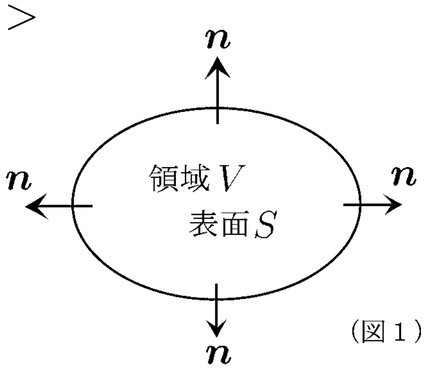
< 発散定理・ストークスの定理 >

< **発散定理** >



（図 1）

空間の立体 V の表面を S とする。曲面 S 上の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は図 1 のように外側に向いているとする。このとき 44 ページより関数 $f_3 = f_3(x\ ,\ y\ ,\ z)$ に対して

(1) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dV = \int_S (0\ ,\ 0\ ,\ f_3) \cdot d\boldsymbol{S}$

が成立する。同様に関数 $f_2 = f_2(x, y, z)$, $f_1 = f_1(x, y, z)$ に対して,

(2) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_2}{\partial y} dV = \int_S (0\ ,\ f_2\ ,\ 0) \cdot d\boldsymbol{S}$

(3) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_1}{\partial x} dV = \int_S (f_1\ ,\ 0\ ,\ 0) \cdot d\boldsymbol{S}$

が成立する。ここで $\boldsymbol{F} = (f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3)$ とすれば $(1) + (2) + (3)$ より

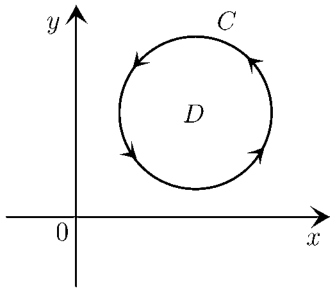
$$\boxed{\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F} dV = \int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}} \qquad \text{(発散定理)}$$

が成立する。これを**ガウスの発散定理**という。

例　図 1 のような V と S に対し, $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\big) dV = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) dV = 0$$

< **ストークスの定理** >

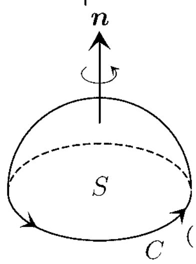


（図 2）

図 2 のような xy 平面上の領域 D と境界 C に対し,
28 ページより, グリーンの定理は

$$\boxed{\iint_D \mathrm{rot}(f_1, f_2) dxdy = \int_C (f_1, f_2) \cdot d\boldsymbol{r}} \qquad \text{(グリーンの定理)}$$

と書かれる。これは以下のように空間の場合に一般化できる。
図 3 のような空間の曲面 S の境界線を C とする。空間のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3)$ に対し



（図 3）

$$\boxed{\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}} \qquad \text{(ストークスの定理)}$$

が成立する。これを**ストークスの定理**という。

（注）ストークスの定理の曲面 S（図 3）は例の曲面 S（図 1）の上半分と考える。

問　図 3 のような曲線 C とスカラー場 φ に対し, $\displaystyle\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ。