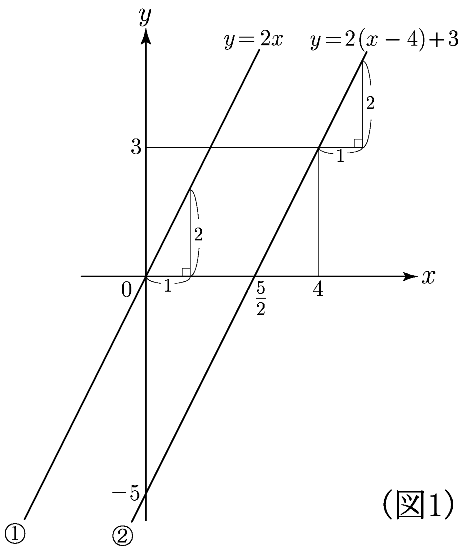
直線である。

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4)+3 \\ &= 2x-5 \end{aligned}$$

より y 切片は -5 である。

x 切片を求めるには $y=0$

とおく。



(図1)

$$y=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

このグラフは図１の直線②である。②は $y=2x$ のグラフを

x 軸方向に 4、y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

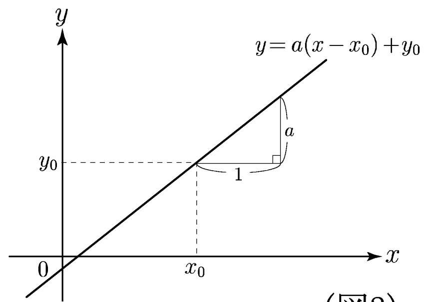
このグラフは <u>点 (4,3) を通り、傾き 2 のグラフ</u> である。

一般に１次関数

$$y = a(x-x_0)+y_0$$

のグラフは、点 (x_0, y_0) を通り、

傾き a の直線である。



(図2)

問１　次の直線を表す関数の式を求めよ。

(1) 点 $(2,-1)$ を通り、傾き 3 の直線　　　(2) 点 $(-3,4)$ を通り、傾き 5 の直線

問２　次の関数のグラフの x 切片、y 切片、傾きを求めよ。

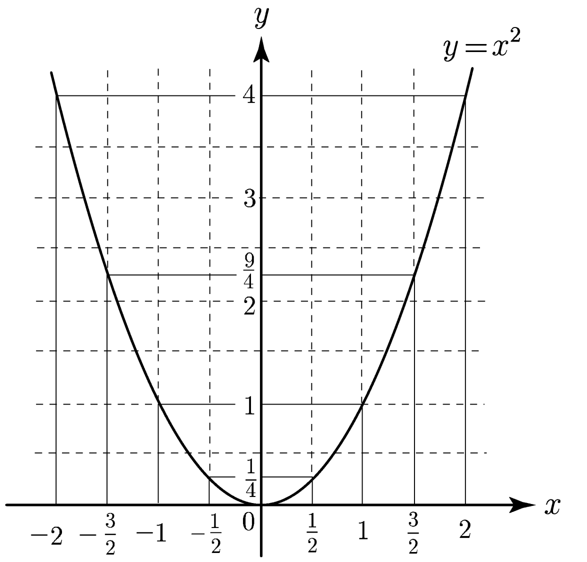
(1) $y=2(x+1)-3$　　　(2) $y=-4(x-3)+5$

＜２次関数のグラフ１＞

例１　２次関数 $y = x^2$ のグラフを書きたい。

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

表より、このグラフは点 $(-2,4)$, $(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$, $(1,-1)$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}),(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{4}),(1,1)$, $(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$, $(2,4)$ を通る。これらの点をつないだ曲線が図１の曲線である。この曲線が $y = x^2$ のグラフである。



(図1)

問１　次の空欄をうめ、その関数のグラフを図１の中に書け。

(1) $y = 2x^2$

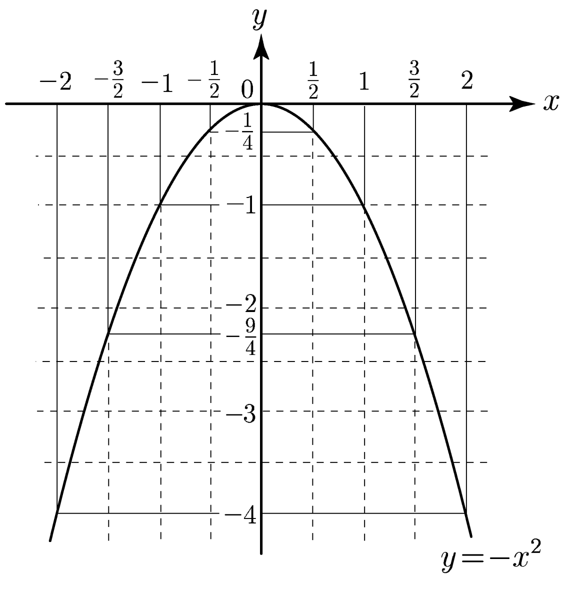
x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y					

(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

例２　２次関数 $y = -x^2$ のグラフは表より図２の曲線になる。

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{9}{4}$	-4



(図2)

問２　次の空欄をうめ、その関数のグラフを図２の中に書け。

(1) $y = -4x^2$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y					

(2) $y = -\dfrac{1}{4}x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y					

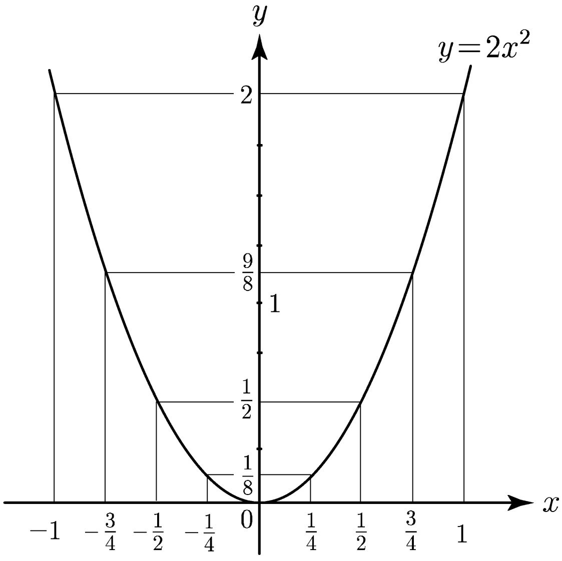
＜２次関数のグラフ２＞

例　前ページの問１で、２次関数 $y = x^2$ と $y = 2x^2$ のグラフを同じ座標平面に描いた。
２つのグラフは一見ちがう曲線に見えるが、実は相似である。

