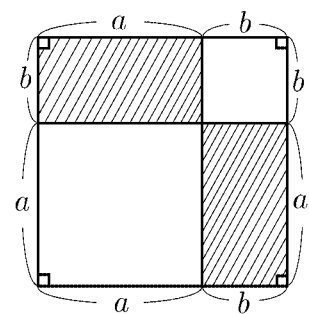
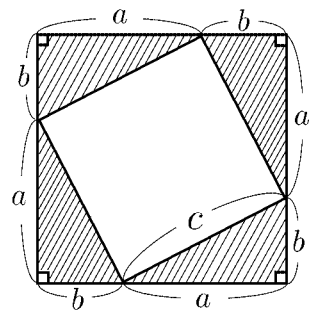


高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2000年度版)

1

内容

- ◎ 数と文字
- ◎ 文字式
- ◎ ピタゴラスの定理
- ◎ 平方根
- ◎ 2次方程式



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

< 検算 1 >

よく間違いやすい問題の検算方法を示す。

例 (通分) 分数の通分は少数になおして検算する。

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

この計算を $\frac{3}{8}$ と間違える場合があるが、少数になおすと

$$\frac{1}{3} \doteq 0.33 \quad , \quad \frac{2}{5} = 0.4 \quad , \quad \frac{11}{15} \doteq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8} = 0.375$$

↓

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \doteq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8} = 0.375$$

より $\frac{3}{8}$ が間違いであることがわかる。

問1 次の分数を小数 (第2位まで) で表せ。

$$(1) \frac{1}{2} = \quad , \quad \frac{1}{3} =$$

$$(2) \frac{3}{4} = \quad , \quad \frac{5}{6} =$$

$$\frac{5}{6} = \quad , \quad \frac{2}{5} =$$

$$\frac{8}{10} = \quad , \quad \frac{19}{12} =$$

$$(3) \frac{2}{3} = \quad , \quad \frac{1}{2} =$$

$$(4) \frac{11}{12} = \quad , \quad \frac{5}{8} =$$

$$\frac{1}{1} = \quad , \quad \frac{1}{6} =$$

$$\frac{7}{24} = \quad , \quad \frac{6}{4} =$$

問2 次の分数を通分せよ。(答が仮分数になっても帯分数になおさなくてよい。)

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$(2) \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$$

$$(3) \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$(4) \frac{11}{12} - \frac{5}{8}$$

$$(5) \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$$

$$(6) \frac{7}{8} + \frac{11}{6}$$

$$(7) \frac{7}{5} - \frac{3}{10}$$

$$(8) \frac{13}{8} - \frac{7}{6}$$

$$(9) \frac{1.2}{2} + \frac{3.2}{3}$$

$$(10) \frac{5}{4} + \frac{4.5}{6}$$

$$(11) \frac{9.3}{8} - \frac{3.4}{4}$$

$$(12) \frac{7.6}{8} - \frac{3.7}{6}$$

< 検算 2 >

例1 (小数の積) 小数の積は位どり(小数点の位置)が難しい。

$$0.3 \times 0.12 = 0.0036$$

この検算は分数になおして確かめる。

$$\text{(検算)} \quad \frac{3}{10} \times \frac{12}{100} = \frac{36}{1000} = 0.036$$

問1 次の積を分数になおして計算し、答を小数で出せ。

(1) $0.2 \times 1.3 =$

(2) $0.4 \times 0.15 =$

(3) $0.03 \times 1.04 =$

例2 (分数の商) 商の検算は出した答に割る数をかけて確かめる。

$$\text{商} \quad \div \quad = \quad \Rightarrow \quad \text{検算} \quad \times \quad =$$

$$(1) \quad \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \quad \Rightarrow \quad \text{検算} \quad \frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{9 \times 5}{10 \times 6} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{6} \times 4 \times 6}{\frac{3}{4} \times 4 \times 6} = \frac{5 \times 4}{3 \times 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \text{検算} \quad \frac{10}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{10 \times 3}{9 \times 4} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

問2 次の商を計算し、さらに検算せよ。

(1) $\frac{6}{5} \div \frac{3}{4}$ 検算

(2) $\frac{5}{12} \div \frac{8}{3}$ 検算

(3) $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}}$ 検算

(4) $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}}$ 検算

< 数の大小 >

例 0.84 , $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ の大小関係を調べる。

分数を小数になおすと

$$\frac{6}{7} \doteq 0.857 \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \doteq 0.833$$

で $0.833 < 0.84 < 0.857$ より

$$\underline{\text{(答)} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}}$$

(注) 上の答を逆向きに並べて

$$\underline{\frac{6}{7} > 0.84 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

と答えても間違いではないが、通常は大きい数を右側を書く。

(別解) 共通因子 $100 \times 7 \times 2 \times 3$ で通分すると

$$0.84 = \frac{84}{100} = \frac{84 \times 42}{100 \times 42} = \frac{3528}{4200} \quad , \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \times 600}{7 \times 600} = \frac{3600}{4200}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5 \times 700}{6 \times 700} = \frac{3500}{4200}$$

$$\frac{3500}{4200} < \frac{3528}{4200} < \frac{3600}{4200} \quad \text{より} \quad \text{(答)} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}$$

問 次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, 0.2

(2) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{17}{9}$, 1.9

(3) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, $-\frac{9}{8}$, -1.13

(4) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, 0.34

(5) $-\frac{1}{6} - \frac{3}{4}$, $-\frac{8}{9}$, $-\frac{7}{8}$

(6) $\frac{25}{8} - \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} + \frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}$

< 割合 >

例1 「5 m は 10 m のいくらに当たるか?」という問題に対する答えは「5m は 10m の $\frac{1}{2}$ に当たる。」となる。 $\frac{1}{2}$ は $\frac{5}{10}$ を約分したものである。

この例のように、割合とは

$$\boxed{\text{比べる量} \div \text{もとになる量} = \text{割合}}$$

である。割合は分数または小数で表される。日常では割合を百分率や歩合で表したりする。

割合(分数)	割合(小数)	歩合	百分率(%)
1	1	10割(わり)	100%
$\frac{1}{10}$	0.1	1割(わり)	10%
$\frac{1}{100}$	0.01	1分(ぶ)	1%
$\frac{1}{1000}$	0.001	1厘(りん)	0.1%

例2 プロ野球選手の打率が3割2分1厘とは $\frac{321}{1000}$ のこと、つまり1000回に321回ヒットがでることを意味する。百分率で表すと $\frac{321}{1000} = \frac{32.1}{100} = 32.1\%$ である。

問1 次の割合を歩合と百分率の両方で表せ。

(1) $\frac{73}{100}$

(2) 0.425

例3 割合と同様に2つの量の大きさを比べるのに比がある。2つの量の割合が $\frac{3}{4}$ のとき比では3:4と書き3対4と読む。

すなわち

$$3:4 = \frac{3}{4}$$

例4 体重40kgの人と体重60kgの人の体重の比は

$$40:60 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} (= 2:3)$$

である。

問2 次の比を(できるだけ簡単な)分数になおせ。

(1) 5:6

(2) 12:18

(3) 18:45

(4) 1.5:2.5

(5) 0.72:1.44

< 比と比例配分 >

例 1 (比)

右図において三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。この場合、対応する辺の比はすべて等しい。つまり

$$AE : AC = AD : AB = DE : BC$$

となる。今は $AE : AC = 2 : 5$ なので「三角形 ADE と三角形 ABC の相似比は $2 : 5$ である」という。AD の長さを求めたい。AD の長さを \square cm とすると、

$$AE : AC = AD : AB$$

より

$$2 : 5 = \square : 4 \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{\square}{4}$$

であるから両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = \square \Rightarrow \underline{\underline{(\text{答}) \square = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ (cm)}}}$$

問 1 図 1 で DE の長さを求めよ。

問 2 図 2 で三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。DE の長さ と AE の長さを求めよ。(答は仮分数でよい)

例 2 (比例配分)

