< 平面上の線積分 4 >

平面上の曲線 C が

$$C \ : \ x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \quad a \leqq t \leqq b$$

で表されているとき，２変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$\boxed{\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\frac{dx}{dt}dt}$$

を**x成分に関する線積分**という。また

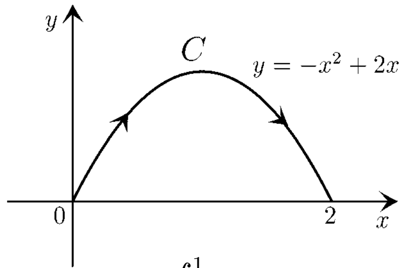
$$\boxed{\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\frac{dy}{dt}dt}$$

を**y成分に関する線積分**という。

例 曲線 C が

$C: \ x(t) = 2t \ , \ y(t) = -4t^2 + 4t \ , \ 0 \leqq t \leqq 1$

であるとき，C は右図のような曲線になる。



このとき

$$\int_C (x+y)dx = \int_0^1 \big(x(t)+y(t)\big)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^1 (2t - 4t^2 + 4t) \times 2dt = \int_0^1 (-8t^2 + 12t)dt = \frac{10}{3}$$

$$\int_C (x+y)dy = \int_0^1 \big(x(t)+y(t)\big)\frac{dy}{dt}dt = \int_0^1 (2t - 4t^2 + 4t) \times (-8t + 4)dt$$

$$= \int_0^1 (64t^3 - 64t^2 + 24t)dt = \frac{20}{3}$$

問 曲線 C が

$C: \ x(t) = t \ , \ y(t) = \sqrt{t} \ , \ 0 \leqq t \leqq 1$

のとき次の線積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C (x+y)dx$ (2) $\displaystyle\int_C (x+y)dy$