＜ $y = 2x^2$ (x と y との対応表) ＞

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2

表より $y = 2x^2$ のグラフの原点ちかくを２倍に拡大 (ズームイン) したグラフ (図１) は $y = x^2$ のグラフ (図３) と同じ曲線である。

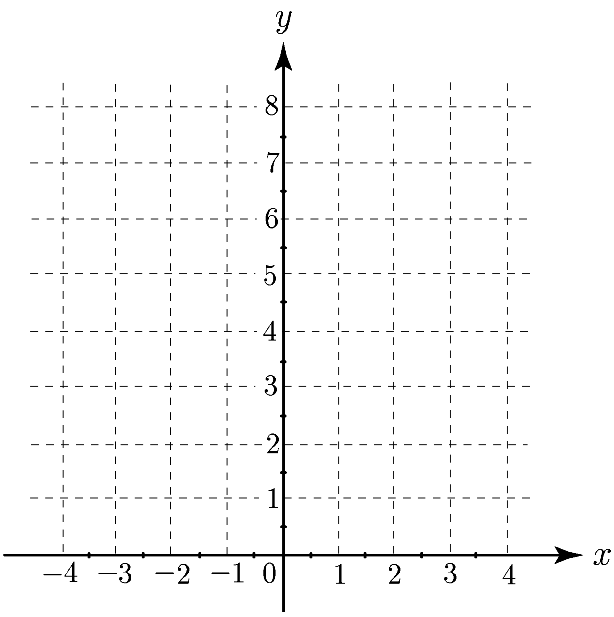


(図1)

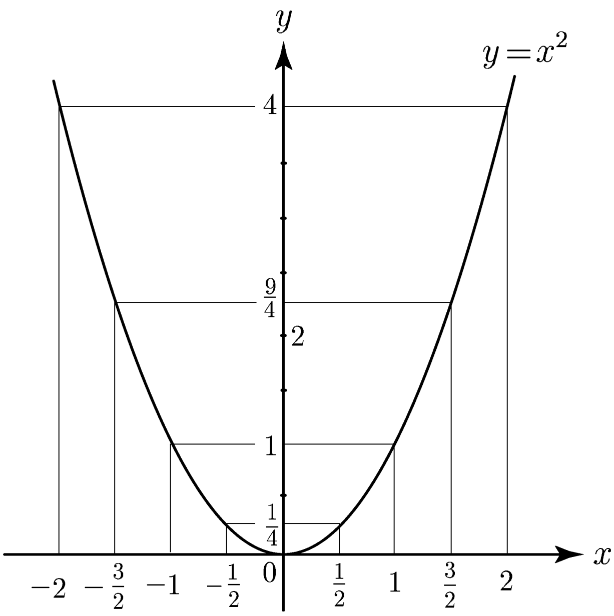
問　右の $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の対応表を完成し、図２の中に $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを描け。

＜ $y = \dfrac{1}{2}x^2$ (x と y との対応表) ＞

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									



(図2)



(図3)

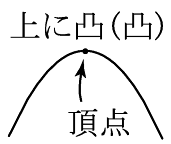
<2次関数のグラフ3>

前ページの結果から $y=x^2, y=2x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフは相似であることがわかる。23ページの例より $y=x^2$ と $y=-x^2$ のグラフは上下が反対になっているだけであり、図形として同じ曲線である。また $y=-x^2, y=-4x^2, y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフも相似な曲線である。従って2次関数

$$y=x^2\ ,\quad y=2x^2\ ,\quad y=\frac{1}{2}x^2\ ,\quad y=-x^2\ ,\quad y=-4x^2\ ,\quad y=-\frac{1}{4}x^2$$

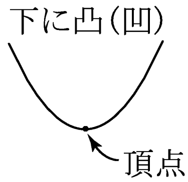
のグラフは全て相似な曲線である。これらの曲線を**放物線**という。それは物を投げたときの物体の軌道がこのような曲線になるからである。

$y=-x^2, y=-4x^2, y=-\frac{1}{4}x^2$ などのグラフを**上に凸**または単に**凸**という(図1)。このようなグラフで y 座標が最大になる点を、この放物線の**頂点**という。



(図1)

$y=x^2, y=2x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ などのグラフを**下に凸**または単に**凹**という(図2)。このグラフで y 座標が最小になる点を(同様に)頂点という。



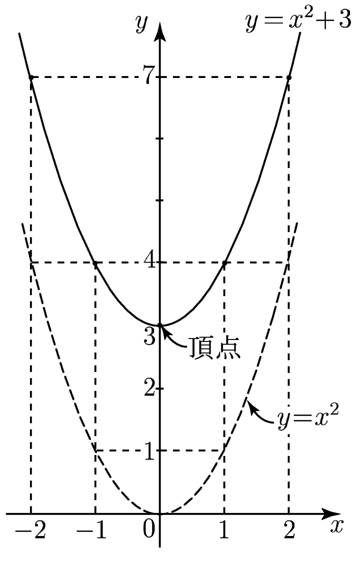
(図2)

例 2次関数

$$y=x^2+3$$

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
y	7	4	3	4	7

のグラフは表より図3のような、下に凸の放物線で頂点の座標は $(0,3)$ である。このグラフは $y=x^2$ のグラフを y 軸方向に3だけ平行移動したものである。

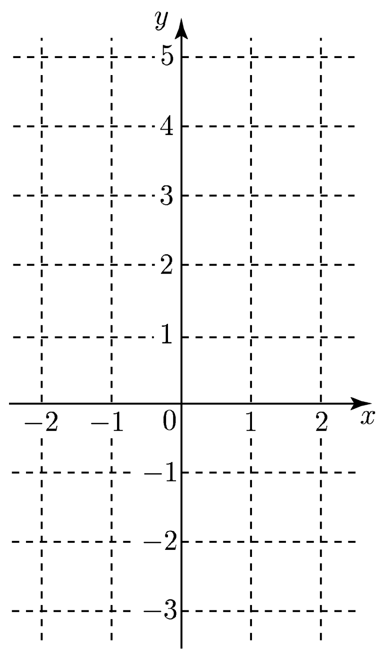


(図3)

