< 平面上の流れ 1 >

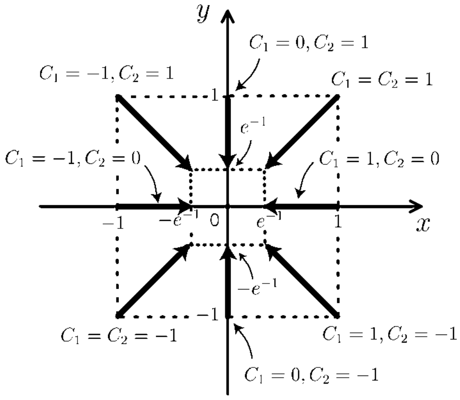
例 平面上を動く点の時刻 t における
位置 $(x, y) = (x(t)\ ,\ y(t))$ が微分方程式

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -x\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = -y$

で与えられる場合に，点の運動を知りたい。(1) の一般解は

(2) $x(t) = C_1 e^{-t}\ ,\ y(t) = C_2 e^{-t}$

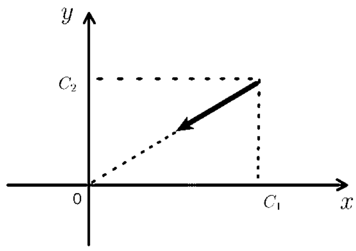
であり，C_1, C_2 は任意定数である。
(2) で表される点 $(x(t)\ ,\ y(t))$ の動きを C_1, C_2 が $1, 0, -1$ の場合に右図に書いた。
太い線（矢印）は $t = 0$ から $t = 1$ までの点の軌道である。矢印は全て原点に向かっている。



一般の C_1, C_2 の場合は
$t = 0$ のとき

$$(x(0)\ ,\ y(0)) = (C_1, C_2)$$

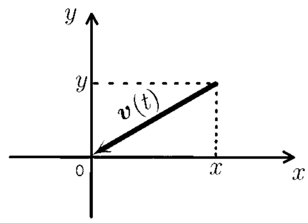
の位置から原点に向かって直線状に動く。



すなわち，平面上の任意の点 (C_1, C_2) から原点に向って直線的に動く**流れ**を表している。
時刻 t における速度は，位置 (x, y) に対して

(3) $\boldsymbol{v}(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\ ,\ \dfrac{dy}{dt}\right) = (-x, -y)$

で与えられる。



問 微分方程式

$(*)$ $\dfrac{dx}{dt} = x\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = y$

で与えられる点 $(x, y) = (x(t)\ ,\ y(t))$ の動きを知りたい。
$(*)$ の一般解を求め，任意定数 C_1, C_2 が $\pm 1, 0$ の各場合に，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で点の軌道を図示せよ。