「長さ 4cm の棒を $2 : 3$ に分ける。短い方の棒の長さを求めよ。」

という問題を考える。図 3 をよく

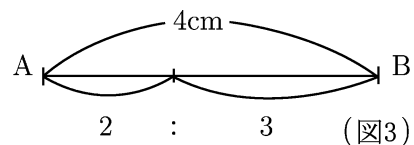
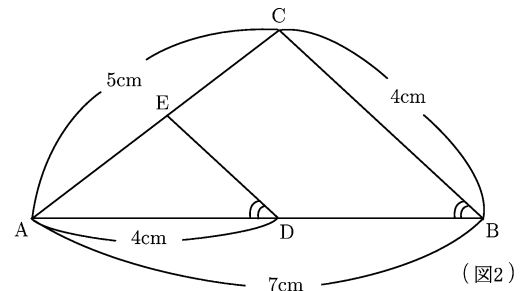
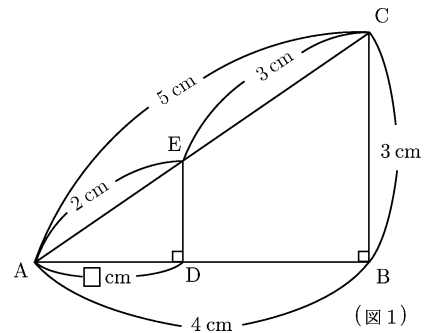
見ると、図 1 の \square を求める問題と同じであり、4cm を $2 : 5$ の比にするので

$$\underline{\underline{(\text{答}) } 4 \times \frac{2}{5} = 1.6 \text{ (cm)}}$$

(注) 例 2 のような比例配分の問題は比の問題と似てはいるが、解き方は全くちがう。

$$\text{「} 2 : 3 \text{ に分ける」} = \begin{cases} \text{小さい方} \Rightarrow \text{全体の} \frac{2}{2+3} \\ \text{大きい方} \Rightarrow \text{全体の} \frac{3}{2+3} \end{cases}$$

問 3 6 万円を $3 : 5$ に分ける。高い方の金額を求めよ。



< 累乗 >

同じ数をいくつか掛けるとき

7×7 は 7^2 と表し、7 の 2 乗

$5 \times 5 \times 5$ は 5^3 と表し、5 の 3 乗

という。このように同じ数をいくつか掛けたものを、その数の累乗という。 5^3 の 3 のように右かたの小さい数を指数という。累乗の指数はかけた数の個数を示している。2 乗を自乗または平方、3 乗を立方ということもある。

例 1 (1) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^4$

(2) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

(3) $(-5) \times (-5) \times 4 \times 4 \times 4 = (-5)^2 \times 4^3$

問 1 次の積を累乗の指数を使って表せ。

(1) $10 \times 10 \times 10$

(2) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(3) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

例 2 (1) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

(2) $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$

(3) $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

(4) $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$

(5) $(-2)^4 \times 3^2 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times 3 \times 3 = 16 \times 9 = 144$

(6) $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $(-1)^2$

(2) $(-1)^3$

(3) $(-1)^4$

(4) $(-1)^5$

(5) -2^4

(6) $(-2)^4$

(7) -5^2

(8) $(-3) \times 4^2$

(9) $(-3^4) \times (-10)^3$

(10) $(-2)^3 \times (-5^2)$

(11) $(3^2)^3$

(12) $(2^2)^3 \div (-4)^2$

< 素因数分解 >

6は3で割り切れる。このとき3は6の約数または因数という。

6は2でも割り切れ、もちろん1でも割り切れ、6自身でも割り切れる。

従って

6の約数は1, 2, 3, 6

の合計4個である。

問1 次の約数を全て書け。

(1) 18の約数

(2) 24の約数

7の約数は1と7だけである。1より大きい数でその数自身と1以外に約数をもたない数を素数という。2から20までの素数は

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

である。

問2 20から50までの素数を全て書け。

素数でない数は素数の積で表される。たとえば12は

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

となる。このような素数の積の形にすることを素因数分解という。

例1 66を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2×3で割ると11になるから

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

$$\begin{array}{r} 2) \underline{66} \\ 3) \underline{33} \\ 11 \end{array}$$

例2 720を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2で4回割り切れ、3で2回割り切れ、5で1回割り切れるから

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 2) \underline{720} \\ 2) \underline{360} \\ 2) \underline{180} \\ 2) \underline{90} \\ 3) \underline{45} \\ 3) \underline{15} \\ 5 \end{array}$$

問3 次の数を素因数分解せよ。

(1) 68

(2) 108

(3) 140

(4) 144

(5) 156

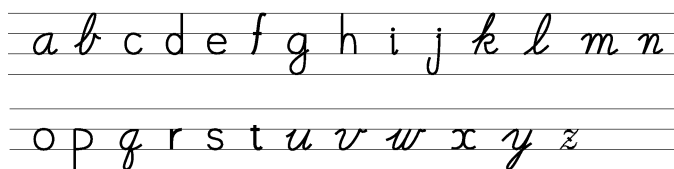
(6) 196

(7) 225

(8) 324

< アルファベット >

アルファベットの小文字は、数学の答案では次のように書くとよい。



b は活字体の b でもよいが、数字の 6 と区別がつくように書く。

f は筆記体 f だと b と間違えるので活字体の f の方がよい。

h は筆記体 h でもよいが k と区別がつくように書く。

k は活字体 k だと大文字 K やギリシャ文字の κ (カッパ) と間違えるので筆記体の方がよい。

l は活字体 l だと数字の 1 と間違えるので筆記体 l を使う。

n は活字体 n だと h と間違えるので筆記体 n を使う。

q は活字体 q だと数字の 9 と間違えるので筆記体を使う。

s を数字の 5 のように書く人は筆記体 s を使ってもよい。

v を活字体で v と書くと、 \vee (理論記号の or) と似るので筆記体 v を使う。

x はギリシャ文字の χ (カイ) のように書かないこと。

z は数字の 2 と間違えやすいので必ず真ん中に点をつけ z のように書く。

アルファベットの大文字はすべて活字体で書く。

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

(注) 「活字体には立体と斜体がある。その使い分けは 18,19 ページを参照せよ。」

問 次の数字・文字・数学記号をはっきり区別がつくように書け。

- (1) b , f , 6 (数字) (2) h , n (3) l , 1 (数字), 7 (数字)
- (4) q , 9 (数字) (5) s , 5 (数字) (6) u , v
- (7) x , \times (積の記号) (8) z , 2 (数字) (9) c (小文字), C (大文字)
- (10) s (小文字), S (大文字) (11) U (大文字), V (大文字) (12) X (大文字), \times (積の記号)
- (13) 2 (数字), 3 (数字) (14) 5 (数字), 6 (数字) (15) e , l

<ギリシャ文字>

ギリシャ文字は筆記体を使わないので、基本的に活字体で書く。

小文字	大文字	英語名	読み方
α	A	alpha	アルファ
β	B	beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ	E	epsilon	イプシロン
ζ	Z	zeta	ツェータ
η	H	eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι	I	iota	イオタ
κ	K	kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ	M	mu	ミュー
ν	N	nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ
\omicron	O	omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ
ρ	P	rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ	T	tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン (ユプシロン)
$\phi(\varphi)$	Φ	phi	ファイ
χ	X	chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

ただしアルファベットと同じような字体は区別するため

γ (ガンマ) , ω (オメガ)

のように書く。

問 次の文字をはっきり区別がつくように書け。

- (1) α , d (2) γ , r (3) ρ , p (4) τ , t (5) χ , x (6) ω , w

< 数としての文字 >

わからない数を□と表すかわりに x や y などの文字を使って表す。わからない数を未知数といい、数の代わりに文字を使うことを代数という。

例 1 5 ページの例 1 で□のかわりに x を使うと

$$2:5 = x:4 \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{4}$$

両辺を 4 倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = x \Rightarrow \underline{\underline{(\text{答}) } x = \frac{8}{5} = 1.6}$$

