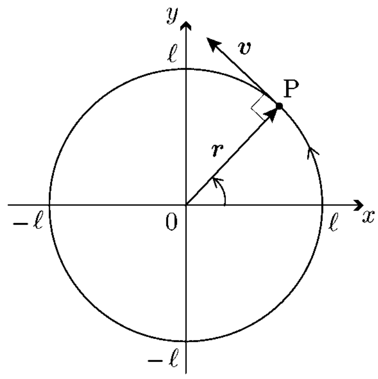
< 回転 1 >



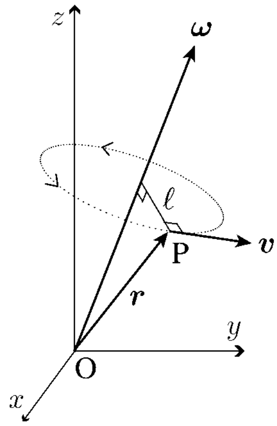
例 1 原点を中心として半径 ℓ の円周上を点 P が動く。点 $(\ell\ ,\ 0)$ から出発して 1 秒間に角度 θ（ラジアン）だけ回転するとすれば，t 秒後の P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y)$ は

$$x=\ell\cos(\theta t)\quad ,\quad y=\ell\sin(\theta t)$$

で表される。このとき速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\right)=\big(-\theta\ell\sin(\theta t)\ ,\ \theta\ell\cos(\theta t)\big)=(-\theta y\ ,\ \theta x)$$

となる。$\boldsymbol{v}$ の方向は $\boldsymbol{r}$ に垂直で大きさは $|\boldsymbol{v}|=\theta\ell$ となる。

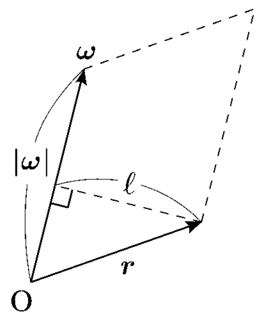


例 2 空間のベクトル $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1\,,\omega_2\,,\omega_3)$ は原点 O を始点とするベクトルで，大きさは θ

$$|\boldsymbol{\omega}|=\sqrt{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2+(\omega_3)^2}=\theta$$

とする。点 P はベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を中心軸として右ねじの進む方向に回転しているとする。点 P は 軸ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ から距離 ℓ だけ離れた軌道上を 1 秒間に角度 θ（ラジアン）の速度で等速回転しているとする。このとき点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば

$\boldsymbol{v}$ の方向	: $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ に垂直
$\boldsymbol{v}$ の大きさ	: $|\boldsymbol{v}|=\theta\ell=|\boldsymbol{\omega}|\times\ell$
	$=\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ の作る平行四辺形の面積



となる。外積の幾何学的意味より

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}$$

となることが分かる。

問 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=(v_1,v_2,v_3)$ として $\boldsymbol{v}$ の成分を $\boldsymbol{\omega}$ の成分 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ と $\boldsymbol{r}$ の成分 (x,y,z) で表わせ。

$v_1=$　　　　　　$v_2=$　　　　　　$v_3=$