問 次の2次関数のグラフを図4の中に書き、頂点の座標を求めよ。

(1) $y=-x^2+4$

(2) $y=2x^2-3$

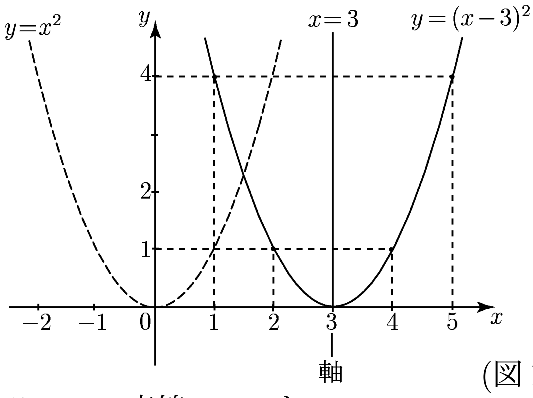


(図4)

<2次関数のグラフ4>

例 2次関数 $y=(x-3)^2$ を考える。x と y との対応表

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	4	1	0	1	4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	4	1	0	1	4



(図1)

より、グラフは図1のような放物線になる。この曲線は $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動したものであり、頂点の座標は $(3,0)$ である。この曲線は y 軸に平行な (x 座標が3である) 直線 $x=3$ に関して左右対称である。この直線 $x=3$ をこの放物線の**対称軸**または単に**軸**という。

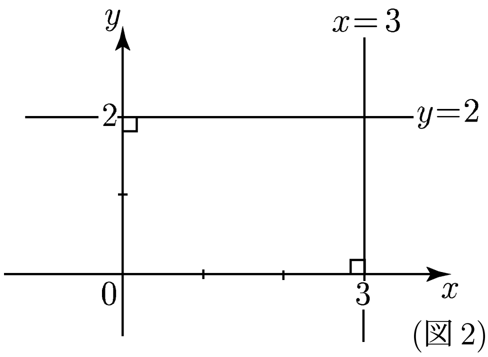
(注)
傾き a 、y 切片 b の直線の式 $y=ax+b$ で $a=0, b=2$ のときは

$$y=2$$

になる。これは y 切片が2で、傾き0(x 軸に平行)の直線 (図2) を意味する。同様にして

$$x=3$$

は y 軸に平行で x 切片が3の直線を意味する。



(図2)

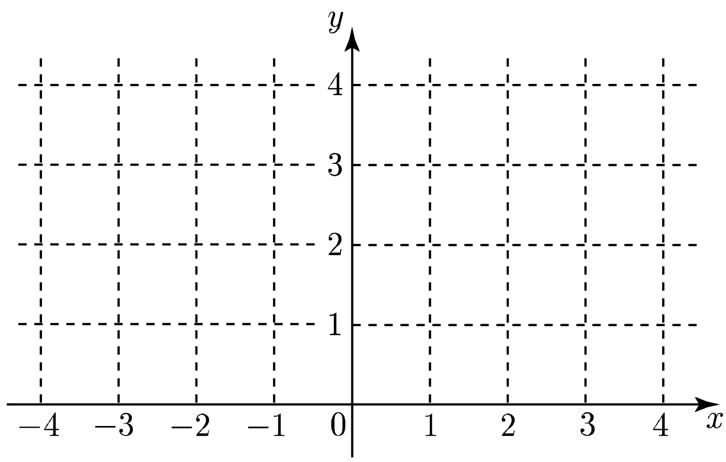
問 次の2次関数の対応表とグラフを書き、頂点の座標と軸の式を求めよ。

(1) $y=(x+2)^2$

x	-4	-3	-2	-1	0
y					

(2) $y=(x-2)^2$

x	0	1	2	3	4
y					



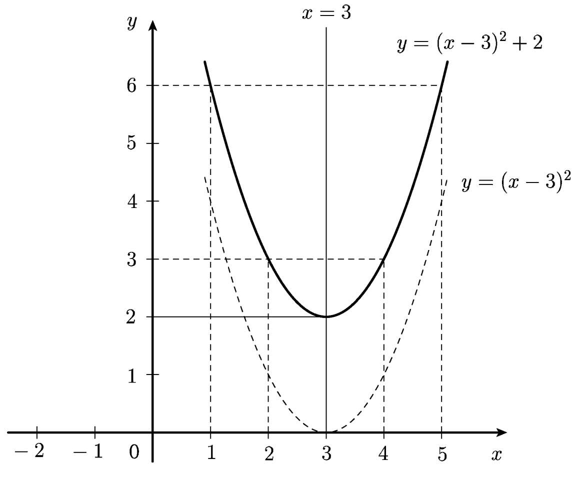
<2次関数のグラフ5>

例　2次関数 $y=(x-3)^2+2$ を考える。

対応表

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2	4	1	0	1	4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(x-3)^2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	4	1	0	1	4
y	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	6	3	2	3	6

表よりこのグラフは頂点 $(3\ ,\ 2)$、軸 $x=3$ の下に凸な放物線 (図1) である。このグラフは $y=(x-3)^2$ を y 軸方向に2だけ平行移動したものである。



