＜ハミルトンの演算子＞

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ に対して

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

によって定義されるベクトル場 $\nabla\varphi$ を φ の**勾配(*gradient*)**という。$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\ \varphi$ とも書く。∇ は**ハミルトンの演算子**と呼ばれ，**ナブラ**と読み，形式的に

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

で定義されるベクトルとする。従って $\nabla\varphi$ はベクトル ∇ と，スカラー φ の形式的な積と考えられる。この記号を使うとベクトル場$\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ の発散は

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial x}f_1+\frac{\partial}{\partial y}f_2+\frac{\partial}{\partial z}f_3=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f_1,f_2,f_3)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}}\ \text{(発散)}$$

となり ∇ と F の内積として表される。また回転は

$$\boxed{\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f_1&f_2&f_3\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{F}}\ \text{(回転)}$$

となり ∇ と$\boldsymbol{F}$の外積として表される。このように表した方が覚えやすい。

例

$$\mathrm{rot}(\nabla\varphi)=\nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}&\frac{\partial\varphi}{\partial y}&\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\,,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\,,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)=\boldsymbol{0}$$

一般にスカラー場 φ，ψ とベクトル場$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$に対して

(1) $\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$	,	$\nabla(\varphi\psi)=(\nabla\varphi)\psi+\varphi(\nabla\psi)$
(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})=\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\nabla\cdot\boldsymbol{G}$	,	$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{F}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$
(3) $\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})=\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla\times\boldsymbol{G}$	,	$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F})=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{F}+\varphi(\nabla\times\boldsymbol{F})$
(4) $\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{0}$	,	$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0$

が成り立つ。

問　ベクトル場 $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ に対し $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0$ を示せ。