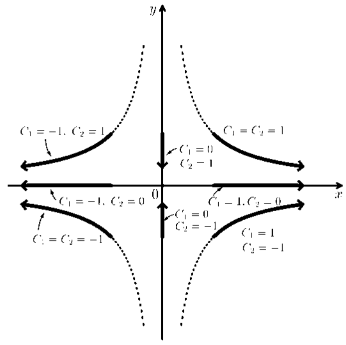
＜平面上の流れ 2＞

例 微分方程式

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$



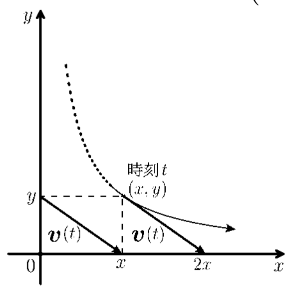
(図 1)

で与えられる点 $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ の動きを知りたい。(1) の一般解は

(2) $x(t) = C_1 \mathrm{e}^t$, $y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-t}$

であり，任意定数 C_1, C_2 が $\pm 1, 0$ の各場合の点の軌道を図 1 に描いた。太い線 (矢線) は $t = 0$ から $t = 1$ までの点の軌道であり，点線は $t < 0$ の場合である。
時刻 t における点の速度は，位置 (x, y) に対し

(3) $\boldsymbol{v}(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = (x, -y)$



(図 2)

となる (図 2)。

前ページの例のように，全ての流れが原点に向かっているとき，このような流れを「**吸い込み**」という。又，前ページの問のように全ての流れが原点から遠ざかるとき，このような流れを「**わき出し**」という。また，上の例のような流れを「**よどみ**」という。
「吸い込み」や「わき出し」があるかないかは，速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) の関係によって決まる。記号

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{div}(v_1, v_2) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

を**発散** (divergence) という。

前ページの例では $\boldsymbol{v} = (-x, -y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) = -2$

前ページの問では $\boldsymbol{v} = (x, y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 2$

上の例では $\boldsymbol{v} = (x, -y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) = 0$

となる。よって $\mathrm{div}\ (\boldsymbol{v}) > 0$ であれば「わき出し」が，$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) < 0$ であれば「吸い込み」がある。

問 微分方程式 $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -x$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = y$ で定まる流れに対し，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ の発散 $\mathrm{div}\ \big(\boldsymbol{v}(t)\big)$ を計算せよ。