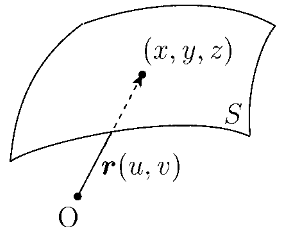
< スカラー場の面積分 >



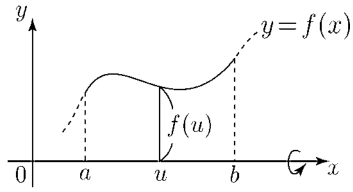
曲面 S は

$$S = \left\{\boldsymbol{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) : (u,v) \in D\right\}$$

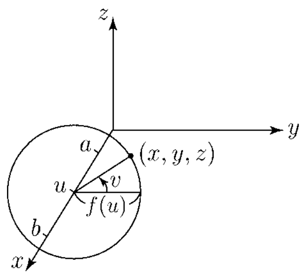
と表されているとする。今曲面の各点 (x, y, z) に対して，3 変数関数 $\varphi(x, y, z)$ が対応しているとする。このとき

$$\boxed{\int_S \varphi\ dS = \iint_D \varphi\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv}$$
(スカラー場 φ の面積分)

を**スカラー場 φ の曲面 S 上の面積分**という。例えば曲面 S の点 (x, y, z) に質量 $\varphi(x, y, z)$ がかかっているとすれば，上の面積分は曲面 S の全質量を表す。$\varphi = 1$ のときは面積を表す。



例　区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) > 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の側面を S とする。x 座標が u のとき，右下図の角度を v とすれば、S 上の点 (x, y, z) は



$$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \leqq u \leqq b \\ 0 \leqq v \leqq 2\pi \end{pmatrix}$$

と表される。$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \big(1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v\big) \times \big(0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v\big) \\ &= \big(f'(u)f(u), -f(u)\cos v, -f(u)\sin v\big) \end{aligned}$$

より

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\big(f'(u)f(u)\big)^2 + \big(f(u)\big)^2\cos^2 v + f(u)^2\sin^2 v} = f(u)\sqrt{1 + \big(f'(u)\big)^2}$$

となるからスカラー場 φ の面積分は

$$\int_S \varphi\ dS = \int_0^{2\pi}\left\{\int_a^b \varphi\big(u, f(u)\cos v, f(u)\sin v\big) f(u)\sqrt{1 + \big(f'(u)\big)^2}du\right\} dv$$

となる。

問　例で $\varphi \equiv 1$ の場合に上の面積分を計算し，10 ページの公式と等しくなるのを確かめよ。