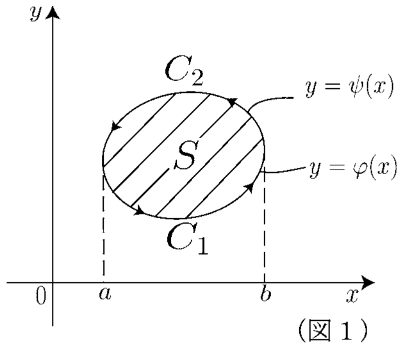
< 平面上の線積分 6 >

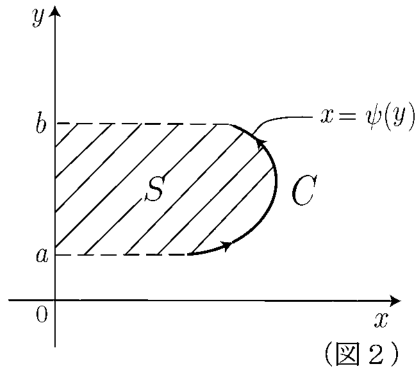


（図 1）

例 1　図 1 のように線分路 C_1 は曲線 $y=\varphi(x)$ を a から b に向い，C_2 は曲線 $y=\psi(x)$ を b から a に向うとする。図 1 のように C_1 の始点が C_2 の終点になり，C_2 の始点が C_1 の終点になっているとき C_1 と C_2 をあわせた積分路 C は **単一閉曲線** と呼ばれる。図 1 は 前ページの図 1 と図 3 をあわせた図と考えると，図 1 の斜線部分の面積 S は

$$S=S_2-S_1=\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx=-\int_b^a\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx$$

$$=-\int_{C_2}ydx-\int_{C_1}ydx=-\int_C ydx$$

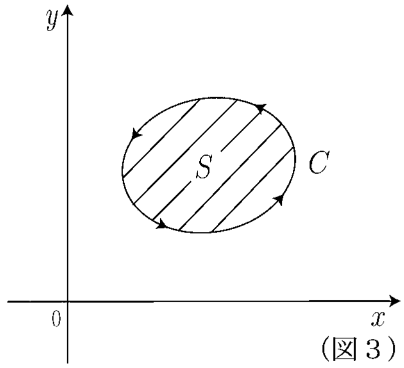


（図 2）

例 2　図 2 のように積分路 C は曲線 $x=\psi(y)$ 上を $y=a$ から $y=b$ まで進むとする。このとき y 成分に関する線積分

$$\boxed{\int_C xdy=\int_a^b\psi(y)dy=S}$$

は図 2 の斜線部分の面積 S を意味する。



（図 3）

問　図 3 のように線積分 C は単一閉曲線で，反時計まわりに進むとする。
そのとき C で囲まれた領域（斜線部分）の面積 S を y 成分に関する線積分で表せ。