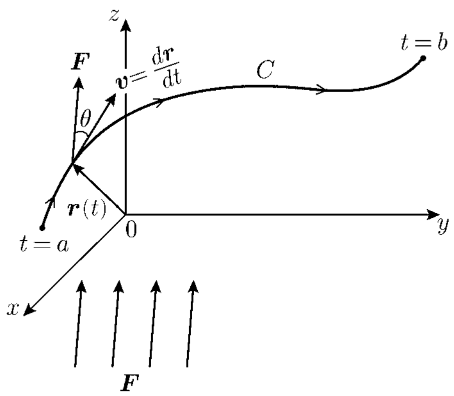
< 空間のベクトル場の線積分 >



曲線 C が

$$C=\{\boldsymbol{r}(t)=\bigl(x(t),y(t),z(t)\bigr):a\leqq t\leqq b\}$$

で表わされている。
また空間の各点 (x,y,z) に対しベクトル

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\bigl(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)\bigr)$$

が対応しているとする。角度 θ が右図のような場合に平面の場合（26〜28 ページ）と同様に

$$\int_C|\boldsymbol{F}|\cos\theta ds=\int_C\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C(f_1dx+f_2dy+f_3dz)$$
$$=\int_a^b f_1\bigl(x(t),y(t),z(t)\bigr)\frac{dx}{dt}dt+\int_a^b f_2\bigl(x(t),y(t),z(t)\bigr)\frac{dy}{dt}dt+\int_a^b f_3\bigl(x(t),y(t),z(t)\bigr)\frac{dz}{dt}dt$$

を**ベクトル場 F の曲線 C に沿った線積分**という。

例　曲線 C は 31 ページの問と同じ曲線とする。今ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(x^2+y^2\ ,\ \frac{y}{x}\ ,\ z\right)$$

のとき C に沿った線積分は

$$\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\left\{\bigl(x(t)\bigr)^2+\bigl(y(t)\bigr)^2\right\}\frac{dx}{dt}dt+\int_0^{2\pi}\left\{\frac{y(t)}{x(t)}\right\}\frac{dy}{dt}dt+\int_0^{2\pi}z(t)\frac{dz}{dt}dt$$

となる。

問　例の線積分の計算を完成させよ。