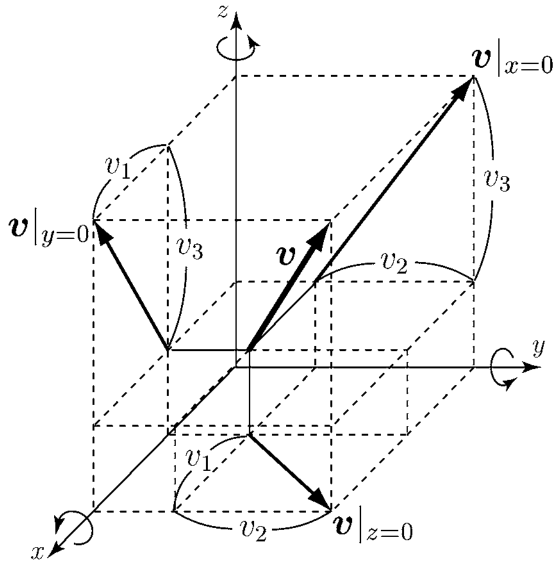
< 回転 2 >



空間の各点 (x,y,z) に速度ベクトル
$\boldsymbol{v}(x,y,z)=\big(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z)\big)$
が対応しているベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を考える。ベクトル $\boldsymbol{v}$ の xy 平面 $(z=0)$ への射影を $\boldsymbol{v}|_{z=0}$ とすれば，$\boldsymbol{v}|_{z=0}$ は xy 平面上のベクトル場 $\boldsymbol{v}|_{z=0}=(v_1,v_2)$ とみなせる。この回転量は 24 ページより

$$\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{z=0}\big)=\mathrm{rot}(v_1,v_2)=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

となる。これを z 軸まわりの回転量と考え

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_z=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{z=0}\big)=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

と書く。同様に y 軸まわりの回転量を (zx 平面の回転量として)

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_y=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{y=0}\big)=\mathrm{rot}(v_3,v_1)=\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}$$

とする。また x 軸まわりの回転量を (yz 平面の回転量として)

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_x=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{x=0}\big)=\mathrm{rot}(v_2,v_3)=\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}$$

とする。それらを成分としたベクトルを

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}&=\big((\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_x,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_y,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_z\big)\\&=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z},\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x},\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\end{aligned}}\quad \text{(ベクトル場 }\boldsymbol{v}\text{ の回転)}$$

と書き，空間のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**回転 (*rotation*)** という。

例　$\boldsymbol{\omega}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=(2z-3y,\,3x-z,\,y-2x)$ のとき $\boldsymbol{v}$ はベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を軸とした等速回転の速度ベクトルを意味する。このとき $\boldsymbol{v}$ の回転は

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}&=\left(\frac{\partial}{\partial y}(y-2x)-\frac{\partial}{\partial z}(3x-z),\,\frac{\partial}{\partial z}(2z-3y)-\frac{\partial}{\partial x}(y-2x),\,\frac{\partial}{\partial x}(3x-z)-\frac{\partial}{\partial y}(2z-3y)\right)\\&=\big(1-(-1),\,2-(-2),\,3-(-3)\big)=(2,4,6)=2(1,2,3)=2\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

となる。rot $\boldsymbol{v}$ は回転軸 $2\boldsymbol{\omega}$ を表す。

問　ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が以下の場合にベクトル場 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 rot $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\theta)$　　(2) $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$