< 平面上の流れ 3 >

例　平面上を動く点の時刻 t における座標 (x, y) が，a, b を定数として

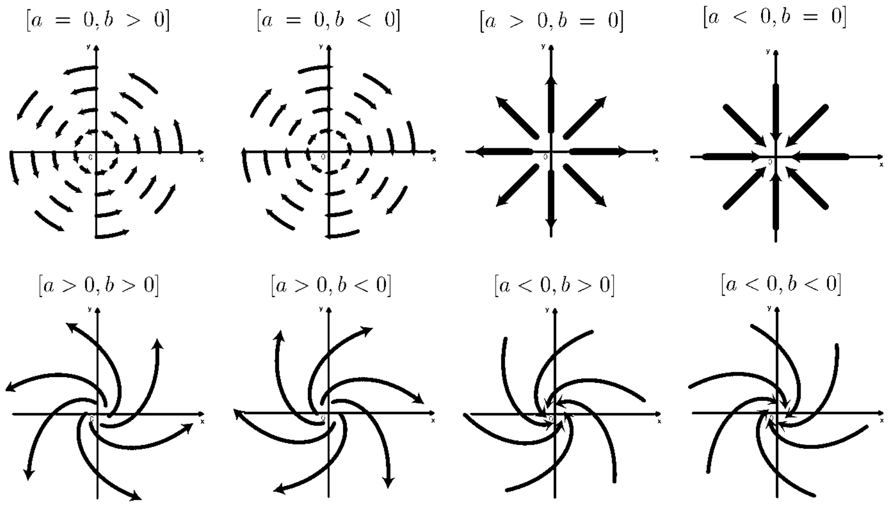
(1)　$x = e^{at+c_1}\cos(bt + c_2)$, $y = e^{at+c_1}\sin(bt + c_2)$

で与えられているとする。c_1, c_2 は任意定数である。(1) を t で微分すると，式

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = ax - by$, $\dfrac{dy}{dt} = ay + bx$

を満たす。従って (1) は微分方程式 (2) の一般解である。

(1) が表す平面上の流れは，次のようになる。



図から分かるように，$b \neq 0$ ならば**渦**（うず）ができる。

渦があるかないかは，速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) の関係で決まる。記号

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}(v_1, v_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

を**回転** (*rotation*) という。上の例では

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\right) = (ax - by\ ,\ ay + bx)$$

であるから

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(ay + bx) - \frac{\partial}{\partial y}(ax - by) = 2b$$

となる。よって $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = 0$ ならば渦がない。

問　速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) が次の場合に，$\mathrm{div}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

(1)$\boldsymbol{v} = (2x, 2y)$　　(2)$\boldsymbol{v} = (2x - y, 2y + x)$　　(3)$\boldsymbol{v} = (2x + 3y, 4x - 5y)$

$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$

$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$