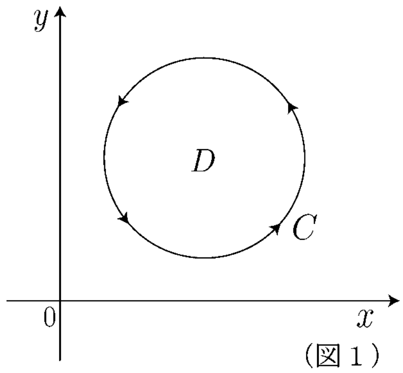
# ＜グリーンの定理１＞

図１のように反時計まわりに進む単一閉曲線 $C$ に囲まれた領域を $D$ とする。$D$ の面積を $S$ とすると前のページの結果より

$$S = -\int_C ydx = \int_C xdy$$




（図１）

が成り立つ。$S$ を領域 $D$ における２重積分で表すと

$$S = \iint_D 1dxdy$$

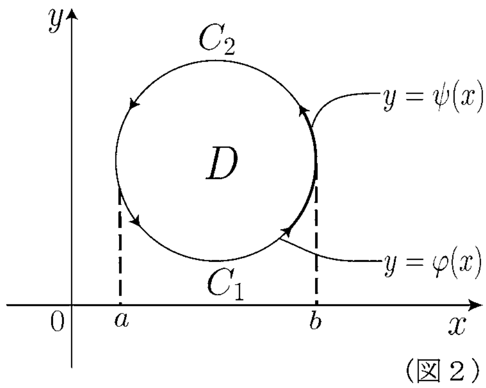
より

$$\boxed{\iint_D 1dxdy = -\int_C ydx} \quad , \quad \boxed{\iint_D 1dxdy = \int_C xdy}$$

となる。この式を一般化したい。
図２のように単一閉曲線 $C$ を $C_1$ と $C_2$ にわける。$D$ は

$$D = \Big\{(x, y) : a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(y)\Big\}$$

と表される。そこで一般の２変数関数 $f(x, y)$ の $y$ に関する偏導関数 $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ の $D$ における２重積分を $C$ に関する線積分で表したい。




（図２）

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \int_a^b \left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy\right\}dx \ = \int_a^b \left\{\Big[f(x, y)\Big]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}\right\}dx$$

$$= \int_a^b \Big\{f\big(x, \psi(x)\big) - f\big(x, \varphi(x)\big)\Big\}dx = \int_a^b f\big(x, \psi(x)\big)dx - \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big)dx$$

**問** 上の式を線積分

$$\int_C f(x, y)dx \left(= \int_{C_1} f(x, y)dx + \int_{C_2} f(x, y)dx = \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big)dx + \int_b^a f\big(x, \psi(x)\big)dx\right)$$

を用いて表せ。