

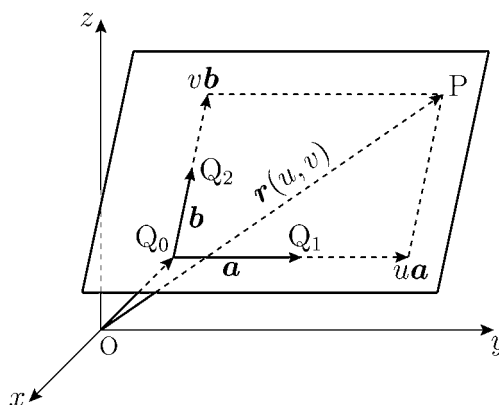
## < 平面のパラメーター表示 >

空間の3点  $Q_0, Q_1, Q_2$  を通る平面を考える。

$$\overrightarrow{Q_0Q_1} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{Q_0Q_2} = \mathbf{b}$$

とおく。この平面上の任意の点を  $P$  とすると、 $\overrightarrow{Q_0P}$  は(右図より)ある定数  $u$  と  $v$  によって

$$\overrightarrow{Q_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$



と表される。点  $P$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}(u, v)$  とすれば

$$\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ_0} + \overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{OQ_0} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

となる。ここで成分を

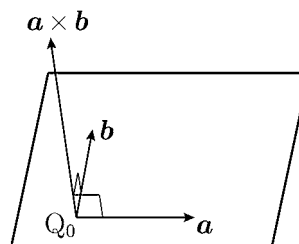
$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z), \quad \overrightarrow{OQ_0} = (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

とすると

$$\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3)$$

となるから

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$$



と表される。これがこの平面の方程式である。

この平面は点  $Q_0(x_0, y_0, z_0)$  を通り、ベクトル  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  に垂直な平面である。このようなベクトル  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  をこの平面の法線ベクトルという。

ここで  $v$  を定数と考え、 $\mathbf{r}(u, v)$  を  $u$  で偏微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

となる。

問  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  を求め、法線ベクトル  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$  と  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  で表せ。