

< ベクトル場の表面積分 1 >

空間の各点 (x, y, z) にベクトル $\mathbf{F}(x, y, z)$ が対応しているベクトル場を考える。 \mathbf{F} は例えば風・水流などを考えてよい。風の場合，曲面 S に \mathbf{F} が与える影響は曲面に対して 垂直に押す力 F_n (図1) であるから，その力の合計は面積分

$$\int_S F_n dS$$

で与えられる。これをベクトル場 \mathbf{F} の曲面 S 上の表面積分といい

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S F_n dS} \quad (\text{ベクトル場の表面積分})$$

と書く。ここで F_n は \mathbf{F} の面に垂直な成分であるから

$$F_n = |\mathbf{F}| \cos \theta$$

である。今曲面 S が

$$S = \{ \mathbf{r}(u, v) : (u, v) \in D \}$$

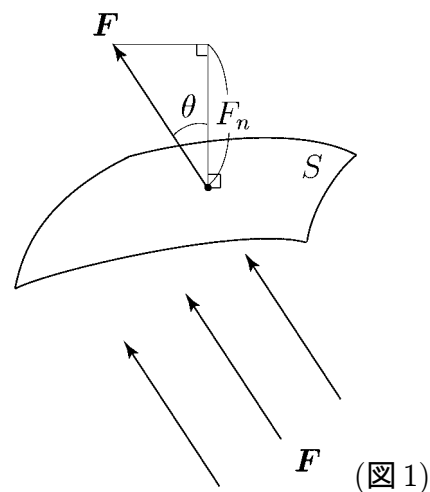
で表されているとき

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)$$

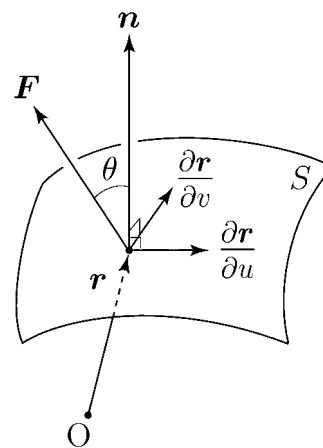
は法線方向のベクトルで $|\mathbf{n}| = 1$ である。この \mathbf{n} を単位法線ベクトルという。この \mathbf{n} を使うと

$$F_n = |\mathbf{F}| \cos \theta = |\mathbf{F}| |\mathbf{n}| \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$$

となり， F_n が \mathbf{F} と \mathbf{n} の内積で表される。



(図1)



(図2)