< 体積積分 2 >

例　$V=\{(x,y,z)\ :\ 0\leqq x\leqq 3\ ,\ 0\leqq y\leqq 2\ ,\ 0\leqq z\leqq 1\}$ で $\varphi(x,y,z)=xz+y$ のとき φ の体積積分は

$$\int_V \varphi dV=\int_0^3\left\{\int_0^2\left(\int_0^1 \varphi(x,y,z)dz\right)dy\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{\int_0^2\left(\int_0^1 (xz+y)dz\right)dy\right\}dx=\int_0^3\left\{\int_0^2\left(\left[\frac{1}{2}xz^2+yz\right]_{z=0}^{z=1}\right)dy\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{\int_0^2\left(\frac{1}{2}x+y\right)dy\right\}dx=\int_0^3\left\{\left[\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}\right\}dx$$

$$=\int_0^3\{x+2\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{x=0}^{x=3}=\frac{9}{2}+6=\frac{21}{2}$$

(別解)　変数 y と z の積分の順序を入れかえると

$$\int_0^3\left\{\int_0^1\left(\int_0^2 \varphi(x,y,z)dy\right)dz\right\}dx=\int_0^3\left\{\int_0^1\left(\int_0^2 (xz+y)dy\right)dz\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{\int_0^1\left(\left[xzy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}\right)dy\right\}dx=\int_0^3\left\{\int_0^1 (2xz+2)\,dz\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{\left[xz^2+2z\right]_{z=0}^{z=1}\right\}dx=\int_0^3\{x+2\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{x=0}^{x=3}=\frac{21}{2}$$

となり，結果は同じ。

一般に領域 V が例のような直方体領域のときは積分順序を入れ変えても結果は同じである。

問　$V=\big\{(x,y,z)\ :\ 0\leqq x\leqq 4,\ 0\leqq y\leqq 3,\ 0\leqq z\leqq 2\big\}$

$\varphi(x,y,z)=x+y+z$ のとき $\displaystyle\int_V \varphi dV$ を求めよ。