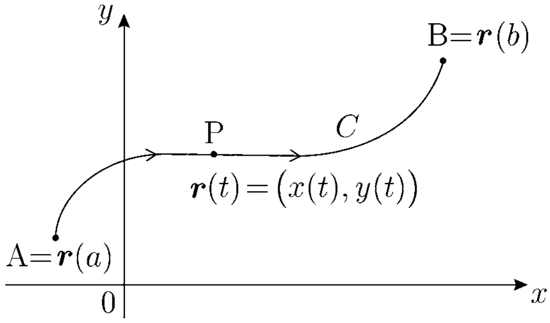
< 平面上の線積分 1 >

平面上の動点 P の時刻 t における位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$$

とする。$t = a$ (位置 A) から出発し，曲線 C に沿って $t = b$ (位置 B) まで動いたとする。このとき，2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，



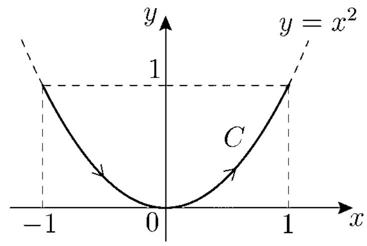
$$\boxed{\int_C f(x, y)dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)dt}\quad \text{（線積分）}$$

を曲線 C に沿った**線積分**という。

例 1　曲線 C が右図の放物線 $y = x^2$ の $x = -1$ から 1 へ行く部分とすると

$C : x(t) = t\ ,\ y(t) = t^2\ ,\ -1 \leqq t \leqq 1$

と考えられる。このとき



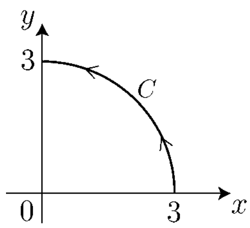
$$\int_C (x + y)dt = \int_{-1}^{1} \big(x(t) + y(t)\big)dt = \int_{-1}^{1} (t + t^2)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

問 1　例 1 と同じ C に対し，$\displaystyle\int_C xydt$ を求めよ。

例 2　曲線 C が右図の場合に

$C : x(t) = 3\cos t\ ,\ y(t) = 3\sin t\ ,\ 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$

と考えられる。このとき



$$\int_C (x^2 + y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\big)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9dt = \frac{9}{2}\pi$$

問 2　例 2 の場合に $\displaystyle\int_C (x + y)dt$ を求めよ。