

< 体積積分 1 >

空間内のある立体を V とし, V を含むある範囲で定義された 3 変数関数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ (スカラー場)

があるとする。立体 V を xy 平面, yz 平面, xz 平面に平行な平面により

微少な立体 v_1, v_2, \dots, v_n (これらは全て直方体とみなしてよい) に分割し, 各 i について v_i の体積を ΔV_i , v_i 内の任意の点を $P_i(x_i, y_i, z_i)$ とし, v_i の x 軸, y 軸, z 軸に平行な辺の長さを $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ とする。このとき P_i における φ の値と ΔV_i との積の和

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

を考え, 分割を限りなく細くした極限 ($n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0, \Delta y_i \rightarrow 0, \Delta z_i \rightarrow 0$) を

$$\int_V \varphi dV = \iiint_V \varphi(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

と書き (スカラー場) φ の立体 V についての体積積分または三重積分という。特に領域 V が直方体

$$V = \{(x, y, z) : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

のときは

$$\int_V \varphi dV = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{z_1}^{z_2} \varphi(x, y, z) dz \right) dy \right\} dx \quad (2)$$

で求められる。

問 $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ のとき

$\int_V \varphi dV$ を (2) 式の右辺の形にせよ。

