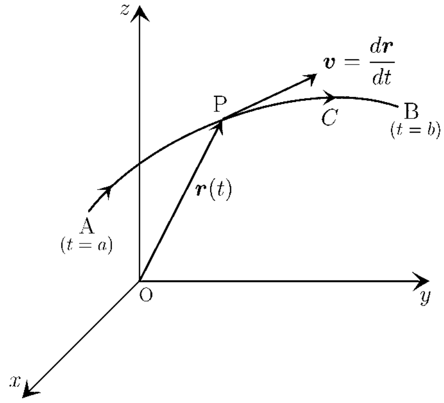
＜空間の運動＞



座標空間内に点Pが動く。時刻 t における点Pの座標を $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$ とし，その位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$$

とおくと，時刻 t における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\ ,\ \frac{dz}{dt}\right)$$

となる。点Pが時刻 $t = a$（位置A）から時刻 $t = b$（位置B）まで動いた軌道を曲線 C とする。速度ベクトルの大きさは

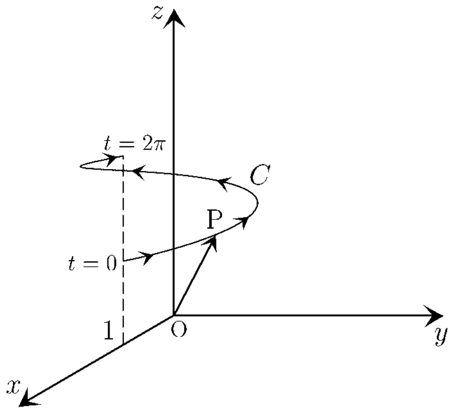
$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2}$$

であり，方向は点Pの曲線 C における接線方向である。12 ページと同様にして，曲線 C の長さ s は

$$\boxed{s = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2}\,dt}$$

(曲線の長さ)

となる。



問　動点Pの時刻 t における位置 $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$ が $x(t) = \cos t\ ,\ y(t) = \sin t\ ,\ z(t) = 0.2t + 1$ であるとき，速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ とその大きさ $|\boldsymbol{v}|$ を求め $t = 0$ から $t = 2\pi$ までの軌道

$$C = \left\{\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)\ \ :\ \ 0 \leqq t \leqq 2\pi\right\}$$

の長さ s を求めよ。

$\boldsymbol{v} = (\qquad ,\qquad ,\qquad)$

$|\boldsymbol{v}| = \qquad\qquad\qquad , s =$