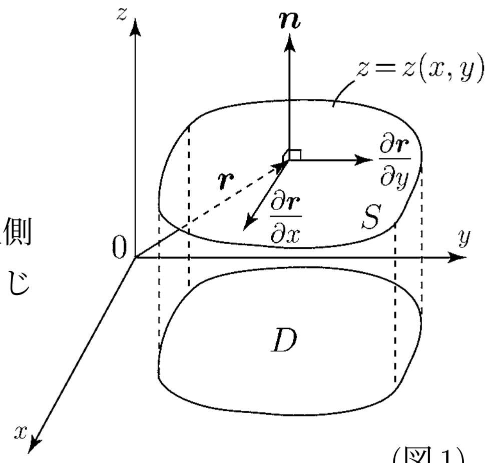
＜ベクトル場の表面積分 3＞



(図 1)

例 1 曲面 S が 2 変数関数 $z(x,y)$ によって

$$S=\left\{\boldsymbol{r}(x,y)=\big(x,y,z(x,y)\big):(x,y)\in D\right\}$$

と表されている場合を考える。
単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が図 1 のように曲面の上側に向いているとき，外積 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ は $\boldsymbol{n}$ と同じ方向だから

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|}$$

となる。ベクトル場 $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ の曲面 S 上の表面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3\\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x}\\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}dxdy$$

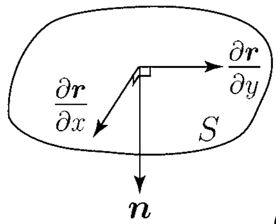
$$=\iint_D\left(f_3-f_1\frac{\partial z}{\partial x}-f_2\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

となる。特に $f_1=f_2=0$ のとき

$$\int_S (0,0,f_3)\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D f_3\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy$$

となる。

例 2 例 1 と同じ場合で，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が図 2 のように曲面の下側に向いている場合は,



(図 2)

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right|}$$

であるから $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ の表面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right)dxdy=-\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)dxdy$$

で例 1 の結果にマイナスをかけた値になる。

(注) 例 1 を**表 (おもて) 面の表面積分**と考えれば，例 2 は**裏 (うら) 面の表面積分**といえる。

問 例 2 の場合に $\boldsymbol{F}=(0,0,f_3)$ の表面積分を求めよ。

$$\int_S (0,0,f_3)\cdot d\boldsymbol{S}$$