（図１）

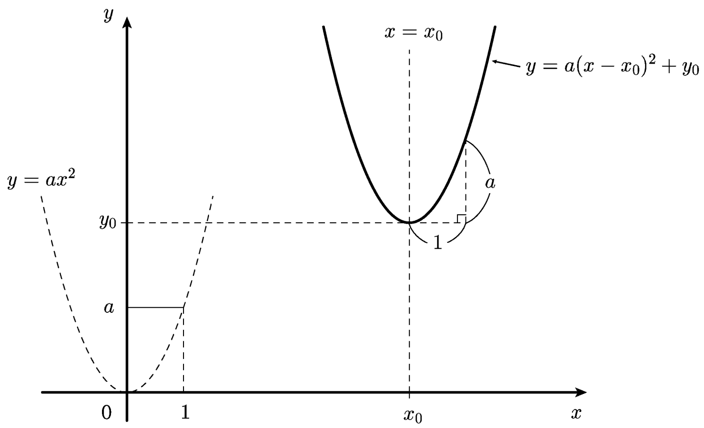
一般に2次関数

$$y=a(x-x_0)^2+y_0$$

のグラフは $y=ax^2$ のグラフを

$$\begin{cases} x\text{ 軸方向に } x_0 \\ y\text{ 軸方向に } y_0 \end{cases}$$

だけ平行移動したものである。
その頂点は $(x_0\ ,\ y_0)$ で軸は $x=x_0$ である。$a>0$ のときは図2のようなグラフになる。



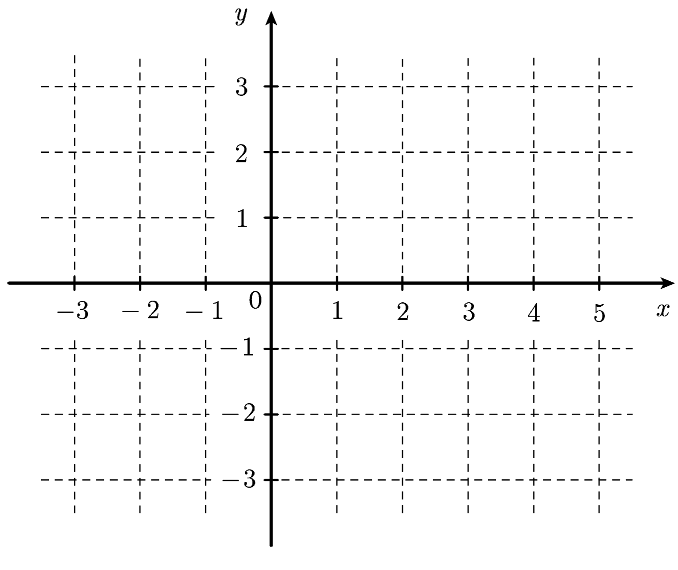
問　次の2次関数の対応表とグラフを書き、頂点と軸を求めよ。

(1) $y=-(x-3)^2+2$

x	1	2	3	4	5
y					

(2) $y=(x+1)^2-3$

x	-3	-2	-1	0	1
y					



<2次関数のグラフ6>

例1　2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフを書きたい。

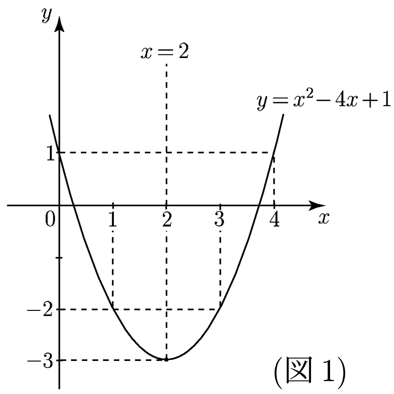
$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

より

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$$

であるから頂点 $(2, -3)$、軸 $x = 2$ の放物線である。(図1)

$x = 0$ のとき $y = 1$ より y 切片は1である。



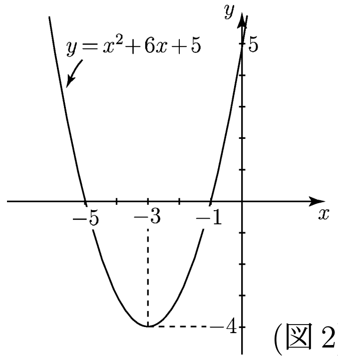
(図1)

例2　$y = x^2 + 6x + 5$

$= (x+3)^2 - 4$

より、頂点 $(-3, -4)$ の放物線である。(図2)

$x = 0$ のとき $y = 5$ より y 切片は5。



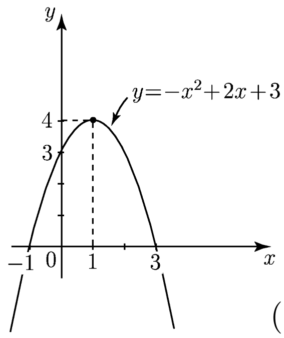
(図2)

例3　$y = -x^2 + 2x + 3$

$= -(x-1)^2 + 4$

より、頂点 $(1, 4)$ の放物線である。(図3)

$x = 0$ のとき $y = 3$ より y 切片は3。

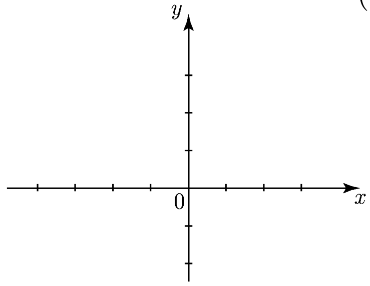


(図3)

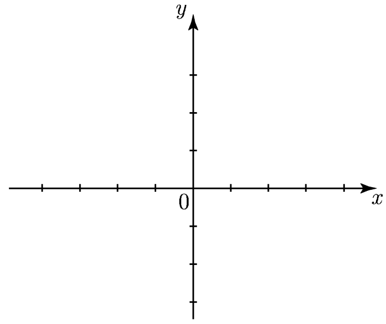
(注) 放物線のグラフを書くときは、まず頂点の位置をはっきりわかるように書くこと。その次に頂点以外に通る点を少なくとも1点は書いておくこと。普通は y 切片 (y 軸との交点) を書く。

問　次の放物線の頂点を求め、グラフを書け。

(1) $y = x^2 + 4x + 3$



(2) $y = -x^2 - 2x + 2$



＜2次関数のグラフ7＞

x についての2次式が 27 ページのような形のとき**標準形**といい、展開して降べきの順に並べた形のものを**一般形**という。

2次式の標準形		2次式の一般形
$a(x-x_0)^2+y_0$		ax^2+bx+c

一般形で表された2次式を標準形にすることができる。

$$ax^2+bx+c=a\{x^2+\tfrac{b}{a}x\}+c=a\{x^2+2\times\tfrac{b}{2a}x+(\tfrac{b}{2a})^2-(\tfrac{b}{2a})^2\}+c$$

$$=a\{(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2}{4a^2}\}+c=a(x+\tfrac{b}{2a})^2+c-\tfrac{b^2}{4a}$$

よって一般形で表された2次関数

$$(*)\ \boxed{y=ax^2+bx+c=a(x+\tfrac{b}{2a})^2+c-\tfrac{b^2}{4a}}$$

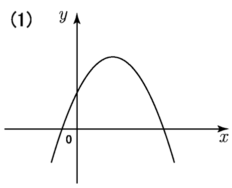
のグラフは、頂点 $(-\frac{b}{2a}\ ,\ c-\frac{b^2}{4a})$、軸 $x=-\frac{b}{2a}$ の放物線である。

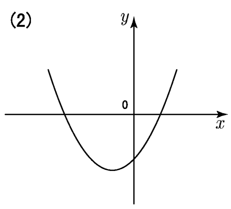
24, 25 ページより「$y=ax^2$ のグラフは全て $y=x^2$ のグラフと相似」である。

$(*)$ 式から「$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したもの」であることがわかる。従って「全ての2次関数のグラフは $y=x^2$ のグラフと相似」である。一般に2次関数のグラフは**放物線**と呼ばれる。

つまり全ての放物線は相似である。

例　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図の場合を考える。





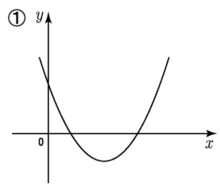
(1)　の場合 上に凸だから $a<0$

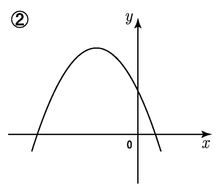
　　軸 $x=-\frac{b}{2a}>0$ より $b>0$

　　y 切片 は　c　だから $c>0$

(2)　の場合は $a>0$, $b>0$, $c<0$

問　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図の①、②の場合に、a , b , c の符号を例のように答えよ。





