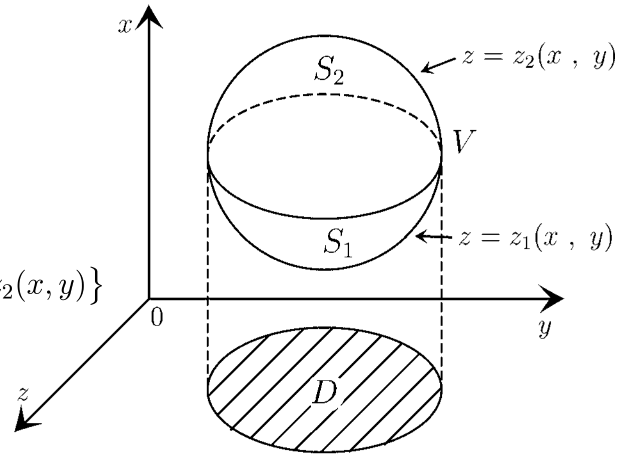
< 体積積分 3 >



2 変数関数 $z_1(x,y), z_2(x,y)$
と xy 平面上の領域 D に対し,
空間の領域 V が

$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D\ ,\ \ z_1(x,y) \leqq z \leqq z_2(x,y)\}$

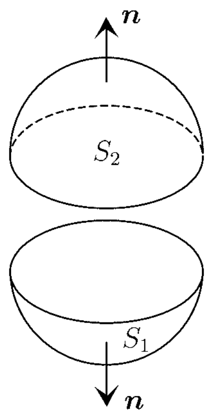
と表されている場合を考える。
このときスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ の体積積分は

$$\int_V \varphi\ dV = \iint_D \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(x,y,z)dz \right\} dxdy$$

となる。今ある関数 $f(x,y,z)$ に対し $\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ となっている場合は

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \iint_D \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right\} dxdy = \iint_D \left\{ \Big[f(x,y,z) \Big]_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \right\} dxdy$$
$$= \iint_D f\big(x,y,z_2(x,y)\big) dxdy - \iint_D f\big(x,y,z_1(x,y)\big) dxdy$$

となる。ここで領域 V が下半面 S_1 と上半面 S_2 によって囲まれているときを
考える。上曲面 $S_2 = \{\big(x,y,z_2(x,y)\big) \colon (x,y) \in D\}$ は上方向に
法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が向いているとすれば 41 ページより



$$\iint_D f\big(x\ ,\ y\ ,\ z(x,y)\big) dxdy = \int_{S_2} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる。下曲面 $S_1 = \{\big(x\ ,\ y\ ,\ z_1(x,y)\big)\ ;\ (x\ ,\ y \in D)\}$ は
下方向に法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が向いているとすれば

$$-\iint_D \varphi\big(x\ ,\ y\ z(x\ ,\ y)\big) dxdy = \int_{S_1} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる。S_1 と S_2 を合わせた曲面を S とすれば体積積分を以下のように表面積分で
表される。

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int_{S_2} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_1} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$