(注) この例 1 の場合は文字 x は (結果的に) 分数 $\frac{8}{5}$ または少数 1.6 を意味する。

例 2 図 1 において各直線上の数字の和が同じになるよう x, y, z, w を決めたい。

上段の和は

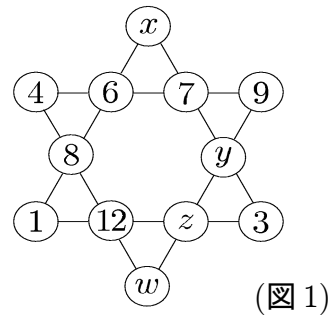
$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

だから

$$x + 6 + 8 + 1 = 26$$

より

$$x = 26 - (6 + 8 + 1) = 11$$



(図 1)

問 1 例 2 で y, z, w にあてはまる数を求めよ。

問 2 図 2、図 3 で縦・横・ななめの数字の和が等しくなるよう、 x, y, z, w を求めよ。

(1)

4	9	w
3	x	7
8	z	y

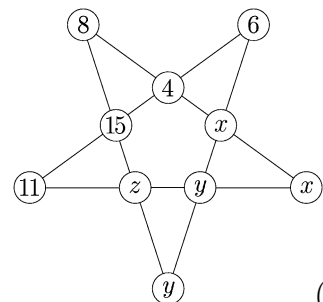
(図 2)

(2)

16	2	3	13
5	11	10	z
9	x	y	12
4	14	15	w

(図 3)

問 3 図 4 において各直線上の数字の和が等しくなるよう x, y, z を求めよ。



(図 4)

< 省略記号の変更 >

1. プラス記号は省略しない(帯分数は使わない)

帯分数の $1\frac{1}{2}$ は本来は $1 + \frac{1}{2}$ という意味であるが、間のプラスが省略されている。後で積の記号を省略するので、まぎらわしいから、今後は帯分数を使用してはならない。 $1\frac{1}{2}$ を表したいときは、 $1 + \frac{1}{2}$ かまたは仮分数 $\frac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\frac{7}{2}$ を $3 + \frac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問1 次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\frac{1}{4}$

(2) $2\frac{3}{5}$

(3) $4\frac{2}{3}$

(4) $9\frac{4}{5}$

2. 積の記号 \times は省略する

文字式の場合、積の記号 \times は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 \times を省略する。例えば $x + x = 2 \times x$ を $2x$ と略記する。また $x \times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例 $x + x + x = 3x$, $2 \times x + 5 \times x = 7x$, $a \times b \times c = abc$

$$4 \times x \times x - 7 \times x \times x = -3x^2$$
 , $a \times (a + b) = a^2 + ab$

$$5 \times x \times x \times x \times 7 \times y \times y = 35x^3y^2$$
 , $a \times 2 \times a \times 4 \times a \times 5 = 40a^3$

(注) (1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で abc のように続けて書いてはならない。 $a \times b \times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $a b c$ と書く。

問2 次の式を積の記号 \times を省略して簡単にせよ。

(1) $5 \times x + x + x + x$

(2) $2 \times x \times x \times 3 \times y \times y \times y$

(3) $a \times a \times (a + 4 \times b)$

(4) $3 \times x \times x \times (x \times 4 - y \times y)$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を文字式という。文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 \div 使わない。このようなきまりをまとめると

- <文字式のきまり>
1. 文字式では積の記号 \times は省略する。
 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。
 3. 同じ文字の積は指数を使う。
 4. 文字式では割り算を分数で表す。

となる。

- (注) 1. 積の記号 \times は通常は省略するが、 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では $a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4 b^2 c$ のように \times を全て省略する。
2. アルファベットの積は $a^4 b^2 c$ のようにアルファベットの順に $a, b, c \dots, x, y, z$ に従って左側から書いていく。
3. 積の記号 \times のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように書く場合もあるが $2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6$, $2.3 = 2 + 0.3$ のように小数点と混同するので使用しない方がよい。

例 1 $5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

(注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算とちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例 2 $(4a^2b) \div (6ab^2) = \frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \frac{2a}{3b}$

(注) 最後の式 $\frac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times x \times x \times 2$ (2) $2(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $8 \times x \times y \times x \div (4 \times x \times y \times 3 \times y)$ (4) $36a^3b^2 \div 45ab^4$

(5) $(4x^2y) \times (3x^2y^5) \div (6x^3y)$ (6) $(5a^3bc) \div (4abc^2) \times (8a^2b^3c)$

< 通分 >

例 1 $\frac{5}{6}$ と $\frac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の 6 と 4 の最小公倍数である 12 を共通分母にして

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} + \frac{21}{12} = \frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数 12 を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分する方が簡単である。

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} + \frac{7 \times 6}{4 \times 6} = \frac{20}{24} + \frac{42}{24} = \frac{62}{24} = \frac{31}{12}$$

例 2

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{8} = \frac{7 \times 8}{6 \times 8} + \frac{5 \times 6}{8 \times 6} = \frac{56 + 30}{48} = \frac{86}{48} = \frac{43}{24}$$

例 3

$$\frac{8}{9} - \frac{7}{12} = \frac{8 \times 12}{9 \times 12} - \frac{7 \times 9}{12 \times 9} = \frac{96 - 63}{9 \times 12} = \frac{33}{9 \times 12} = \frac{11}{3 \times 12} = \frac{11}{36}$$

例 4

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{8} = \frac{x \times 8}{6 \times 8} - \frac{y \times 6}{8 \times 6} = \frac{8x - 6y}{48} = \frac{4x - 3y}{24}$$

最後の式 $\frac{4x - 3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例 5

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2 \times y}{x \times y} + \frac{3 \times x}{y \times x} = \frac{2y + 3x}{xy}$$

最後の式 $\frac{2y + 3x}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例 6

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3 \times (b \times c)}{a \times (b \times c)} + \frac{2 \times (a \times c)}{b \times (a \times c)} + \frac{1 \times (a \times b)}{c \times (a \times b)} = \frac{3bc + 2ac + ab}{abc}$$

最後の式 $\frac{3bc + 2ac + ab}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次式を通分せよ。

(1) $\frac{7}{6} - \frac{3}{4}$

(2) $\frac{5}{12} + \frac{7}{8}$

(3) $\frac{11}{8} - \frac{13}{12}$

(4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6}$

(5) $\frac{a}{6} - \frac{b}{4}$

(6) $\frac{x}{9} + \frac{y}{12}$

(7) $\frac{6}{a} - \frac{y}{x}$

(8) $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$

(9) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

< 分数の簡略化 >

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい(約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

例 (1) $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1 \times 3}{\frac{2}{3} \times 3} = \frac{3}{2}$

(2) $\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right) \times (6 \times 4)} = \frac{7 \times 4}{5 \times 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

(3) $\frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right) \times (6 \times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 5)} = \frac{3 \times 6}{7 \times 5} = \frac{18}{35}$

(4) $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1 \times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right) \times ab} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b}$

最後の式 $\frac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

(5) $\frac{\frac{z}{2} + \frac{w}{5}}{\frac{x}{4} - \frac{y}{6}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \frac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right) \times (12 \times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right) \times (12 \times 10)}$
 $= \frac{(5z+2w) \times 12}{(3x-2y) \times 10} = \frac{(5z+2w) \times 6}{(3x-2y) \times 5} = \frac{30z+12w}{15x-10y}$

最後の式 $\frac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\frac{1}{\frac{4}{5}}$

(2) $\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{5}}$

(3) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}$

(4) $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}}$

(5) $\frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$

(6) $\frac{1}{\frac{zw}{xy}}$

(7) $\frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{w}{z}}$

(8) $\frac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$

(9) $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

< 文字式の値 >

文字式の中の文字を数でおきかえることを、文字にその数を代入する
といい、代入して計算した結果を、そのときの式の値という。

例 1 $x = -3$ のとき、 $x^2 + 4x + 5$ の値は

$$x^2 + 4x + 5 = (-3)^2 + 4 \times (-3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