①　　　　　　　②

＜数が表すもの＞

1 個の数が表すものは数量や順位などであるが、2 個以上の数を組み合わせると図形などを表すことができる。

例 1＜1 個の数で表されるもの＞

(1) 1 番目、2 番目、3 番目などの**順位**

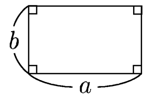
(2) 長さ、面積、体積、質量などの**量**

(3) 温度、速度、加速度などの**符号のついた量**

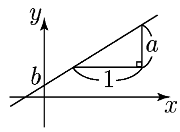
例 2＜2 個の数で表されるもの＞$\cdots$ 2 個の数を a と b とする

(1) 平面上の**点の位置** $=$ 座標 (a, b)

(2) 横 a、縦 b の**長方形**



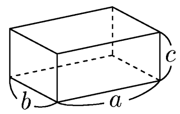
(3) 傾き a、y 切片が b の**直線**



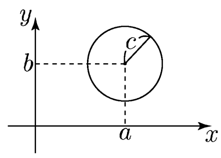
例 3＜3 個の数で表されるもの＞$\cdots$ 3 個の数を a, b, c とする

(1) 空間の**点の位置** $=$ 空間座標 (a, b, c)

(2) 横 a、縦 b、高さ c の**直方体**



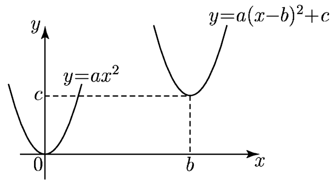
(3) 中心の座標が (a, b) で半径 c の**円**



(4) **放物線**

① $y = ax^2 + bx + c$　(一般形)

② $y = a(x - b)^2 + c$　(標準形)



などである。このように図形を数で表現することができるので、数値を計算することにより図形の問題を解くことが可能になる。さらに 4 個以上の数を組み合わせると、図形の**変形** (回転、折り返し) なども表現することができる。

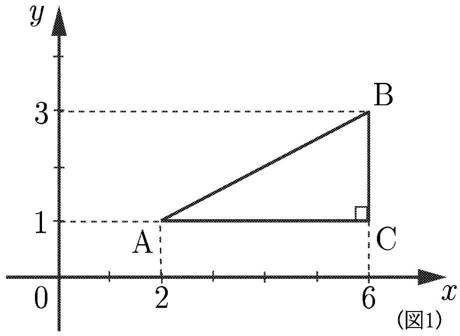
＜ 平面上の距離 ＞

例 1　平面上の 2 点 A$(2,1)$, B$(6,3)$
の間の距離 AB を求めたい。

図 1 より三角形 ACB は直角三角形
だからピタゴラスの定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= (6-2)^2 + (3-1)^2 \ = \ 4^2 + 2^2 = 20 \end{aligned}$$

よって　$\underline{(答)\ AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$

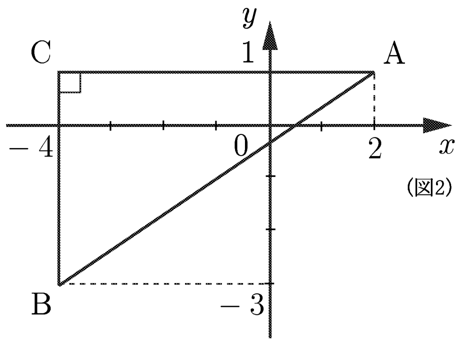


(図1)

例 2　平面上の 2 点 A$(2,1)$, B$(-4,-3)$
の間の距離 AB を求めたい。図 2 より

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= \big(2-(-4)\big)^2 + \big(1-(-3)\big)^2 \ = \ 6^2 + 4^2 \\ &= 52 \end{aligned}$$

よって　$\underline{(答)\ AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$



(図2)

(注)　例 2 で　$AC^2 = (-4-2)^2 = (-6)^2 = 36$,
$BC^2 = (-3-1)^2 = (-4)^2 = 16$　と計算しても良い。

問 1　平面上の 2 点 A,B が以下のような座標のとき、2 点間の距離 AB を求めよ。

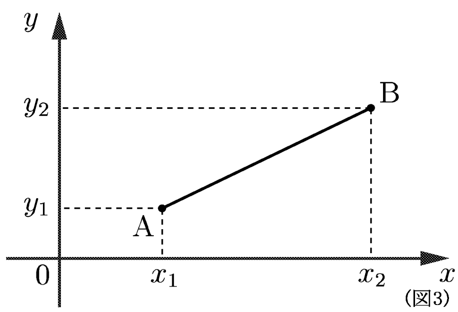
(1) A$(2,1)$, B$(6,4)$　(2) A$(3,2)$, B$(-1,-4)$　(3) A$(2,-1)$, B$(-3,4)$

AB=　AB=　AB=

問 2　平面上の 2 点 A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2)
の間の距離 AB を x_1, y_1, x_2, y_2
を用いて表せ。

(注) $\sqrt{\ }$ の中の 2 乗の式は展開しないほうがよい。

AB=

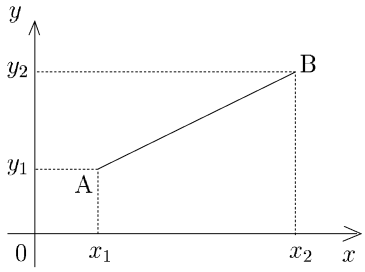


(図3)

＜円の方程式＞

平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$
間の距離 AB は、前ページより

$$(*) \quad \boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

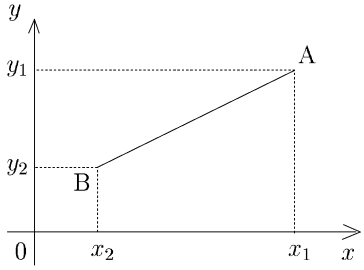


(図1)

であることがわかった。これは 2 点 A,B が
図 1 のような位置関係だけでなく、図 2
のような位置関係でも成立する。それは

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 \ , \ (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

が成り立つからである。公式 $(*)$ は 2 点 A,B が
平面上のどんな位置にあっても成立する。



(図2)

例　点 (6,4) を中心として半径 3 の
円周上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ があるとする。

