＜ 発散 ＞

空間のベクトル場$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)\big)$ に対して
平面の場合 (23 ページ) と同様に

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}}\quad \text{(発散)}$$

を$\boldsymbol{F}$の**発散 (*divergence*)**という。

例 1　点 A(a_1,a_2,a_3) を空間の定点をする。動点 P(x,y,z) が微分方程式

$$(1)\quad \frac{\partial x}{\partial t}=-x+a_1\quad ,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=-y+a_2\quad ,\quad \frac{\partial z}{\partial t}=-z+a_3$$

に従って運動しているとする。(1) の一般解は

$$x(t)=a_1+C_1e^{-t}\quad ,\quad y(t)=a_2+C_2e^{-t}\quad ,\quad z(t)=a_3+C_3e^{-t}$$

(C_1,C_2,C_3は任意定数)

である。$t=0$ のとき $\big(x(0)\ ,\ y(0)\ ,\ z(0)\big)=(a_1+C_1\ ,\ a_2+C_2\ ,\ a_3+C_3)$ であり
$t\to\infty$ のとき $e^{-t}\to 0$ より $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)\to(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ となる。点 P は空間の任意の点 $(a_1+C_1\ ,\ a_2+C_2\ ,\ a_3+C_3)$ から出発し ($t\to\infty$ のとき) 点 A $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ に向かって進む。このような流れを**「吸い込み」**といい，点 A を**「吸い込み点」**という。
点 P の速度ベクトル$\boldsymbol{v}$は

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)=(-x+a_1,-y+a_2,-z+a_3)$$

であり，$\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(-x+a_1)+\frac{\partial}{\partial y}(-y+a_2)+\frac{\partial}{\partial z}(-z+a_3)=-1-1-1=-3$$

例 2　点 B$=(b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)$ を空間の定点とする。速度ベクトル$\boldsymbol{v}$が

$$\boldsymbol{v}=(x-b_1\ ,\ y-b_2\ ,\ z-b_3)$$

であるような点 (x,y,z) の運動は点 B から遠ざかっていく動きをあらわす。このような空間の流れを**「わき出し」**といい，点 B を**「わき出し点」**という。
ベクトル場 $\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(x-b_1)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b_2)+\frac{\partial}{\partial z}(z-b_3)=1+1+1=3$$

例 3　速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=(-x\ ,\ -y\ ,\ 2z)$$

であるような点 (x,y,z) の運動は，xy 軸上では原点に向って進み，z 軸上では原点から遠ざかる動きをあらわす。このような流れを**「よどみ」**という。
$\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(-x)+\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=-1-1+2=0$$

問　ベクトル場$\boldsymbol{v}$が以下の場合に発散 div$\boldsymbol{v}$を求めよ。

(1) $\boldsymbol{v}=(ax-by\ ,\ ay+bx\ ,\ cz)$
$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=$

(2) $\boldsymbol{v}=(\omega_2z-\omega_3y\ ,\ \omega_3x-\omega_1z\ ,\ \omega_1y-\omega_2x)$
$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=$