問 1 $x = -2$ のとき次の式の値を求めよ。

(1) $-2x$ (2) $3+4x$ (3) $\frac{6}{x}$ (4) $x^2 - 5x + 3$

例 2 $a = 5, b = -3$ のとき $4ab + b^2$ の値は

$$4ab + b^2 = 4 \times 5 \times (-3) + (-3)^2 = -60 + 9 = -51$$

問 2 $a = -4, b = 2$ のとき次の式の値を求めよ。

(1) $5a - 6b$ (2) $\frac{b^2}{a}$ (3) $5a^2b + b^4$ (4) a^b

例 3 $R = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ とする。 $a = 2, b = 3$ のときの R の値は

$$R = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3+2}{2 \times 3}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

(別解) 文字 a, b に対し、 R の式を

$$R = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b}$$

のように簡単にしてから、 $a = 2, b = 3$ を代入して $R = \frac{2 \times 3}{3 + 2} = \frac{6}{5}$
と計算してもよい。

問 3 $R = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ とする。 a と b が以下の数であるとき R の値を求めよ。

(1) $a = 2, b = 3$ (2) $a = 2, b = 4$ (3) $a = 3, b = 5$

< 等式の変形 1 >

等号 = で結ばれる文字式を等式という。等式は次の法則がある。

1. 両辺に同じ数を足しても等式は成立する。
2. 両辺から同じ数を引いても等式は成立する。
3. 両辺に同じ数を掛けても等式は成立する。
4. 両辺を (0 以外の) 同じ数で割っても等式は成立する。
5. 両辺を入れ替えても等式は成立する。

例 1 次の等式

$$4 + 2x = 10 - x$$

を満たす数 x を求めたい。両辺に x を足すと

$$4 + 3x = 10$$

となる。両辺から 4 を引くと

$$3x = 6$$

となる。両辺を 3 で割ると

$$x = 2$$

が求まる。

問 1 次の等式を満たす x を求めよ。

(1) $5 + 3x = -4$

(2) $3 + 4x = 7 + 2x$

(3) $4(x + 2) = 5(3 - x)$

例 2 $3 : 5 = 7 : (x + 2)$ をみたす数 x を求めたい。比の意味 (4 ページ) から

$$\frac{3}{5} = \frac{7}{x + 2}$$

である。両辺に $x + 2$ を掛けると

$$\frac{3}{5}(x + 2) = 7$$

となり、両辺を $\frac{3}{5}$ で割り、さらに両辺から 2 を引くと

$$x + 2 \left(= \frac{7}{\frac{3}{5}} \right) = \frac{35}{3} \Rightarrow x = \frac{35}{3} - 2 = \frac{29}{3}$$

が求まる。

問 2 次の等式を満たす x を求めよ。

(1) $\frac{3}{x} = 4$

(2) $5 = \frac{4}{x + 1}$

(3) $4 : 7 = 3 : x$

(4) $(x + 1) : 3 = 2 : 5$

< 等式の変形 2 >

例1 等式

$$2x = 4a - 5 \quad \dots (1)$$

を考える。両辺を2で割ると

$$x = 2a - \frac{5}{2} \quad \dots (2)$$

となる。(1)の両辺に5を足して、4で割り、左辺と右辺を入れ替えると

$$2x + 5 = 4a \Rightarrow \frac{2x + 5}{4} = a \Rightarrow a = \frac{2x + 5}{4} \quad \dots (3)$$

となる。(1)から(2)の形にすることを「 x について解く」といい、(1)から(3)の形にすることを「 a について解く」という。

例2 等式

$$S = 2\pi rh$$

を r について解くと

$$r = \frac{S}{2\pi h}$$

であり h について解くと

$$h = \frac{S}{2\pi r}$$

となる。

問 次の等式を指定された形になおせ。

$$(1) \sigma = \frac{W}{A}, W =$$

$$(2) E = IR, I =$$

$$(3) \ell = 2\pi r, r =$$

$$(4) S = \frac{1}{2}ab, a =$$

$$(5) V = \frac{\pi DN}{1000}, N =$$

$$(6) P = \frac{TN}{9.74 \times 10^5}, T =$$

$$(7) m = \frac{D}{Z}, Z =$$

$$(8) v = a + bt, t =$$

$$(9) \sigma = \alpha E(t - \tau), t =$$

$$(10) G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \mu =$$

$$(11) S = \frac{1}{2}(a + b)h, a =$$

$$(12) \frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, R =$$

< 立体と斜体 >

アルファベットには筆記体と活字体がある。活字体とは新聞や本などに印刷される字体である。アルファベットの活字体にはさらに立体 (ローマン体) と斜体 (イタリック体) がある。

立体小文字	立体大文字	斜体小文字	斜体大文字
a	A	<i>a</i>	<i>A</i>
b	B	<i>b</i>	<i>B</i>
c	C	<i>c</i>	<i>C</i>
d	D	<i>d</i>	<i>D</i>
e	E	<i>e</i>	<i>E</i>
f	F	<i>f</i>	<i>F</i>
g	G	<i>g</i>	<i>G</i>
h	H	<i>h</i>	<i>H</i>
i	I	<i>i</i>	<i>I</i>
j	J	<i>j</i>	<i>J</i>
k	K	<i>k</i>	<i>K</i>
l	L	<i>l</i>	<i>L</i>
m	M	<i>m</i>	<i>M</i>
n	N	<i>n</i>	<i>N</i>
o	O	<i>o</i>	<i>O</i>
p	P	<i>p</i>	<i>P</i>
q	Q	<i>q</i>	<i>Q</i>
r	R	<i>r</i>	<i>R</i>
s	S	<i>s</i>	<i>S</i>
t	T	<i>t</i>	<i>T</i>
u	U	<i>u</i>	<i>U</i>
v	V	<i>v</i>	<i>V</i>
w	W	<i>w</i>	<i>W</i>
x	X	<i>x</i>	<i>X</i>
y	Y	<i>y</i>	<i>Y</i>
z	Z	<i>z</i>	<i>Z</i>

ここで注意してほしいのは小文字の x である。立体の x は積の記号 \times によく似ているため一文字だけの x はほとんど使われない。未知数を表すときは必ず斜体の x を使用する。一般に数を表す文字は必ず斜体を使う。数学の教科書では文字の用途に応じて字体を変えている。次のページで詳しく説明する。

< 文字の用途と字体 >

前ページで書いたように、数学の教科書では「数を表す文字」と「それ以外のものを表す文字」で明確に字体を区別している。

1. 「数を表す文字はアルファベットの斜体またはギリシャ文字を使う」

特に以下のような場合によく使われる文字を紹介する。

- (1) 1, 2, 3, … などの自然数は n, m, k, i, j, l 等
- (2) 未知数や変数には x, y, z, w, t, u, v, r 等
- (3) 指数、次数には n, p, q, r 等
- (4) 係数、定数には $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ 等
- (5) 関数には f, g, h, \dots 等

その他特別な数を表す場合がある。たとえば円周率 π 、ネピアの数 e 、虚数単位 i (または j)、重力加速度 g 等である。

2. 「単位を表す文字はアルファベットの立体を使う」

- (1) 長さ … km, m, cm, mm
- (2) 質量 … kg, g
- (3) 時間 … h, min, s

その他、角度 (rad)、力 (N, kgf)、熱量 (cal)、電流 (A)、電圧 (V) など全て立体である。ただし μm (マイクロメートル) や抵抗 Ω (オーム) のようにギリシャ文字を使うこともある。しかしアルファベットの斜体は使わない。

3. 「特殊な関数や数学記号はアルファベットの立体を使う」

- (1) 特殊な関数 … sin, cos, tan, log, exp など
- (2) 数学記号 … lim(極限), det(行列式) など

4. 「点や図形を表す文字はアルファベットの立体を使う」

- (1) 点を表す文字 … P, Q, A, B, C などがよく使われる。
- (2) 図形を表す文字 … 線分 AB, 三角形 ABC など

(注1) 立体で AB と書いた場合は点 A と点 B の間の距離を意味する。
斜体で AB と書いた場合は数 A と数 B との積 $AB = A \times B$ を意味する。
この使い分けを特に注意すること !!

