< 曲面の面積 2 >

例　前ページの例の問題を考える。前ページ図 2 の斜線部分の面積 ΔS は Δu と Δv が十分小さいとき

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right| \fallingdotseq \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta u\right| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v$$

で近似できる。図 1 の曲面 S の面積も同じ S で表すと，面積 S は ΔS を集めたものであるから $\Delta u \to 0$，$\Delta u \to 0$ の極限を考えると，2 重積分の定義から

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$$

で計算される。35 ページ問の結果より

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (R^2\cos^2 v\cos u\ ,\ R^2\cos^2 v\sin u\ ,\ R^2\cos v\sin v) = R\cos v\,\boldsymbol{r}(u,v)$$

であるから

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = R\cos v\,|\boldsymbol{r}(u,v)| = R^2\cos v$$

より

$$\begin{aligned} S &= \iint_D R^2\cos v dudv = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos v du\right\}dv \\ &= \frac{\pi}{4}R^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos v dv \ = \ \frac{\pi}{4}R^2\Big[\sin v\Big]_{v=\frac{\pi}{6}}^{v=\frac{\pi}{3}} \ = \ \frac{\pi R^2}{8}(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

一般に曲面 S が

$$S = \{\boldsymbol{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$$

で表されているとき，曲面の面積を同じ記号 S で表すと，面積 S は

$$\boxed{S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv} \quad \text{（曲面の面積）}$$

で求められる。

問　半径 R の球面の面積 S を上の方法で求めよ。