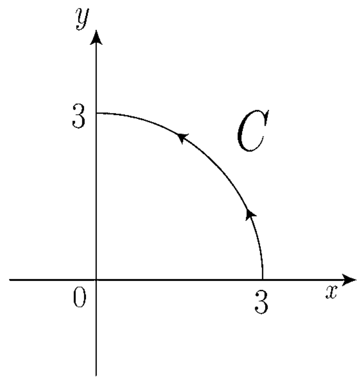
＜平面上の線積分 3 ＞



例　右図の曲線 C は

$C:\ x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ \ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$

と表されるが，別に

$C':\ x = 3\cos(2t),\ y = 3\sin(2t),\ \ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$

とも表される。ここで 14 ページの線積分では

$$\int_C (x^2+y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\right\}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9dt = \frac{9}{2}\pi$$

$$\int_{C'} (x^2+y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\big(3\cos(2t)\big)^2 + \big(3\sin(2t)\big)^2\right\}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9dt = \frac{9}{4}\pi$$

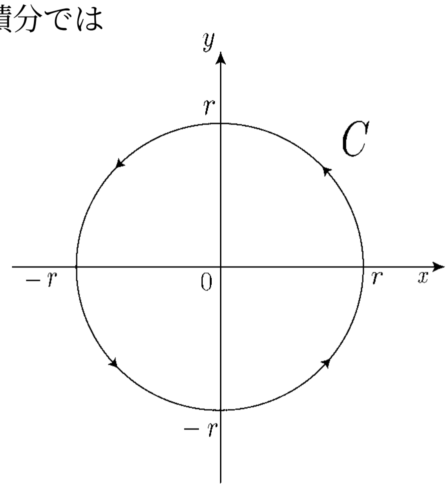
となり結果が異なる。一方 15 ページの曲線の長さに関する線積分では

$$\int_C (x^2+y^2)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\right\}\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\times 3dt = \frac{27}{2}\pi$$

$$\int_{C'} (x^2+y^2)ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{(3\cos(2t))^2 + (3\sin(2t))^2\right\}\sqrt{(-6\sin(2t))^2 + (6\cos(2t))^2}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\times 6dt = \frac{27}{2}\pi$$

となり一致する。すなわち曲線の長さに関する線積分では
曲線 C の表し方によって線積分の値が変わらない。



問　右図のように曲線 C は原点を中心とした半径 r の円周を反時計まわりに進むとする。このとき次の線積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)ds$　　　(2) $\displaystyle\int_C (x+y)ds$