(注2) 上記 2,3,4 のように立体で書く文字は数学の中の固有名詞と考えればよい。

(注3) 未知数がたくさんあるときはアルファベットやギリシャ文字では数が足りないことがある。たとえば未知数が 100 個あるときは、未知数を x, y, z, \dots と書くかわりに

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$$

と書く。 x の右下の小さな文字を ^{そえ}添字という。 x_2 は未知数 y のかわりで、 $x \times 2$ ではない!

< 単位の計算 1 >

< 長さ > 長さの単位を示す。

1km (キロメートル)	1m (メートル)	1dm (デシメートル)	1cm (センチメートル)	1mm (ミリメートル)	1 μ m (マイクロメートル)	1nm (ナノメートル)	1 (オンゲストローム)
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例 1 $3.5\text{km} = 3500\text{m}$, $2.4\text{m} = 240\text{cm}$, $1\text{m} = 10^{10}$

問 1 次の \square にあてはまる数を入れよ。

(1) $231\text{m} = \square \text{ km}$ (2) $1500\text{mm} = \square \text{ m}$ (3) $1\text{mm} = \square$

例 2 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか？」という問題では

$$740\text{m} = 0.74\text{km} \text{ だから}$$

$$12.5\text{km} + 0.74\text{km} = \underline{13.24\text{km}}$$

(注) $12.5\text{km} + 740\text{m}$ と書いてはならない。計算するときには必ず単位をそろえてする。

問 2 (1) 176cm と 2.4m を足すと何 m になるか？

(2) 3km から 620m を引くと何 m になるか？

< 時間 > $1\text{h}(\text{時間}) = 60\text{min}(\text{分})$, $1\text{min}(\text{分}) = 60\text{s}(\text{秒})$ で計算する。

例 3 $1\text{h} = 60\text{min}$, $1\text{min} = \frac{1}{60}\text{h}$

$$1\text{min} = 60\text{s} \text{ , } 1\text{s} = \frac{1}{60}\text{min}$$

$$4\text{h} = 4 \times 60\text{min} = 240\text{min}$$

$$150\text{min} = 150 \times \frac{1}{60}\text{h} = \frac{5}{2}\text{h} = 2.5\text{h}$$

例 4 1.3時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10} \times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より (答) 78分

問 3 次の \square にあてはまる数を入れよ。

(1) $2.4\text{min} = \square \text{ s}$ (2) $96\text{min} = \square \text{ h}$ (3) $1\text{h} = \square \text{ s}$

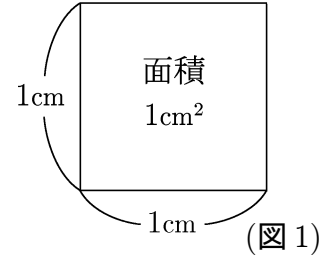
(4) $108\text{s} = \square \text{ min}$ (5) $2.7\text{h} = \square \text{ min}$ (6) $1.5\text{h} = \square \text{ s}$

< 単位の計算 2 >

< 面積 >

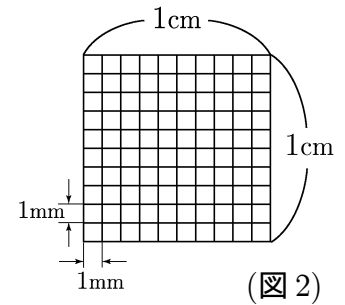
- 1km^2 (1 平方キロメートル) = 1 辺が 1km の正方形の面積
 1m^2 (1 平方メートル) = 1 辺が 1m の正方形の面積
 1cm^2 (1 平方センチメートル) = 1 辺が 1cm の正方形の面積
 1mm^2 (1 平方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の正方形の面積

(注) $1\text{km}^2=1\text{km}\times 1\text{km}$, $1\text{m}^2=1\text{m}\times 1\text{m}$, $1\text{cm}^2=1\text{cm}\times 1\text{cm}$,
 $1\text{mm}^2=1\text{mm}\times 1\text{mm}$ と考える。



例 1 図 1 は 1cm^2 を表す正方形であり、縦と横を 10 等分したものが図 2 である。図 2 の小正方形の 1 個の面積は 1mm^2 であり、それが 100 個あるから $1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2$ となる。これを式で表すと

$$1\text{cm}^2 = 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 100\text{mm}^2$$



例 2 $7.5\text{m}^2 = 7.5\text{m} \times 1\text{m} = 750\text{cm} \times 100\text{cm} = 75000\text{cm}^2$

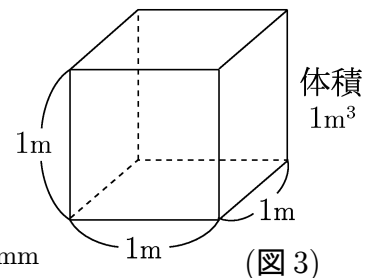
問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

- (1) $1\text{m}^2 = \square \text{cm}^2$ (2) $1\text{km}^2 = \square \text{m}^2$
- (3) $4.3\text{cm}^2 = \square \text{mm}^2$ (4) $0.05\text{km}^2 = \square \text{m}^2$

< 体積 >

- 1m^3 (1 立方メートル) = 1 辺が 1m の立方体の体積 (図 3)
 1cm^3 (1 立方センチメートル) = 1 辺が 1cm の立方体の体積
 1mm^3 (1 立方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の立方体の体積

(注) $1\text{m}^3=1\text{m}\times 1\text{m}\times 1\text{m}$, $1\text{cm}^3=1\text{cm}\times 1\text{cm}\times 1\text{cm}$, $1\text{mm}^3=1\text{mm}\times 1\text{mm}\times 1\text{mm}$
 と考える。



例 3 $6.4\text{cm}^3 = 6.4\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 64\text{mm} \times 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 6400\text{mm}^3$

問 2 次の □ にあてはまる数を入れよ。

- (1) $1\text{cm}^3 = \square \text{mm}^3$ (2) $1\text{m}^3 = \square \text{cm}^3$
- (3) $1\text{m}^3 = \square \text{mm}^3$ (4) $0.035\text{m}^3 = \square \text{cm}^3$

< 単位の計算 3 >

< 速度 > 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

$$1\text{km/h (時速 1km)} = \frac{1\text{km}}{1\text{h}} = 1 \text{ 時間に } 1\text{km} \text{ 移動する速度}$$

$$1\text{m/min (分速 1m)} = \frac{1\text{m}}{1\text{min}} = 1 \text{ 分間に } 1\text{m} \text{ 移動する速度}$$

$$1\text{m/s (秒速 1m)} = \frac{1\text{m}}{1\text{s}} = 1 \text{ 秒間に } 1\text{m} \text{ 移動する速度}$$

$$1\text{cm/s (秒速 1cm)} = \frac{1\text{cm}}{1\text{s}} = 1 \text{ 秒間に } 1\text{cm} \text{ 移動する速度}$$

などがよく使われる。

例 1 27km/h (時速 27km) を分速になおすと

$$27\text{km/h} = \frac{27\text{km}}{1\text{h}} = \frac{27000\text{m}}{60\text{min}} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = 450\text{m/min (分速 450m)}$$

であり、秒速になおすと

$$450\text{m/min} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = \frac{450\text{m}}{60\text{s}} = \frac{7.5\text{m}}{1\text{s}} = 7.5\text{m/s (秒速 7.5m)}$$

となる。ここで $7.5\text{m}=750\text{cm}$ より、 $7.5\text{m/s}=750\text{cm/s}$ (秒速 750cm) としてもよい。