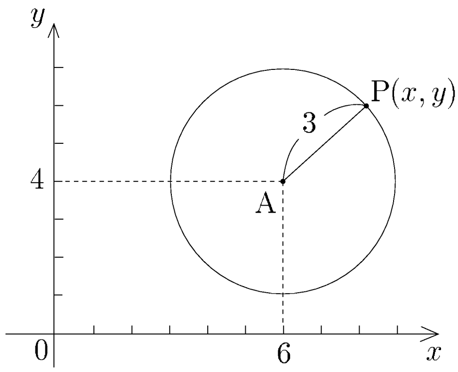
$$\mathrm{AP} = 3$$

より

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = 3$$

であるから両辺を 2 乗すれば

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 9 \quad \cdots \quad (1)$$



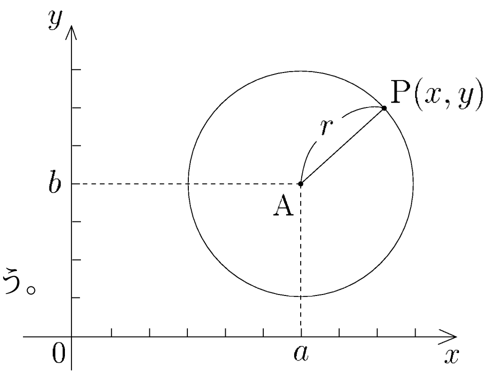
(図3)

となる。この式は円周上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ の x 座標と y 座標が満足
する関係式である。(1) 式をこの**円の方程式**という。

問 1　点 $\mathrm{A}(a, b)$ を中心として半径 r の
円周上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ があるとき、式

$$\left(x - \square\right)^2 + \left(y - \square\right)^2 = \square \qquad \cdots (**)$$

が成り立つ。$\square$ に適当な文字を入れよ。
$(**)$ 式を 中心 (a, b)、半径 r の円の方程式という。



(図4)

問 2　次の円の方程式が表す円の中心と半径を求めよ。

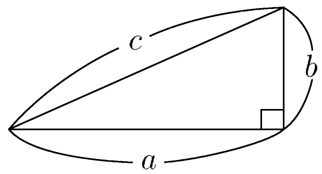
(1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$　:　中心 (　　,　　), 半径=

(2) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$　:　中心 (　　,　　), 半径=

(3) $x^2 + y^2 = 9$　:　中心 (　　,　　), 半径=

＜直角三角形＞

問 1　　右辺 a, 高さ b, 斜辺 c, の直角三角形に対し，ピタゴラスの定理を用いて斜辺の長さ c を a と b で表せ。

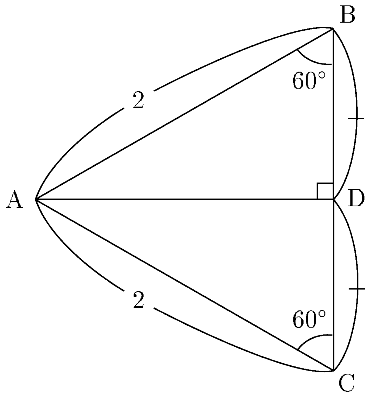


（図１）

(注)　$\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$ であるが $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

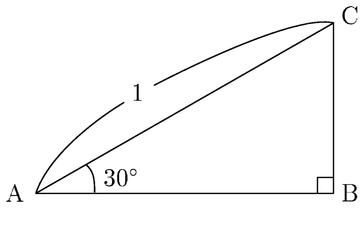
たとえば　$5 = \sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4 = 7$

問 2　　図 2 のように一辺の長さが 2 である正三角形ABC に対し，BCの中点を D とするとき，AD の長さを求めよ。



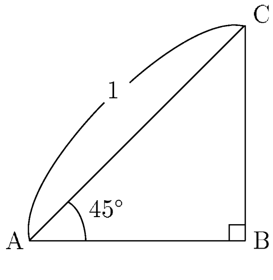
（図２）

問 3　　図 3 の直角三角形ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図３）

問 4　　図 4 の直角三角形ABC に対し，AB と BC の長さを求めよ。



（図４）

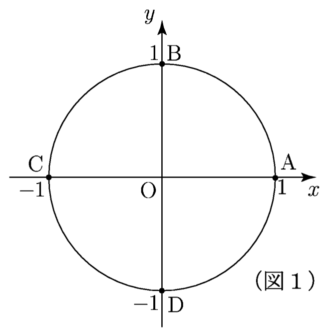
＜円周上の点＞

原点Oを中心として半径１の円周上の点の座標を
求める練習をする。前ページの結果を使ってもよい。

問１　図１の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A（　，　），B（　，　）

C（　，　），D（　，　）

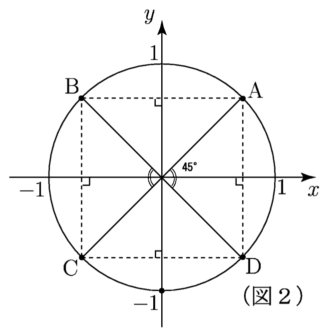


（図１）

問２　図２の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A（　，　），B（　，　）

C（　，　），D（　，　）

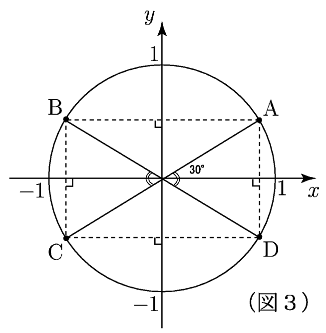


（図２）

問３　図３の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A（　，　），B（　，　）

C（　，　），D（　，　）

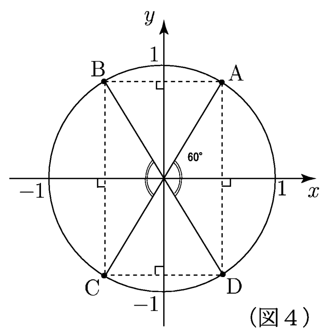


（図３）

問４　図４の点 A,B,C,D の座標を求めよ。

A（　，　），B（　，　）

C（　，　），D（　，　）

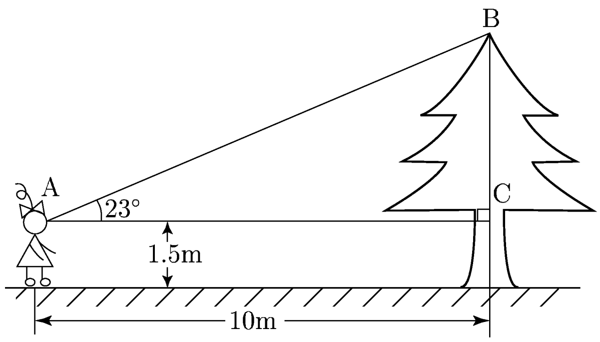


（図４）

＜三角法＞

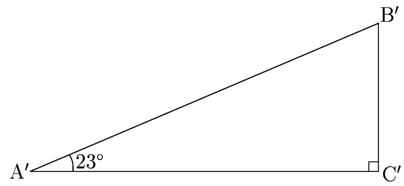
例　昔の人は三角形の相似を利用して、ピラミッドとか山の高さを測った。ここでは最も簡単な場合を考える。

