< 回転体の表面積 2 >

前ページ図 4 の回転体の側面の表面積 S は

$$S = \pi m\sqrt{1+m^2}\,b^2 - \pi m\sqrt{1+m^2}\,a^2 = \int_a^b 2\pi m x\sqrt{1+m^2}dx$$

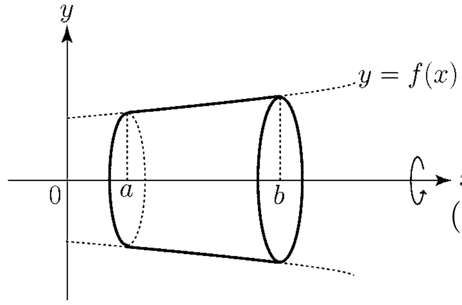
と表される。ここで

$$y = mx \quad \text{のとき} \quad y' = m$$

より

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

と表現できる。一般に曲線 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体 (図 1) の側面の表面積 S は

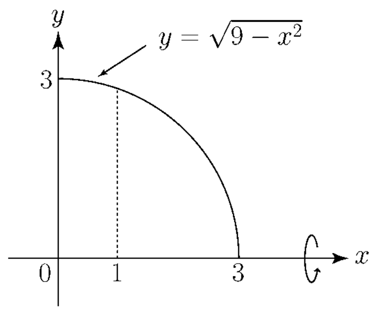


(図 1)

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$$

となる。

例 曲線 $y = \sqrt{9-x^2}$ の $1 \leqq x \leqq 3$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた曲面の表面積 S を求める。



(図 2)

$$y = \sqrt{9-x^2} = \left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

より

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{9-x^2} = \frac{9}{9-x^2}$$

だから

$$S = \int_1^3 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_1^3 2\pi\sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}dx = \int_1^3 2\pi\sqrt{9}dx$$

問 上の例の S を求めよ。