問 1 次の にあてはまる数を入れよ。

$$72\text{km/h} = \text{ m/min} = \text{ m/s}$$

問 2 100m を 10 秒で走る速度を時速になおせ。

例 2 「2km/min (分速 2km) のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では、

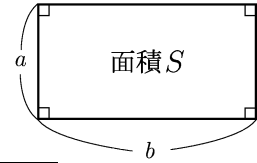
$$2\text{km/min} = \frac{2\text{km}}{1\text{min}} = \frac{2000\text{m}}{60\text{s}} = \frac{100\text{m}}{3\text{s}}$$

より (答) 100m を 3 秒で走る

問 3 42km を 2 時間 20 分で走る速度では、100m を何秒で走るか？

< 面積計算 >

例 1 長方形の面積 = 縦 × 横



この公式を普通は次のように表す。

$$\text{2 辺の長さが } a \text{ と } b \text{ の長方形の面積を } S \text{ とすると}$$

$$S = ab \quad \dots\dots (1)$$

例えば $a = 2\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ のときは
 $S = 2\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 10\text{ cm}^2$

となる。 a と b は単位をつけた数と考える。ただし、答の単位
 (この場合は cm^2) が明らかな場合は途中の式の単位を省略する
 場合がある。その場合は

$$S = 2 \times 5 = 10 \quad (\text{cm}^2)$$

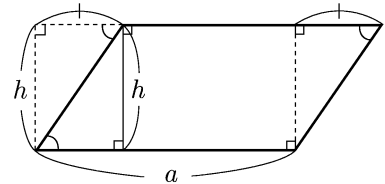
または

$$S = 2 \times 5 = 10 \quad \underline{\text{(答) } 10 \text{ cm}^2}$$

のように表す。

例 2 底辺の長さが a , 高さが h の
 平行四辺形の面積 S は

$$S = ah \quad \dots\dots (2)$$



例えば底辺の長さが 5 m , 高さが 3 m の平行四辺形の面積 S は

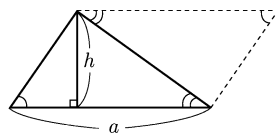
$$S = 5\text{ m} \times 3\text{ m} = 15\text{ m}^2$$

となる。また例えば $a = 3\text{ m}$, $h = 150\text{ cm}$ の場合は、 $h = 1.5\text{ m}$ と単位を
 そろえて答える。

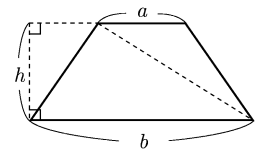
$$S = 3\text{ m} \times 1.5\text{ m} = 4.5\text{ m}^2$$

問 1 次の面積 S を求めよ。(単位不要)

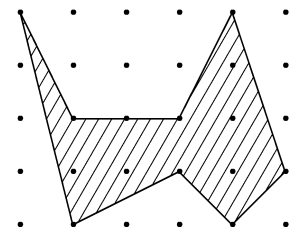
(1) 底辺の長さが a ,
 高さが h の三角
 形の面積 S



(2) 上底 a , 下底 b ,
 高さ h の台形
 の面積 S



問 2 次の斜線部分の面積を求めよ。ただし
 各点は縦・横 1 cm 間隔で等間隔に並ん
 でいるものとする。



<文字式の展開1>

例題 図1の斜線部分の面積 S を a, b, c, d を用いて表せ。

(解1) 2辺の長さが $a+b$ と $c+d$ の長方形だから

$$\text{(答) } S = (a+b)(c+d)$$

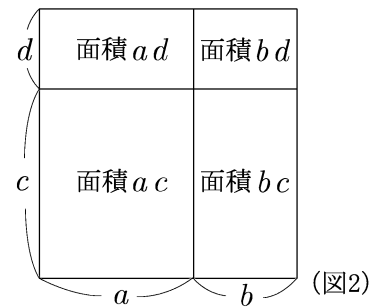
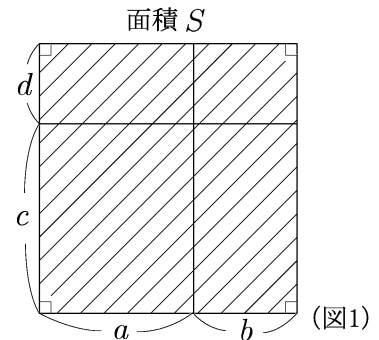
(解2) 図2より

$$\text{(答) } S = ac + ad + bc + bd$$

(注) 解1と解2はどちらも正しい。
すなわち

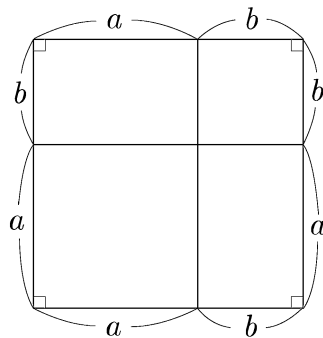
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

が成り立つ。

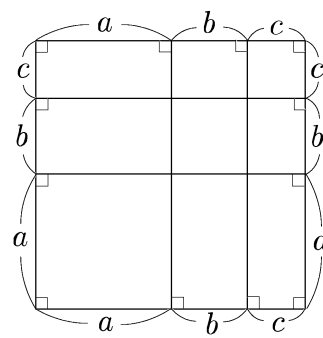


問1 次の正方形の面積 S を2通りに表せ。

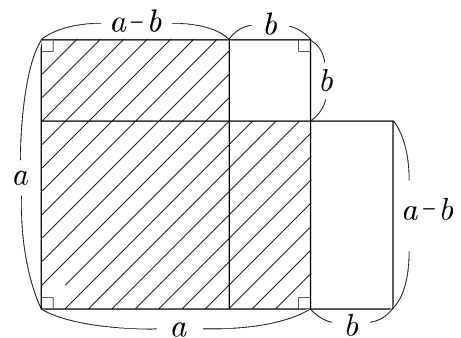
(1)



(2)



問2 次の斜線部分の面積 S を a, b を用いて、2通りに表せ。



< 文字式の展開2 >

例1 前ページ例題の結果

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

を計算で示すには

$$\begin{aligned}(a + b) \times (c + d) &= a \times (c + d) + b \times (c + d) \\ &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを展開するという。

例2 $(a + b)^2$ を展開する。

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) = a \times (a + b) + b \times (a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

例3 $(a + b)(a - b) = a \times (a - b) + b \times (a - b)$

$$\begin{aligned}&= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a - b)^2$

(2) $(a + b)(a + c)$

(3) $(a + b)(a - c)$

(4) $(a - b)(a - c)$

(5) $(a + b)(-a + b)$

(6) $(a + b + c)^2$

(7) $(a + b - c)^2$

(8) $(a - b - c)^2$

< 文字式の展開3 >

例1 $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned} &= a \times (a^2 + ab + b^2) - b \times (a^2 + ab + b^2) \\ &= a \times a^2 + a \times ab + a \times b^2 - b \times a^2 - b \times ab - b \times b^2 \\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

例2 $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b) = (a + b) \times (a + b)^2$

$$\begin{aligned} &= (a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a \times (a^2 + 2ab + b^2) + b \times (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a \times a^2 + a \times 2ab + a \times b^2 \\ &\quad + b \times a^2 + b \times 2ab + b \times b^2 \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) $(a - b)^3$

(3) $(a - b)(a + b)^2$

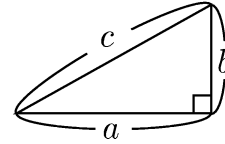
(4) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

(5) $(a - b)^2(a + b)^2$

< ピタゴラスの定理 2 >

前ページでわかったように、底辺 a 、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とすると

$$c^2 = a^2 + b^2$$



の関係が成立する。これをピタゴラスの定理
または三平方の定理という。

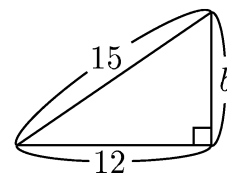
例 底辺が 12、斜辺の長さが 15 の直角三角形の
高さ b を求めたい。ピタゴラスの定理より

$$15^2 = 12^2 + b^2$$

が成り立つから

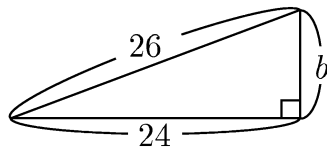
$$b^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