右図のような木の高さを測りたい。ある人が木から10m 離れた場所から木の頂点 B を見上げたら、水平から 23° であった。人の目の位置を A(目の高さは地上 1.5m とする)、木の中心線上で地上 1.5m の位置を C とする。



三角形 ABC と相似な三角形を右下図のように紙に正確に描く。A′C′ と B′C′ の長さを実際に測ると

$$\frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$



であった。一方 $\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{A'B'C'}$ より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = 0.4245$$

であるから

$$\mathrm{BC} = 0.4245 \times \mathrm{AC} = 4.245 \text{ (m)}$$

よって木の高さはこれに 1.5(m) をたして　(答) 5.745 (m)

このような直角三角形の比 (高さ/底辺) を**正接** (*tangent*) という。この場合は

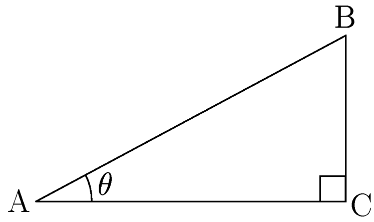
$$\tan 23^\circ = 0.4245$$

である。

問　例と同じ問題で見上げる角度が 30° のとき、木の高さを求めよ。(ただし $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$ とする。)

＜三角比1＞

右図のような直角三角形 ABC に対し、角 A が θ であるとき、辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を角 θ の**正接** $(tangent)$ といい



$$\boxed{\tan\theta \ = \ \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \ \left(= \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}}\right)}$$

と書く。同様に辺の比 $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**正弦** $(sine)$ といい

$$\boxed{\sin\theta \ = \ \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \ \left(= \frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}\right)}$$

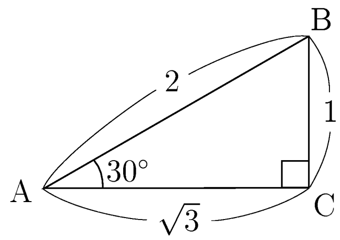
と書く。又、$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を角 θ の**余弦** $(cosine)$ といい

$$\boxed{\cos\theta \ = \ \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \ \left(= \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}\right)}$$

と書く。これらをまとめて**三角比**という。

例　図 1 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

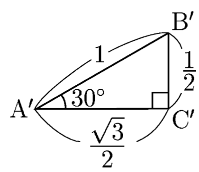
$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(図 1)

となる。一方、図 2 の直角三角形をもとに 30° の三角比を求めると

$$\sin 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \ \ (= \mathrm{B'C'})$$
$$\cos 30^\circ = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \ (= \mathrm{A'C'})$$
$$\tan 30^\circ = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



(図 2)

で上と同じ結果になる。どちらで考えてもよい。

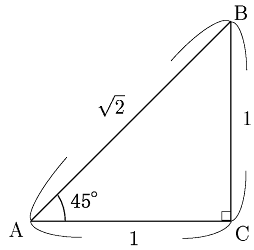
＜三角比 2 ＞

前ページを見て、以下の問に答えよ。

問 1

(1)　図 1 を見て次の比を求めよ。

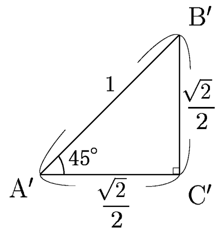
$\dfrac{BC}{AB} =$　　　, $\dfrac{AC}{AB} =$　　　, $\dfrac{BC}{AC} =$



（図 1）

(2)　図 2 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{B'C'}{A'B'} =$　　　, $\dfrac{A'C'}{A'B'} =$　　　, $\dfrac{B'C'}{A'C'} =$



（図 2）

(3)　次の値を求めよ

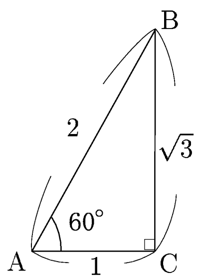
$\sin 45^\circ =$　　　　　, $\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$　　　　　, $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} =$

問 2

(1)　図 3 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{BC}{AB} =$　　　, $\dfrac{AC}{AB} =$　　　, $\dfrac{BC}{AC} =$



（図 3）

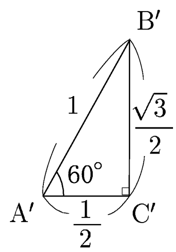
(2)　図 4 を見て次の比を求めよ。

$\dfrac{B'C'}{A'B'} =$　　　, $\dfrac{A'C'}{A'B'} =$　　　, $\dfrac{B'C'}{A'C'} =$

(3)　次の値を求めよ。

$\sin 60^\circ =$　　　　　, $\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$　　　　　, $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$



（図 4）

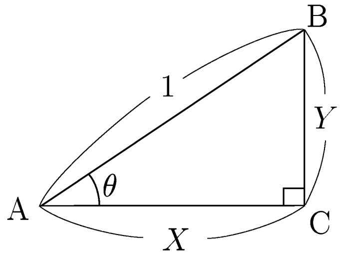
＜三角関数の定義＞

図１のように斜辺の長さが１の直角三角形 ABC で角 θ の三角比を考えると

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{Y}{1} = Y$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{X}{1} = X$$

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{Y}{X}$$

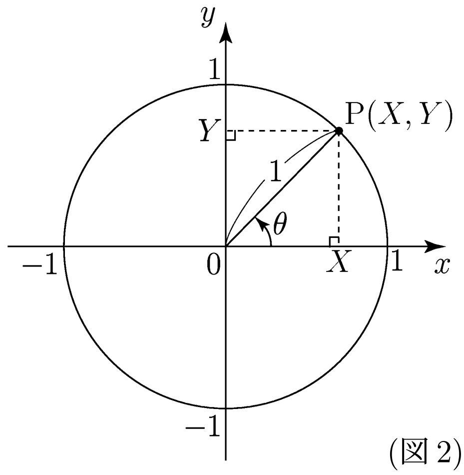


(図 1)

となる。この (X, Y) を座標平面上の点 P と考えると、原点を中心として半径１の円周上にある。角度 θ が大きくなれば点 P は $(1, 0)$ から出発して円周上を反時計まわりにまわる。そのとき、点 P の座標 (X, Y) で

$$\boxed{\sin\theta = Y\ ,\quad \cos\theta = X\ ,\quad \tan\theta = \frac{Y}{X}}$$

