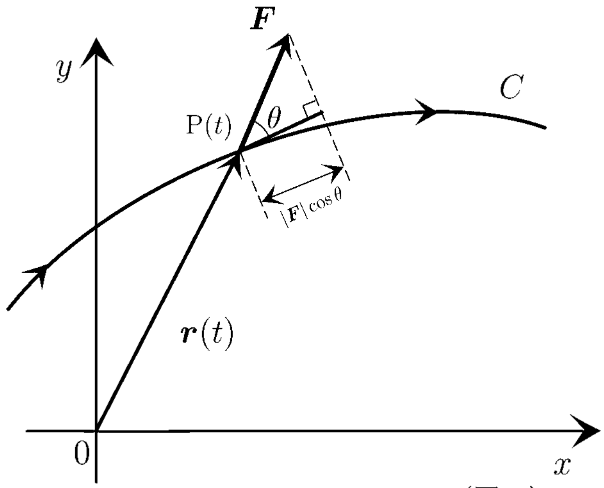
＜平面のベクトル場の線積分 2＞

平面上の各点 (x, y) にベクトル

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$$

が対応しているベクトル場$\boldsymbol{F}$の中を曲線 C に沿って点が運動するとき図１のような場合点が$\boldsymbol{F}$によって受ける力の合計は前ページより

$$\boxed{\int_C |\boldsymbol{F}| \cos\theta ds}$$



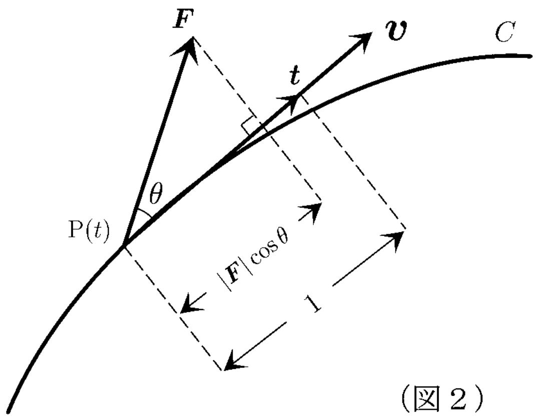
（図１）

であった。この線積分の具体的な計算方法を求めたい。時刻 t における点 P(t) の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

とおくと P(t) における速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \quad \cdots \quad (1)$$



（図２）

は曲線 C の接線方向のベクトルであり

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \quad \cdots \quad (2)$$

は接線方向の単位ベクトルである (図 2)。このとき$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{t}$の内積は

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} = |\boldsymbol{F}| \times |\boldsymbol{t}| \times \cos\theta = |\boldsymbol{F}| \times \cos\theta \quad \cdots \quad (3)$$

となる。一方 15 ページより

$$ds = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = |\boldsymbol{v}| dt \quad \cdots \quad (4)$$

であるから (1)〜(4) より

$$\int_C |\boldsymbol{F}| \cos\theta ds = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, |\boldsymbol{v}| dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

となる。