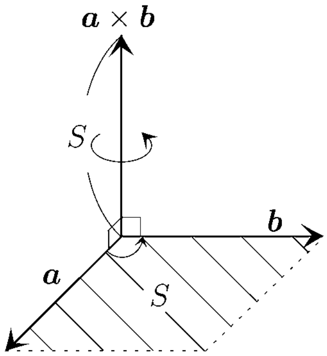
＜空間のベクトル 2 ＞



$\boldsymbol{a}=(a_1\,,\;a_2\,,\;a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1\,,\;b_2\,,\;b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直で $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ にまわる右ねじの進む方向にあり，大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に等しい。
これを成分で表すと

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\,,\;\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\,,\;\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

となる。これを形式的に３次の行列式の記号で

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\,,\;a_2\,,\;a_3)\times(b_1\,,\;b_2\,,\;b_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}}\quad \text{(外積の成分表示)}$$

と書くと覚えやすい。

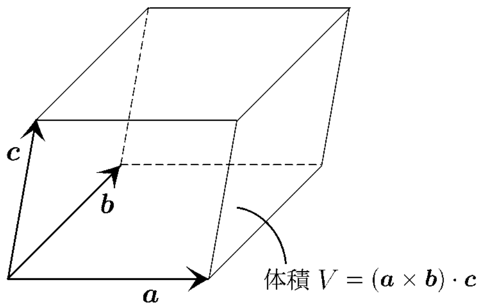
例　$\boldsymbol{a}=(1\,,\;2\,,\;3)$　,　$\boldsymbol{b}=(4\,,\;0\,,\;5)$ のとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}=(10\,,\;7\,,\;-8)$$

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ が右手系 ($\boldsymbol{a}$が親指，$\boldsymbol{b}$が人差指，$\boldsymbol{c}$が中指の順) であれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラー三重積

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}$$

は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を表す。



問　$\boldsymbol{a}=(3\,,\;2\,,\;0),\boldsymbol{b}=(1\,,\;4\,,\;0),\boldsymbol{c}=(1\,,\;1\,,\;3)$ のとき次を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　　　(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$　　　　(4) $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$