だから $b^2 = 81 = 9^2$ より (答) $b = 9$

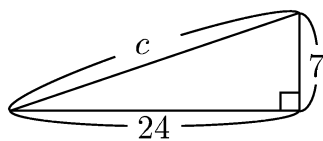


問 以下の直角三角形で a 、 b 、 c の値を求めよ。(単位不要)

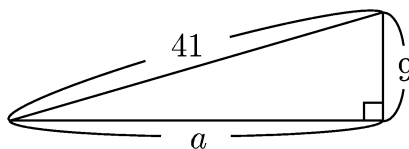
(1)



(2)



(3)



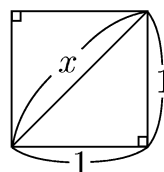
<平方根 1>

例 1 一辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356 \dots$$



となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は 2 つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は無理数 (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は 2 乗すれば 2 になる数であり、2 の平方根と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2 乗して a になる正の数を a の平方根と呼び \sqrt{a} で表す。この記号 $\sqrt{\quad}$ を根号という。

例 2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

などは無理数ではない。

問 1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{49}$

(2) $\sqrt{144}$

(3) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

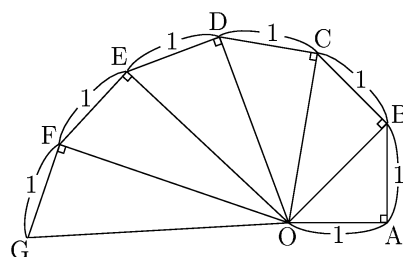
(4) $\sqrt{0.01}$

例 3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より

$$(OC)^2 = (OB)^2 + (BC)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから $OC = \sqrt{3}$ である。

問 2 右図で OD, OE, OF, OG の長さを求めよ。(単位不要)



<平方根2>

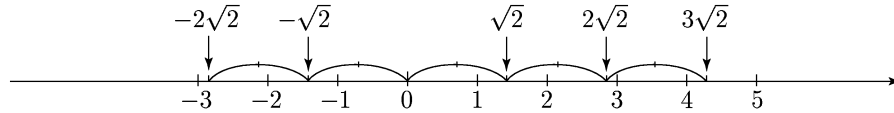
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \approx 1.7320508, \quad \sqrt{5} \approx 2.2360679, \quad \sqrt{6} \approx 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \quad (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。 $3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例1 文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問1 次式を計算せよ。

(1) $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$

(2) $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$

(3) $2(\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) + 3(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

(4) $2(\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) - 3(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

例2 (1) $(-\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

問2 次を計算せよ。

(1) $(-\sqrt{13})^2$ (2) $\sqrt{(-4)^2}$ (3) $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ (4) $\sqrt{(-0.3)^2}$

例3 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その2乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問3 次を計算せよ。

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$

(2) $\sqrt{5} \times \sqrt{6}$

(3) $\sqrt{7} \times \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

<平方根 3>

前ページ例 3 から一般に正の数 a と b に対して、

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

が成り立つ。

例 1 (1) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

問 1 次の平方根を例 1 のようになおせ。

(1) $\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{24}$ (3) $\sqrt{50}$ (4) $\sqrt{72}$ (5) $\sqrt{98}$

例 2 $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12$

(別解)

$$\sqrt{8} \times \sqrt{18} = (2\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 6 \times (\sqrt{2})^2 = 6 \times 2 = 12$$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ (2) $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$ (3) $\sqrt{27} \times \sqrt{12}$

例 3 $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{5}$

より $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ よって $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ がなりたつ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

が成り立つ。

例 4 $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

問 3 次の簡単にせよ。

(1) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ (2) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{16}}$ (3) $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

<平方根 4>

$$\begin{aligned}\text{例 1 } (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} + (\sqrt{10})^2 \\ &= 5 + 2\sqrt{50} + 10 \\ &= 15 + 2 \times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

(注) ここで文字式の展開式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いた。

問 1 25 ページを参考にして次の計算をせよ。

$$(1) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \quad (2) (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \quad (3) (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$$

$$(4) (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \quad (5) (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \quad (6) (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$$

$$\text{例 2 } (1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \quad (2) \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

このように変形することを「分母を有理化する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad (2) \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{2}{\sqrt{2}} \quad (4) \frac{6}{\sqrt{12}} \quad (5) \frac{3}{\sqrt{24}}$$

例 3 $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$(3) \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \quad (4) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

<数の表現1>

十進法では0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の10個の数字を組み合わせて数表現する。例えば23は

$$23 = 20 + 3 = 2 \times 10 + 3$$

という意味である。 $2 \times 3 = 6$ という意味ではない。これに対し、文字 a と b を続けて ab と書くと、積 $ab = a \times b$ という意味である。もし十の位が a 、一の位が b である数を表現したいなら

$$a \times 10 + b = 10a + b$$

と表す。

例1 $357 = 300 + 50 + 7 = 3 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$

例2 百の位が a 、十の位が b 、一の位が c である数は

$$a \times 10^2 + b \times 10 + c = 100a + 10b + c$$

と表す。

問1 千の位が a 、百の位が b 、十の位が c 、一の位が d である数を表せ。

例3 $2.73 = 2 + 0.7 + 0.03 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} = 2 + 7 \times \frac{1}{10} + 3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2$

例4 一の位が a 、小数第1位の位が b 、小数第2位の位が c である小数は

$$a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}$$

と表される。

問2 百の位が a 、十の位が b 、一の位が c 、小数第1位の位が d 、小数第2位の位が e である小数を表せ。

< 数の表現 2 >

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は 60 進法であり、コンピューターは 2 進法で計算する。ここでは 8 進法を紹介する。10 進法で 3 桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10 進法の数 (=10 進数という) であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し 8 進法で三桁目が 4, 二桁目が 5, 一桁目が 7 である数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8 進法で表される数を 8 進数という。4 × 8² + 5 × 8 + 7 = 303 より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

$$(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$$

$$(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$$

$$(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$$

問 1 次の 8 進数を 10 進数になおせ。

$$(15)_8 \quad (52)_8 \quad (123)_8 \quad (506)_8 \quad (2140)_8$$

例 2 $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

$$215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$$
 より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の 10 進数を 8 進数になおせ。

$$(21)_{10} \quad (45)_{10} \quad (79)_{10} \quad (156)_{10}$$

例 3 $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{9}{10^2}$

$$(4.57)_8 = 4 + \frac{5}{8} + \frac{7}{8^2}$$

問 3 次の小数を例 3 のように分数で表せ。

$$(3.18)_{10} \quad (1.5)_8 \quad (2.76)_8$$

< 整式 1 >

10進法で4桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は0から9までの数字である。
8進法で4桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_8 = a \times 8^3 + b \times 8^2 + c \times 8 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は0から7までの数字である。
2進法で4桁の整数は一般に

$$(a\ b\ c\ d)_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$$

と表される。ここで a, b, c, d は0かまたは1である。
一般に x 進法では4桁の整数は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

の形になる。また2桁、3桁の整数は、

$$2\text{桁} \cdots ax + b \quad , \quad 3\text{桁} \cdots ax^2 + bx + c$$

の形になる。このように x 進法で整数を表すような式を x に関する
整式という。これに対し、 $(2.37)_{10} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を x に関する分数式という。

整式は式の形で区別する。

x に関する1次式 $\cdots ax + b$ の形

x に関する2次式 $\cdots ax^2 + bx + c$ の形

x に関する3次式 $\cdots ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

ただし a は0でない数である。 x に関する整式では、 x 以外の文字
(a, b, c, d 等) を定数という。 ax^3 の a , bx^2 の b , cx の c
のように x との積になっている定数を係数という。

