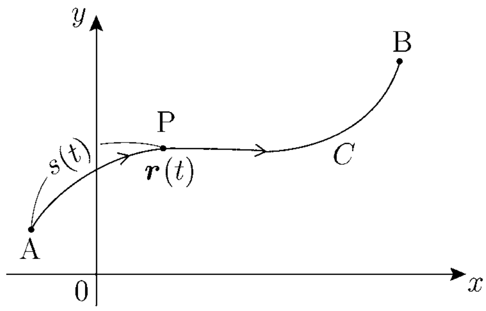
< 平面上の線積分 2 >

平面上の動点 P の位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

とする。$t = a$ (位置 A) から出発し曲線 C に沿って $t = b$ (位置 B) まで動いたとする。すなわち曲線 C は



$$(*) \quad C = \Big\{\big(x(t), y(t)\big) \ : \ a \leqq t \leqq b\Big\}$$

となる。今，時刻 $t = a$ から時刻 t までの曲線の長さ $s = s(t)$ は

$$s = s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| dt$$

であった。すなわち

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となる。このとき 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \frac{ds}{dt} dt$$

と考え，次式

$$\boxed{\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt} \qquad (C \text{ に沿った線積分})$$

を **曲線 C に沿った (曲線の長さに関する) 線積分** という。

普通，単に線積分といえば，この定義が使われる。それは曲線 C のパラメータ表示 $(*)$ によって変わらないからである。この線積分を単に **曲線 C に沿った線積分**とか **曲線の長さに関する線積分**とか **弧長に関する線積分**などという。