と定める。これで一般の角に対する三角関数が求まる。角度 θ は図２のように x 軸を基準に反時計まわりにはかる。



(図 2)

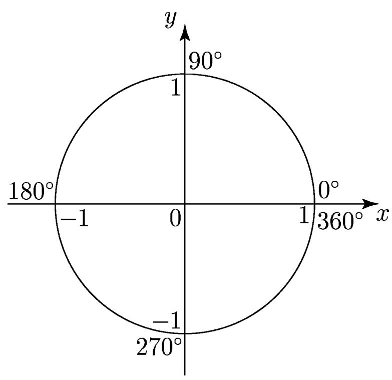
例１　$\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は $(1, 0)$ だから、このときは $X = 1,\ Y = 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0\ ,\quad \cos 0^\circ = 1\ ,\quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

例２　$\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は $(0, 1)$ だから $X = 0$, $Y = 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1\ ,\quad \cos 90^\circ = 0$$

であるが、このとき $\tan 90^\circ$ は求まらない。(分母に０がくるので計算できない。)



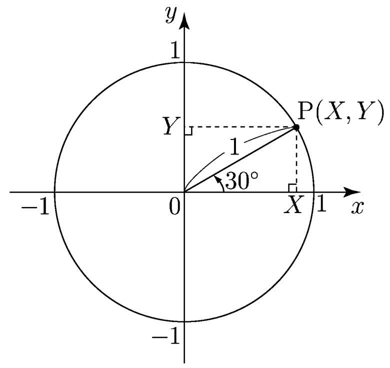
問　次の値を求めよ。

(1) $\sin 180^\circ =$ 　　　　　, $\cos 180^\circ =$ 　　　　　, $\tan 180^\circ =$

(2) $\sin 270^\circ =$ 　　　　　, $\cos 270^\circ =$

＜三角関数の値1＞

問 1　右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

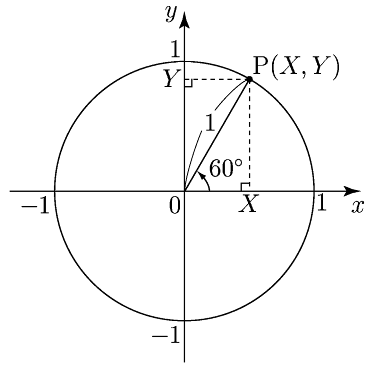


(1) $\cos 30^\circ =$

(2) $\sin 30^\circ =$

(3) $\tan 30^\circ =$

問 2　右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

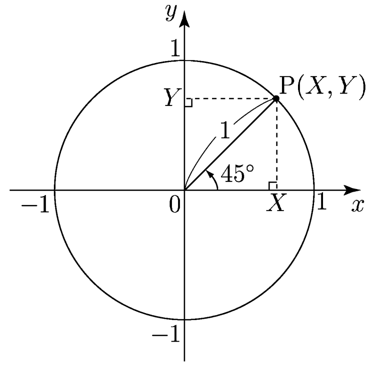


(1) $\cos 60^\circ =$

(2) $\sin 60^\circ =$

(3) $\tan 60^\circ =$

問 3　右図の点 P の座標 (X, Y) を求めることにより、次の値を求めよ。

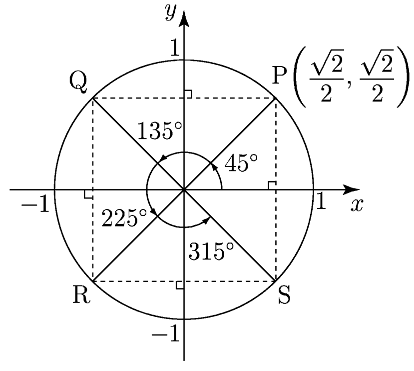


(1) $\cos 45^\circ =$

(2) $\sin 45^\circ =$

(3) $\tan 45^\circ =$

問 4　右図で、点 Q,R,S の座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



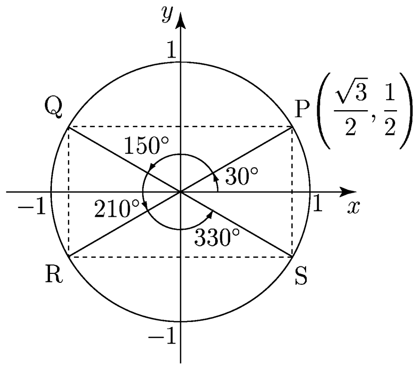
(1) $\cos 135^\circ =$　　　　, $\sin 135^\circ =$　　　　, $\tan 135^\circ =$

(2) $\cos 225^\circ =$　　　　, $\sin 225^\circ =$　　　　, $\tan 225^\circ =$

(3) $\cos 315^\circ =$　　　　, $\sin 315^\circ =$　　　　, $\tan 315^\circ =$

＜三角関数の値2＞

問1 右図で、点Q,R,Sの座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。

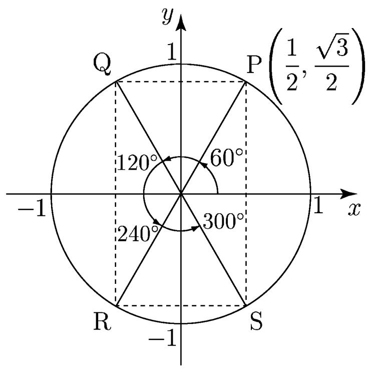


(1) $\cos 150° =$ $\qquad$, $\sin 150° =$ $\qquad$, $\tan 150° =$

(2) $\cos 210° =$ $\qquad$, $\sin 210° =$ $\qquad$, $\tan 210° =$

(3) $\cos 330° =$ $\qquad$, $\sin 330° =$ $\qquad$, $\tan 330° =$

問2 右図で、点Q,R,Sの座標を求めることによって次の三角関数の値を求めよ。



(1) $\cos 120° =$ $\qquad$, $\sin 120° =$ $\qquad$, $\tan 120° =$

(2) $\cos 240° =$ $\qquad$, $\sin 240° =$ $\qquad$, $\tan 240° =$

(3) $\cos 300° =$ $\qquad$, $\sin 300° =$ $\qquad$, $\tan 300° =$

問3 次の表を完成せよ。

角度θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin\theta$	0				1			
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$					
$\tan\theta$					$\boxtimes$			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

角度θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$		$-\frac{1}{2}$							
$\cos\theta$					0			$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\tan\theta$			1		$\boxtimes$				0