< 平面上の流れ 4 >

例 1　23 ページの例の場合，時刻 t における位置 (x, y) と速度 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = (x, -y)$$

となっていた。この流れは図 1 のように，x 軸上では原点から遠ざかり，y 軸上では原点に近づく。この動きは，次のようにモデル化できる。図 2 のような曲面の上に球を置き，曲面の傾斜にそって下に転がりながら落ちるところを真上から見ると図 1 のような動きになる。図 2 の曲面を $z = U(x, y)$ とすると，曲面の傾きが上向き（＝傾きが正）であれば，速度は逆方向（負）だから

$$(*) \qquad \boxed{\boldsymbol{v} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right)}$$

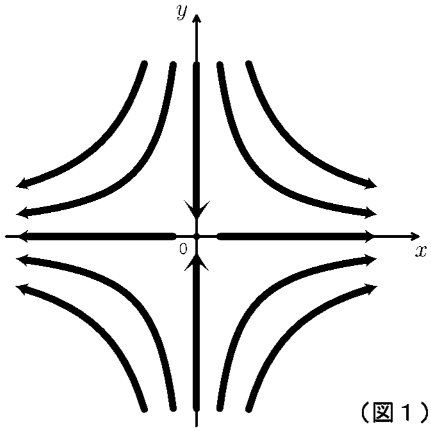
の関係がある。実際，図 2 の関数は

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

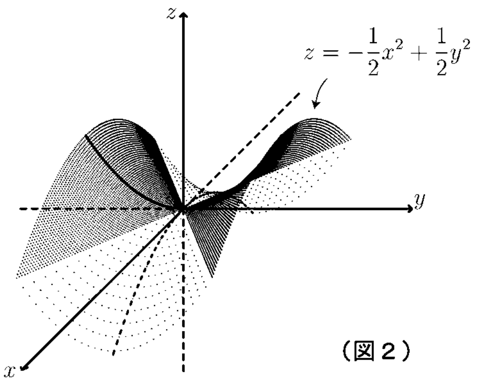
であり

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x, -y) = \boldsymbol{v}$$

で $(*)$ の関係が成り立つ。このような関数 $U(x, y)$ を**ポテンシャル**という。



（図 1）



（図 2）

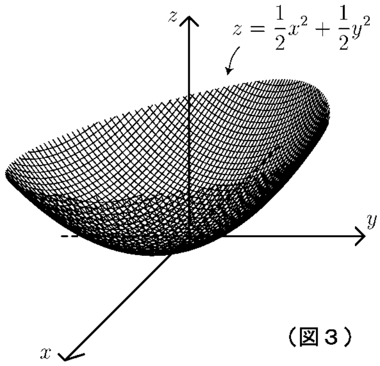
例 2　22 ページの例の場合は，$\boldsymbol{v} = (-x, -y)$ であり，原点が「吸い込み点」であった。この場合のポテンシャル U は

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

となる（図 3）。実際

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (-x, -y) = \boldsymbol{v}$$

で $(*)$ が成り立つ。



（図 3）

一般に

「渦なし $(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = 0)$ であれば，ポテンシャル U が存在する」

問　$\boldsymbol{v} = (x, y)$ の場合のポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。