< ベクトル場の表面積分 2 >

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の曲面 S 上の表面積分は単位法線ベクトルを用いて

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

と書かれる。$\boldsymbol{n}$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ による表現を使うと，スカラー場の面積分の定義から

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv = \iint_D \boldsymbol{F}\cdot\frac{\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv$$

であるから

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv} \quad \left(\begin{array}{l}\text{表面積分の}\\ \text{パラメーター表示}\end{array}\right)$$

が成り立つ。今

$$\boldsymbol{F}(x\ ,\ y\ ,\ z) = \big(f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)\big)$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u\ ,\ v) = \big(x(u,v)\ ,\ y(u,v)\ ,\ z(u,v)\big)$$

のときは

$$\boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right) = (f_1,f_2,f_3)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}f_1 & f_2 & f_3\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

となる。

例　曲面 S は原点を中心とした半径 1 の円とする。すなわち

$$S = \left\{\Big(\cos v\cos u\ ,\ \cos v\sin u\ ,\ \sin v\Big) : 0 \leqq u \leqq 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

である。今ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が位置 $(x\,,\,y\,,\,z)$ に無関係なベクトル $\boldsymbol{F}=(a\,,\,b\,,\,c)$ であるとき

$$\boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix}a & b & c\\ -\cos v\sin u & \cos v\cos u & 0\\ -\sin v\cos u & -\sin v\sin u & \cos v\end{vmatrix}$$
$$= a\cos^2 v\cos u + b\cos^2 v\sin u + c\cos v\sin v$$

より

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(a\cos^2 v\cos u + b\cos^2 v\sin u + c\cos v\sin v\Big)dv\right\}du$$

となる。

問　例の表面積分の値を求めよ。