< ポテンシャル >

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対し，あるスカラー場 $U(x,y,z)$ が存在して

$$\boldsymbol{v} = \left(-\tfrac{\partial U}{\partial x}\ ,-\tfrac{\partial U}{\partial y}\ ,-\tfrac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U$$

と表されているとき U をベクトル場 $\boldsymbol{v}$の**ポテンシャル**または**スカラーポテンシャル**という。そのイメージは，平面の場合 (25 ページ) と同様に，「U の勾配にそって球がころがりながら落ちるときの速度が $\boldsymbol{v}$」と考えればよい。

例 1　吸い込み (47 ページ例 1) の場合 $\boldsymbol{v} = (-x+a_1\ ,-y+a_2\ ,-z+a_3)$ であった。ここで $U(x,y,z) = \frac{1}{2}(x-a_1)^2 + \frac{1}{2}(y-a_2)^2 + \frac{1}{2}(z-a_3)^2$ とおくと

$$-\nabla U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = (-x+a_1\ ,-y+a_2\ ,-z+a_3) = \boldsymbol{v}$$

となり U が $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルであることが分かる。

問 1　ベクトル場 $\boldsymbol{v}$が以下の場合にポテンシャル U を求めよ。

(1) $\boldsymbol{v} = (x-b_1\ ,y-b_2\ ,z-b_3)$　　　(2) $\boldsymbol{v} = (-x\ ,-y\ ,2z)$

一般のベクトル場 $\boldsymbol{F}$に対し $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$（ポテンシャル $U = -\varphi$）を満たすスカラー場 φ が存在する場合は前ページより

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \mathrm{rot}(\nabla\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = \boldsymbol{0} \quad \text{(ゼロベクトル)}$$

を満たす。このようなベクトル場 $\boldsymbol{F}$を「**渦なし**」という。つまりポテンシャルが存在する場合は「渦なし」である。逆に「渦なし」であればポテンシャルが存在する。

問 2　ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$ は「渦なし」とする。すなわち $\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ より

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z}\ ,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

を満たすとする。このとき任意定数 a,b,c に対し

$$\varphi(x,y,z) = \int_a^x f_1(t,y,z)dt + \int_b^y f_2(a,t,z)dt + \int_c^z f_3(a,b,t)dt$$

とおく。$\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$ を満たすことを示せ。

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が発散しない場合，つまり $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = 0$ のとき，あるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が存在して

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

を満たす（証明略）。このベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{F}$ の**ベクトルポテンシャル**という。$\boldsymbol{A}$ が右の図のような「渦」の場合，$\boldsymbol{F}$ は「渦」の回転軸の方向で，右ねじをまわしたとき進む向きのベクトルである。