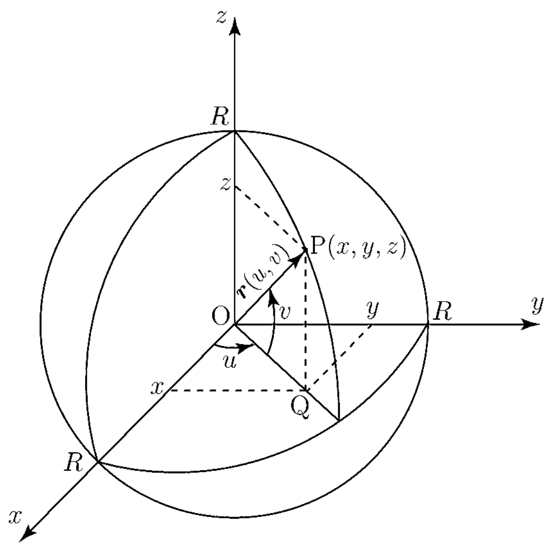
< 球面のパラメータ表示 >

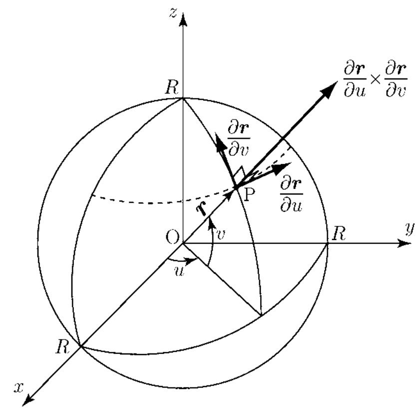


原点を中心として半径 R の球面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする。点 P の x 軸からの角度（経度）を u（ラジアン），xy 平面からの角度（緯度）を v（ラジアン）とする。点 P の xy 平面への射影を $\mathrm{Q}(x, y, 0)$ とすれば右図より

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OP}\cos v = R\cos v$$
$$x = \mathrm{OQ}\cos u$$
$$y = \mathrm{OQ}\sin u$$
$$z = \mathrm{PQ} = \mathrm{OP}\sin v$$

より

$$(*) \begin{cases} x = R\cos v\cos u \\ y = R\cos v\sin u \\ z = R\sin v \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \leqq u \leqq 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right)$$



となる。この式 $(*)$ を**球面のパラメータ表示**という。点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(u, v)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \big(R\cos v\cos u\ ,\ R\cos v\sin u\ ,\ R\sin v\big)$$

となる。これを略して $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と書く。このとき点 P における経度方向 (東西方向) の接線ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \big(-R\cos v\sin u\ ,\ R\cos v\cos u\ ,\ 0\big)$$

であり，緯度方向 (南北方向) の接線ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \big(-R\sin v\cos u\ ,\ -R\sin v\sin u\ ,\ R\cos v\big)$$

である。

問 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ は点 P における法線ベクトルである。この成分を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(u, v)$ の定数倍として表せ。