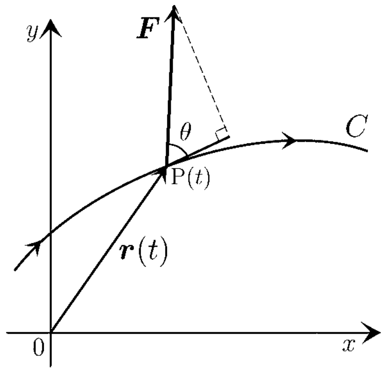
< 平面のベクトル場の線積分 3 >

平面上のベクトル場$\boldsymbol{F}$に対し，
曲線Cを動く点が$\boldsymbol{F}$から受ける
力の合計は前ページより



$$\boxed{\int_C |\boldsymbol{F}|\cos\theta\ ds = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt}$$

であった。ここで$\boldsymbol{r}(t)$はC上を動く点$\mathrm{P}(t)$の位置ベクトル$\boldsymbol{r}(t)=\big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$であり，
$\boldsymbol{F}=\big(f_1,f_2\big)$とすると

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(f_1,f_2)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=f_1\frac{dx}{dt}+f_2\frac{dy}{dt}$$

であるから

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_C f_1\frac{dx}{dt}dt+\int_C f_2\frac{dy}{dt}dt=\int_C f_1dx+\int_C f_2dy$$

となる。ここで$d\boldsymbol{r}=(dx,dy)$をベクトルと考え，

$$f_1dx+f_2dy=(f_1,f_2)\cdot(dx,dy)=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

という記号で表すと，

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C(f_1dx+f_2dy)}\quad\text{（ベクトル}\boldsymbol{F}\text{の線積分）}$$

となる。この式の値を**ベクトル場$\boldsymbol{F}$の曲線Cに沿った線積分**という。

問　曲線Cは右図のような反時計まわりの単一閉曲線であり，Cで囲まれた領域をDとする。ベクトル場$\boldsymbol{F}=(f_1,f_2)$に対し

$$\iint_D \mathrm{rot}(\boldsymbol{F})dxdy=\iint_D\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$$

をグリーンの定理 (21 ページ) を使って線積分で表せ。(これを**平面のストークスの定理**という。)