< 整式 2 >

x の整式は“ x 進法 ”よりもっと広い意味で用いる。たとえば x の 2 次式は一般に

$$ax^2 + bx + c$$

であるが、この係数 a, b や定数 c は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

例 1 $2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

このように整数は x の次数 (指数) の大きい順に並べる。このことを「降べきの順に並べる」という。

例 2 (1) $(3 - x + 2x^2) + (4x + 5 + 3x^2)$ 筆算では

$$\begin{aligned} &= (2x^2 - x + 3) + (3x^2 + 4x + 5) \\ &= (2x^2 + 3x^2) + (-x + 4x) + (3 + 5) \\ &= 5x^2 + 3x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ +) 3x^2 + 4x + 5 \\ \hline 5x^2 + 3x + 8 \end{array}$$

(2) $(-4x + 3 + 5x^2) - (7 - 2x)$ 筆算では

$$\begin{aligned} &= (5x^2 - 4x + 3) - (-2x + 7) \\ &= 5x^2 + (-4x - (-2x)) + (3 - 7) \\ &= 5x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 3 \\ -) \quad -2x + 7 \\ \hline 5x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

(3) $(2x - 3)(4x + 5)$ 筆算では

$$\begin{aligned} &= (2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5 \\ &= 8x^2 - 12x + 10x - 15 \\ &= 8x^2 - 2x - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ \times) \quad 4x + 5 \\ \hline 10x - 15 \quad \dots\dots (2x - 3) \times 5 \\ +) 8x^2 - 12x \quad \dots\dots (2x - 3) \times 4x \\ \hline 8x^2 - 2x - 15 \end{array}$$

(注) 整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 次の計算をせよ。

(1) $(4 + 5x - x^2) + (-2x + 3x^2 + 1)$ (2) $(3x - 4 + 2x^2) - (6 - 7x - 3x^2)$

(3) $(x - 3)(x + 4)$ (4) $(2x + 6)(5x - 7)$

< 整式 3 >

x の整式の積は文字式の場合 (25, 26 ページ) と同様に展開する。
そして最後の答は必ず降べきの順に並べる。

例 1 (1) $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times x + (\frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$
(2) $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
(3) $(x + a)(x - b) = x^2 + ax - bx - ab = x^2 + (a - b)x - ab$

問 1 次式を展開せよ。

(1) $(x + 2)^2$ (2) $(x - 4)^2$
(3) $(x + \frac{3}{2})^2$ (4) $(x - \frac{5}{2})^2$
(5) $(x + \frac{5}{6})^2$ (6) $(x - \frac{3}{4})^2$
(7) $(x - a)(x + a)$ (8) $(x + a)(x + b)$
(9) $(x - a)(x - b)$ (10) $(x + \frac{b}{2a})^2$

例 2 (1) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x - 3)^2$
(2) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = x^2 + 2 \times \frac{5}{2} \times x + (\frac{5}{2})^2 = (x + \frac{5}{2})^2$
(3) $x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = x^2 - 2 \times \frac{1}{6} \times x + (\frac{1}{6})^2 = (x - \frac{1}{6})^2$

(注) ここでは
 $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$, $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$
を用いている。

問 2 次の 2 次式を例 2 の右辺の形にせよ。

(1) $x^2 - 4x + 4$ (2) $x^2 + 10x + 25$
(3) $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ (4) $x^2 + 7x + \frac{49}{4}$
(5) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ (6) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

< 2次方程式1 >

「 x の2次式 $=0$ 」の形の式を2次方程式という。2次方程式をみたす数 x を2次方程式の解という。2次方程式の解は通常は2個ある。

例1 $x^2 - 5 = 0$ は $x^2 = 5$ と同じである。

$$(\sqrt{5})^2 = 5, \quad (-\sqrt{5})^2 = 5$$

より解は $x = \sqrt{5}$ または $x = -\sqrt{5}$ である。これを略して $x = \pm\sqrt{5}$ と書く。

例2 $(x-1)^2 - 5 = 0$ は $(x-1)^2 = 5$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 5 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{5}$$

より解は $x = 1 + \sqrt{5}$ または $x = 1 - \sqrt{5}$ である。これを略して $x = 1 \pm \sqrt{5}$ と書く。

例3 $(x-1)^2 - 4 = 0$ は $(x-1)^2 = 4$ と同じである。

$$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 2$$

$$x-1 = +2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 + 2 = 3$$

$$x-1 = -2 \quad \text{のとき} \quad x = 1 - 2 = -1$$

より解は $x = 3$ または $x = -1$ である。これを略して $x = 3$ または -1 と書く。

問 (1) $x^2 - 9 = 0$

(2) $x^2 - 12 = 0$

(3) $(x-2)^2 - 3 = 0$

(4) $(x+1)^2 - 5 = 0$

(5) $(x-2)^2 - 9 = 0$

(6) $(x+3)^2 - 4 = 0$

< 2次方程式 2 >

例1
$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 5 = 0 &\implies x^2 + 6x = -5 \\ \implies x^2 + 2 \times 3 \times x = -5 &\implies x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = 3^2 - 5 \\ \implies (x + 3)^2 = 4 &\implies x + 3 = \pm 2 \\ \implies x = -3 + 2 \text{ または } x = -3 - 2 &\implies \underline{\text{(答) } x = -1 \text{ または } -5}\end{aligned}$$

(注) $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ の形になるよう式変形する。

例2
$$\begin{aligned}x^2 - 5x - 3 = 0 &\implies x^2 - 5x = 3 \\ \implies x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x = 3 &\implies x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \\ \implies \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} &\implies x - \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{37}{4}} \\ \implies x - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} &\implies x - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \implies \underline{\text{(答) } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}}\end{aligned}$$

(注) $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ の形になるよう式変形する。

問 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(2) $x^2 - 8x + 12 = 0$

(3) $x^2 + 4x - 1 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 3 = 0$

(5) $x^2 - 3x - 1 = 0$

(6) $x^2 + 7x - 4 = 0$

< 2次方程式3 >

例 2次方程式 $5x^2 + 13x + 7 = 0$ を次のように解く。

$$5x^2 + 13x + 7 = 0 \implies x^2 + \frac{13}{5}x + \frac{7}{5} = 0 \implies x^2 + \frac{13}{5}x = -\frac{7}{5} \implies x^2 + 2 \times \frac{13}{10}x = -\frac{7}{5}$$

$$\implies x^2 + 2 \times \frac{13}{10}x + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \left(\frac{13}{10}\right)^2 - \frac{7}{5} \implies \left(x + \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{13^2 - 20 \times 7}{100}$$

$$\implies x + \frac{13}{10} = \pm \sqrt{\frac{13^2 - 20 \times 7}{100}} \implies x = -\frac{13}{10} \pm \frac{\sqrt{13^2 - 20 \times 7}}{\sqrt{100}} = \frac{-13 \pm \sqrt{29}}{10}$$

問 $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき 2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解の公式を例および左側の式変形を参考にして導け。(途中の式変形も書くこと)

$$\bigcirc x^2 + \triangle x + \square = 0$$

↓

$$x^2 + \frac{\triangle}{\bigcirc}x = -\frac{\square}{\bigcirc}$$

↓

$$x^2 + 2 \times \frac{\triangle}{2}x + \left(\frac{\triangle}{2}\right)^2 = \left(\frac{\triangle}{2}\right)^2 - \frac{\square}{\bigcirc}$$

↓

$$\left(x + \frac{\triangle}{2}\right)^2 = \frac{\triangle^2 - 4 \square}{4 \bigcirc}$$

↓

$$x + \frac{\triangle}{2} = \pm \sqrt{\frac{\triangle^2 - 4 \square}{4 \bigcirc}}$$

↓

$$x = -\frac{\triangle}{2} \pm \frac{\sqrt{\triangle^2 - 4 \square}}{\sqrt{4 \bigcirc}}$$

↓

$$\text{(答)} \quad x = \frac{-\triangle \pm \sqrt{\triangle^2 - 4 \square}}{2 \bigcirc}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

↓

↓

(答)
