< 曲面の面積 1 >

例 図 1 のような原点を中心とした半径 R の球面の一部分 S の面積を求めたい。

$$x(u,v) = R\cos v\cos u$$

$$y(u,v) = R\cos v\sin u$$

$$z(u,v) = R\sin v$$

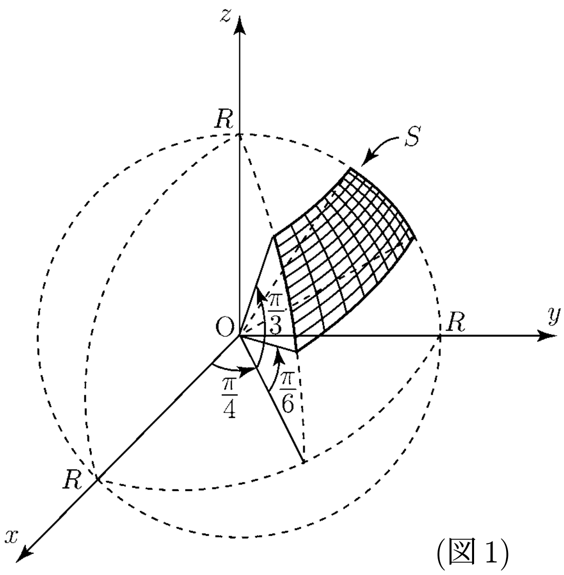
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$D = \left\{(u,v) : \frac{\pi}{4} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6} \leqq v \leqq \frac{\pi}{3}\right\}$$

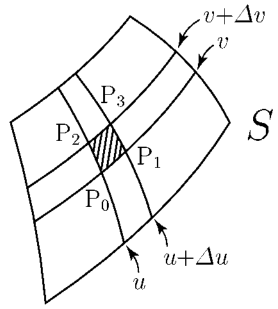
とおくと曲面 S は

$$S = \big\{\boldsymbol{r}(u,v) : (u,v) \in D\big\}$$

と表される。曲面 S を同緯度 (東西方向) の線と同経度 (南北方向) の線で細かくわける。その 1 つを 図 2 の斜線部分とする。各点の位置は P_0(経度 u, 緯度 v), P_1(経度 $u+\Delta u$, 緯度 v) , P_2(経度 u, 緯度 $v+\Delta v$) , P_3(経度 $u+\Delta u$, 緯度 $v+\Delta v$) とする。斜線部分の面積を ΔS とする。Δu と Δv が十分小さいとき,



(図 1)



(図 2)

ΔS は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ のつくる平行四辺形の面積 $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\right|$ で近似できる。すなわち

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\right|$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u,v)$$

$$= \big(x(u+\Delta u,v) - x(u,v)\ ,\ y(u+\Delta u,v) - y(u,v)\ ,\ z(u+\Delta u,v) - z(u,v)\big)$$

$$\fallingdotseq \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Delta u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u$$

となる。同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \fallingdotseq \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v$$

と近似できる。